# Modelos de secuenciación de tareas en máquinas

Andrés Ramos
Universidad Pontificia Comillas
http://www.iit.comillas.edu/aramos/
Andres.Ramos@comillas.edu

# Modelos de secuenciación de tareas en máquinas

1. Introducción. Datos, hipótesis, medidas, criterios.

2. Secuenciación en una máquina

3. Secuenciación en varias máquinas

# Objetivo

Encontrar secuencia en la que los trabajos pasan por las máquinas, tal que

a) bajo ciertas hipótesis, sea una planificación compatible con restricciones tecnológicas, es decir, sea factible

b) óptima respecto a algún criterio

# Datos

- *Job-shop*: $n$ *trabajos* o *tareas* $\{J_1,...,J_n\}$ han ser procesados por $m$ *máquinas* o *procesadores* $\{M_1,...,M_m\}$.
- Cada trabajo ha de pasar por cada máquina una y sólo una vez.
- *Operación* $o_{ij}$: operación de procesar el trabajo $i$ en la máquina $j$.
- *Restricciones tecnológicas*: condiciones de orden en las operaciones de un trabajo.
    - Caso general: cada trabajo tiene su propio orden sin relación con el orden de otros.
    - *Flow-shop:* el orden es el mismo para todos los trabajos.

# Más datos

- *Tiempo de proceso* de $o_{ij}$: $p_{ij}$ (incluye tiempo de ajuste de máquina o de transporte hasta la máquina).
- *Release date* o *ready time:* $r_i$ instante en que el trabajo $J_i$ está listo para ser procesado o llega el pedido.
- *Due date*: $d_i$ fecha de entrega de $J_i$
- $a_i$ amplitud del periodo planificación trabajo $J_i$ o plazo de entrega: $a_i = d_i - r_i$

# Ejemplo

Se desean fabricar tres piezas de madera:

- una escultura, un candelabro y una copa.

Los recursos que se utilizan son:

- banco de trabajo, torno y sala de barnizado.

Los datos de que se dispone son los siguientes:

- Tiempo en minutos necesario para realizar cada operación
- Fecha de entrega también en minutos
- Orden en que se deben realizar las operaciones para cada pieza.

| | Banco | Torno | Sala barnizado | Fecha entrega | Orden |
|---|---|---|---|---|---|
| Escultura | 60 | - | 20 | 60 | B-S |
| Candelabro | - | 45 | 15 | 90 | T-S |
| Copa | 25 | 15 | 25 | 120 | T-B-S |

# Hipótesis del *job-shop* (i)

1. Cada trabajo es una entidad: no se pueden realizar dos operaciones de un mismo trabajo a la vez.
2. Cada trabajo incluye una y sólo una operación en cada máquina (en total $m$ operaciones).
3. No *preemption* (no se permite interrupción de operaciones).
4. No cancelación (no se permite cancelación una vez iniciada).
5. Tiempos de proceso independientes de la secuencia seguida.
6. Se permite inventario intraproceso (las operaciones pueden esperar hasta que se acabe otra operación en la siguiente máquina).

