

UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS



M A D R I D

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN TECNOLÓGICA (IIT)

Optimización estocástica

Andrés Ramos

Universidad Pontificia Comillas

<http://www.iit.comillas.edu/aramos/>

Andres.Ramos@comillas.edu

Bibliografía

- Alonso-Ayuso, A., E. Cerdá, L. F. Escudero, R. Sala (eds.) (2004) *Optimización bajo incertidumbre* Tirant lo Blanch. Valencia, España.
- **Birge, J.R. and Louveaux, F. (1997) *Introduction to Stochastic Programming*. Springer-Verlag.**
- Ermoliev, Y. and Wets, R.J-B. (eds.) *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*. Springer-Verlag. Berlin, Germany. 1988.
- Kall, P. and Wallace, S.W. (1995) *Stochastic Programming*. John Wiley and Sons. (<http://www.unizh.ch/ior/Pages/Deutsch/Mitglieder/Kall/bib/ka-wal-94.pdf>)
- Infanger, G. *Planning Under Uncertainty: Solving Large-Scale Stochastic Linear Programs* Boyd & Fraser. 1994.
- Mayer, J. (1998) *Stochastic Linear Programming Algorithms. A Comparison Based on a Model Management System*. Gordon and Breach Science Publishers.
- Prekopa, A. (1995) *Stochastic Programming* Kluwer Academic Publishers.
- **Ramos, A., A. Alonso-Ayuso, G. Pérez (eds.) (2008) *Optimización bajo Incertidumbre* Universidad Pontificia Comillas. Madrid, España**
- Ruszczyński, A. and Shapiro, A. (eds.) (2003) *Stochastic Programming* Elsevier.

Otros recursos

- Stochastic Programming Community Home Page. Stochastic Programming Resources (www, papers, tutorials, lecture notes, books) (<http://stoprog.org/>)
- Stochastic Programming Bibliography (<http://www.eco.rug.nl/mally/spbib.html>)
- Books on Stochastic Programming (<http://stoprog.org/index.html?booksSP.html>)
- STOCHASTIC PROGRAMMING E-PRINT SERIES (<http://www.speps.org/>)
- Optimization Online. Stochastic Programming submissions (http://www.optimization-online.org/ARCHIVE_CAT/STOCH/index.html)
- Red Temática de Optimización bajo Incertidumbre (ReTOBI) (<http://www.optimizacionbajoincertidumbre.org/>)
- International Conference in Stochastic Programming

Índice

- **Planteamiento general**
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Optimización determinista vs. estocástica

- **Determinista**
 - Parámetros conocidos con certidumbre (puede ser el valor medio)
- **Estocástica**
 - Parámetros modelados como variables aleatorias con distribuciones conocidas
 - Histórica
 - Discreta
 - Continua \Rightarrow simulación

Alternativas de modelado de la incertidumbre

(i)

- **Espera y observa** o **análisis de escenarios** o **qué pasaría si** (*wait and see* o *scenario analysis* o *what-if analysis* o *sensitivity analysis*)
 - Las decisiones se toman una vez resuelta la aleatoriedad
 - El problema se resuelve independientemente para cada escenario
 - El escenario de valor medio es simplemente un caso especial
 - A priori, las decisiones serán diferentes para