# Hipótesis del *job-shop* (ii)

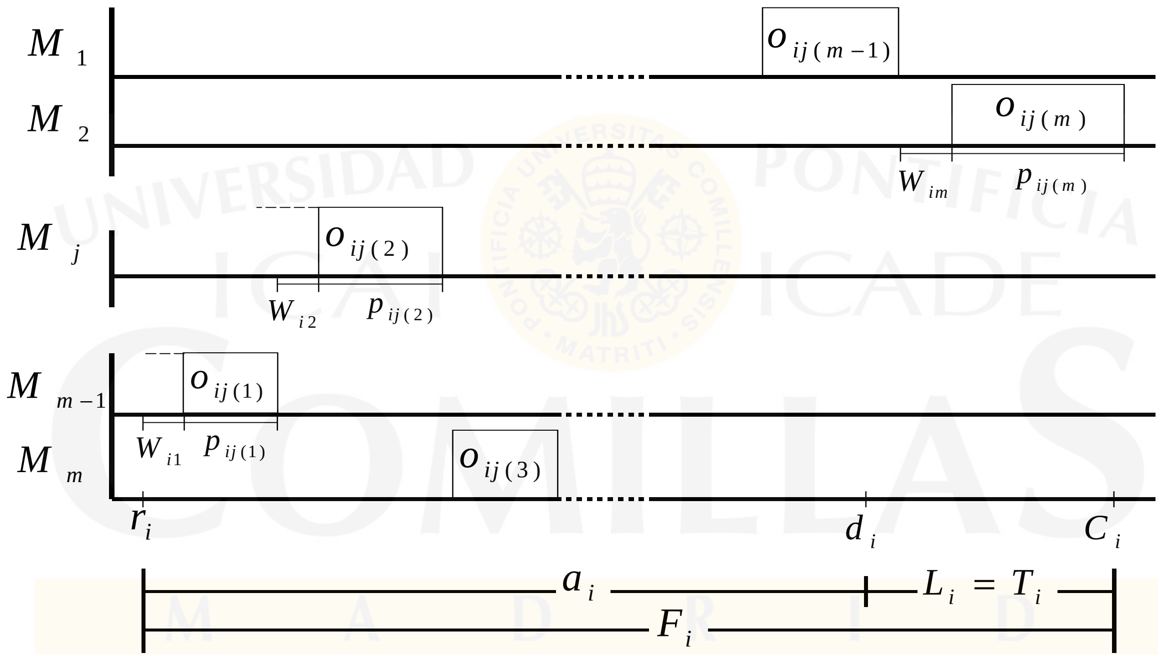
7. Sólo hay una máquina de cada tipo.
8. Las máquinas pueden estar inactivas.
9. Las máquinas no pueden procesar más de una operación a la vez.
10. Las máquinas están disponibles todo el periodo de planificación.
11. Las restricciones tecnológicas son conocidas e inmutables.
12. No existe aleatoriedad: conocidos y fijos todos los datos (número de trabajos, número de máquinas, tiempos de proceso).

# Medidas de desarrollo

- $W_{ik}$ tiempo de espera del trabajo $J_i$ antes de realizarse su $k$-ésima operación (no necesariamente en máquina $k$)
- $W_i$ tiempo total de espera del trabajo $J_i$: $W_i = \sum_{k=1}^{m} W_{ik}$
- $C_i$ instante de cumplimentación o suministro de $J_i$: $C_i = r_i + \sum_{k=1}^{m} (W_{ik} + p_{ij(k)})$. $p_{ij(k)}$ es tiempo de proceso de $k$-ésima operación del trabajo $J_i$ que se realiza en máquina $j$
- $F_i$ tiempo de proceso o de cumplimentación (*flow time*) de $J_i$ : $F_i = C_i - r_i$
- $L_i$ desviación de $J_i$ respecto a su *due date*: $L_i = C_i - d_i$. Puede ser + o –
- $T_i$ demora en la entrega del trabajo $J_i$: $T_i = \max\{L_i, 0\}$
- $E_i$ adelanto en la entrega del trabajo $J_i$: $E_i = \max\{-L_i, 0\}$
- $I_j$ tiempo inactivo (*idle*) de la máquina $M_j$: $I_j = C_{\max} - \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ .

Notación: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ media, $X_{\max} = \max\{X_1, ..., X_n\}$ máximo.

# Ejemplo


$M_1$
$M_2$
$M_j$
$M_{m-1}$
$M_m$
$o_{ij(m-1)}$
$o_{ij(m)}$
$W_{im}$
$p_{ij(m)}$
$o_{ij(2)}$
$W_{i2}$
$p_{ij(2)}$
$o_{ij(1)}$
$W_{i1}$
$p_{ij(1)}$
$o_{ij(3)}$
$r_i$
$d_i$
$C_i$
$a_i$
$L_i = T_i$
$F_i$

# Criterios (i)

*Criterios basados en los instantes de finalización*

- $F_{\max}$: tiempo máximo de proceso $\overline{F}$: tiempo medio de proceso
- $C_{\max}$: (*make-span*) tiempo máximo de cumplimentación o tiempo total de producción
- $\overline{C}$: tiempo medio de cumplimentación (minimizar $\overline{F}$ equivalente a minimizar $\overline{C}$)

Pueden ponderarse estas medidas en función de importancia de artículos.

*Criterios basados en los plazos de entrega (due dates)*

- $\overline{L}$: media de desviaciones (positivas y negativas) $L_{\max}$: máxima desviación
- $\overline{T}$: media de retrasos $T_{max}$: máximo retraso
- Minimizar *número de trabajos fuera de plazo* (aterrizaje de aviones)

# Criterios (ii)

*Criterios basados en el nivel de inventario y el coste de utilización*

- $N_W(t)$ número de trabajos en espera en instante $t$, $\bar{N}_W(t) = \frac{1}{C_{\max}} \int_0^{C_{\max}} N_W(t)\, dt$
- $N_U(t)$ número de trabajos en curso en instante $t$, $\bar{N}_U(t) = \frac{1}{C_{\max}} \int_0^{C_{\max}} N_U(t)\, dt$
- Minimizar número medio trabajos acabados (reduce coste inventario productos acabados)
- Maximizar número medio de trabajos que realmente están siendo procesados (uso de las máquinas)
- Minimizar la media o el máximo tiempo inactivo de las máquinas

# Relaciones entre las medidas de desarrollo (i)

a) **Equivalentes (**dan la misma solución**)** $\overline{C}$, $\overline{F}$, $\overline{W}$ y $\overline{L}$

b) **No equivalentes** las medidas análogas a las anteriores pero para su valor máximo, excepto:

b.1) Si *release dates*=0 para todos los trabajos, equivalentes $C_{\max}$ y $F_{\max}$.

b.2) Si *due dates* mismas para todos los trabajos, equivalentes $C_{\max}$ y $L_{\max}$.

c) Si óptima para $L_{\max}$ entonces también para $T_{\max}$, al revés no siempre.

d) **Equivalentes** $C_{\max}$, $\overline{N}_p$ (número medio de trabajos siendo realmente procesados) e $\overline{I}$ (desocupación media de las máquinas $\overline{I} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} I_j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(C_{\max} - \sum_{i=1}^{n} p_{ij})$).

# Relaciones entre las medidas de desarrollo (ii)

e) **Equivalentes** $\bar{N}_U$ y $\bar{C}/C_{\max}$.

f) **Equivalentes** $\bar{N}_W$ y $\bar{W}/C_{\max}$.

g) En <u>una sola máquina</u> **equivalentes** $\bar{C}$, $\bar{F}$, $\bar{W}$, $\bar{L}$, $\bar{N}_U$ y $\bar{N}_W$.

# Secuenciación en una máquina (i)

**Hipótesis**:

- Instantes de comienzo $r_i = 0 \quad \forall i$ y $m = 1$.

**Resultados**:

- Para todo objetivo regular (no decreciente con los instantes de cumplimentación), existe una planificación *óptima* en la que la *máquina no está inactiva*
- *Permitir la interrupción no puede mejorar* ninguna planificación.
  - La solución es una *programación permutación.* ($C_{\max} = F_{\max}$ son los mismos)

# Secuenciación en una máquina (ii)

**Posibles permutaciones** que optimizan algún criterio

a) *Minimización del tiempo medio de proceso,* $\overline{F}$ $(\overline{C}, \overline{W}, \overline{L}, \overline{N}_U, \overline{N}_W)$

*Programación según tiempo de proceso creciente*

b) *Minimización de máxima desviación respecto a fechas de entrega,* $L_{\max}$ $(T_{\max})$
*Programación de fecha de entrega creciente*

c) *Minimización de número de trabajos demorados*: **algoritmo de Moore y Hodgson**

1. Obtener programación de fecha de entrega creciente
2. Encontrar primer trabajo demorado en secuencia actual $J_{i(l)}$. Si no, ir a 4.
3. Encontrar trabajo mayor tiempo proceso delante de $J_{i(l)}$, incluido $J_{i(l)}$, y rechazarlo. Ir a 2.
4. Secuencia óptima: actual y añadir al final trabajos rechazados sin orden. Esos trabajos rechazados serán los únicos demorados.

# Secuenciación en una máquina (iii)

- *Condiciones precedencia* entre trabajos: Evitar reformulando fechas entrega. Si no es posible: utilizar algoritmos específicos.
- **Problema de cadenas productos**: $K$ cadenas de $n_1,\ldots,n_K$ trabajos: con orden y proceso seguido $\rightarrow$ ¿Cómo secuenciar las cadenas?

  $p_{ij}$: tiempo $j$-ésimo trabajo de la cadena $i$-ésima $\rightarrow$ $p'_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij}$ tiempo cadena.

  Secuencia óptima para *minimizar el tiempo medio de proceso*:

  Ordenar por tiempo medio de proceso creciente: $\dfrac{p'_{i(1)}}{n_{i(1)}} \leq \dfrac{p'_{i(2)}}{n_{i(2)}} \leq \cdots \leq \dfrac{p'_{i(K)}}{n_{i(K)}}$.

# Secuenciación en una máquina. Programación dinámica (i)

- **Otros métodos**: programación entera, dinámica, etc.

  Ejemplo: programar 4 trabajos para minimizar retraso medio $\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\max\{C_i - d_i, 0\}$ resuelto por programación dinámica

| Trabajos | $J_1$ | $J_2$ | $J_3$ | $J_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Tiempos proceso | 8 | 6 | 10 | 7 |
| Fecha entrega | 14 | 9 | 16 | 16 |

Etapas: orden secuencia. Decisiones: qué trabajo programar.

Estados: trabajos ya programados. Objetivo: $\sum_{i=1}^{4}\max\{C_i - d_i, 0\}$

# Secuenciación en una máquina. Programación dinámica (ii)

Etapa 4

| Decisiones / Estados | $J_1^4$ | $J_2^4$ | $J_3^4$ | $J_4^4$ | Óptimo | Objetivo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_1, J_2, J_3$ | – | – | – | 31–16 | $J_4^4$ | 15 |
| $J_1, J_2, J_4$ | – | – | 31–16 | – | $J_3^4$ | 15 |
| $J_1, J_3, J_4$ | – | 31–9 | – | – | $J_2^4$ | 22 |
| $J_2, J_3, J_4$ | 31–14 | – | – | – | $J_1^4$ | 17 |

Etapa 3

| Decisiones / Estados | $J_1^3$ | $J_2^3$ | $J_3^3$ | $J_4^3$ | Óptimo | Objetivo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_1, J_2$ | – | – | 24–16+15 | 21–16+15 | $J_4^3$ | 20 |
| $J_1, J_3$ | – | 24–9+15 | – | 25–16+22 | $J_2^3$ | 30 |
| $J_1, J_4$ | – | 21–9+15 | 25–16+22 | – | $J_2^3$ | 27 |
| $J_2, J_3$ | 24–14+15 | – | – | 23–16+17 | $J_4^3$ | 24 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_2, J_4$ | 21–14+15 | – | 23–16+17 | – | $J_1^3$ | 22 |
| $J_3, J_4$ | 25–14+22 | 23–9+17 | – | – | $J_2^3$ | 31 |

# Secuenciación en una máquina. Programación dinámica (iii)

Etapa 2

| Decisiones / Estados | $J_1^2$ | $J_2^2$ | $J_3^2$ | $J_4^2$ | Óptimo | Objetivo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $J_1$ | – | 14–9+20 | 18–16+30 | 0+27 | $J_2^2$ | 25 |
| $J_2$ | 14–14+20 | – | 16–16+24 | 0+22 | $J_1^2$ | 20 |
| $J_3$ | 18–14+30 | 16–9+24 | – | 17–16+31 | $J_2^2$ | 31 |
| $J_4$ | 15–14+27 | 13–9+22 | 17–16+31 | – | $J_2^2$ | 26 |

Etapa 1

| Decisiones | $J_1^1$ | $J_2^1$ | $J_3^1$ | $J_4^1$ | Óptimo | Objetivo |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0+25 | 0+20 | 0+31 | 0+26 | $J_2^1$ | 20 |

La secuencia óptima es $(J_2^1, J_1^2, J_4^3, J_3^4)$, con un retraso medio de 20/4=5 unidades de tiempo.

# Secuenciación en varias máquinas (i)

**Hipótesis**:

- Instantes de comienzo $r_i = 0,\ i = 1,\ldots,n$.

- *Flow-shop* 2 máquinas y minimizar máximo tiempo de cumplimentación $C_{\max}$:
  $n$ trabajos, 2 máquinas, todos por máquina 1 y luego por la 2 en el mismo orden.

  Óptimo: *buscar entre programaciones permutación*.

# Secuenciación en varias máquinas. Algoritmo de Johnson (i)

$a_i = p_{i1}$: tiempo proceso $J_i$ en máquina 1. $b_i = p_{i2}$: tiempo proceso $J_i$ en máquina 2

1. $k = 1$ y $l = n$.
2. Lista actual trabajos no programados = $\{J_1, J_2, ..., J_n\}$
3. Encontrar mínimo de los $a_i$ y $b_i$ de trabajos no programados.
4. Si mínimo es un $a_i$:
   4.1. Programar $J_i$ en $k$-ésima posición, borrar $J_i$ lista trabajos no programados
   4.2. $k \leftarrow k+1$. Ir a 6
5. Si mínimo es un $b_i$:
   5.1. Programar $J_i$ en $l$-ésima posición, borrar $J_i$ lista trabajos no programados
   5.2. $l \leftarrow l-1$. Ir a 6
6. Si hay trabajos sin programar ir a 3. En otro caso, parar.

# Secuenciación en varias máquinas. Algoritmo de Johnson (ii)

- **Extensión**: *minimizar tiempo máximo cumplimentación* con 4 tipos de trabajos
  tipo A: sólo por la máquina $M_1$
  tipo B: sólo por la máquina $M_2$
  tipo C: primero máquina $M_1$ y luego $M_2$
  tipo D: primero máquina $M_2$ y luego $M_1$

1. Secuenciar tipo A cualquier orden $\rightarrow S_A$
2. Secuenciar tipo B cualquier orden $\rightarrow S_B$
3. Secuenciar tipo C **algoritmo de Johnson** $\rightarrow S_C$
4. Secuenciar tipo D **algoritmo de Johnson** (cambiar máquinas) $\rightarrow S_D$

Programación óptima:

| Máquina | Orden |
|---|---|
| $M_1$ | $(S_C, S_A, S_D)$ |
| $M_2$ | $(S_D, S_B, S_C)$ |

# Secuenciación en varias máquinas. Optimización lineal entera (i)

2 trabajos, 3 máquinas.

Objetivo: *minimizar máxima demora*.

| | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | *Due dates* | Orden |
|---|---|---|---|---|---|
| $J_1$ | 10 | 15 | 18 | 50 | $M_1$ $M_2$ $M_3$ |
| $J_2$ | 20 | 12 | 15 | 55 | $M_3$ $M_2$ $M_1$ |

- Variables decisión: $T_{ij} \to$ instante iniciar operación trabajo $J_i$ en máquina $M_j$
- Restricciones tecnológicas: Si $J_i$ va a antes en máquina $M_j$ que en $M_{j'}$, $T_{ij} + p_{ij} \le T_{ij'}$:

$$T_{11} + 10 \le T_{12} \quad T_{12} + 15 \le T_{13}$$
$$T_{23} + 15 \le T_{22} \quad T_{22} + 12 \le T_{21}$$

# Secuenciación en varias máquinas. Optimización lineal entera (ii)

- No simultaneidad en una máquina: $J_i$, $J_k$ y $M_j$, $T_{ij} + p_{ij} \le T_{kj}$ o $T_{kj} + p_{kj} \le T_{ij}$.

  Equivale $\begin{matrix} T_{kj} + p_{kj} - T_{ij} \le M(1-\delta_{ikj}) \\ T_{ij} + p_{ij} - T_{kj} \le M\delta_{ikj} \end{matrix}$,

  $$\delta_{ikj} = \begin{cases} 1 & \text{si } J_i \text{ se procesa después de } J_k \text{ en la máquina } M_j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}:$$

| $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|---|---|
| $T_{11} + 10 - T_{21} \le M(1-\delta_{211})$ | $T_{12} + 15 - T_{22} \le M(1-\delta_{212})$ | $T_{13} + 18 - T_{23} \le M(1-\delta_{213})$ |
| $T_{21} + 20 - T_{11} \le M\delta_{211}$ | $T_{22} + 12 - T_{12} \le M\delta_{212}$ | $T_{23} + 15 - T_{13} \le M\delta_{213}$ |

# Secuenciación en varias máquinas. Optimización lineal entera (iii)

- Objetivo: minimizar la máxima demora.
  Variables demora trabajo $T_i$, $m(i)$ última operación trabajo $J_i$, entonces $T_{im(i)} + p_{im(i)} - T_i \le d_i$ y $T_i \le T_{\max}$:

$$\begin{aligned}
&\min T_{\max} \\
&T_1 \le T_{\max} \\
&T_2 \le T_{\max} \\
&T_{13} + 18 - T_1 \le 50 \\
&T_{21} + 20 - T_2 \le 55
\end{aligned}$$

- Carácter de las variables: $T_{ij} \ge 0, \quad T_i \ge 0, \quad \delta_{ikj} \in \{0,1\}, \quad T_{\max} \ge 0$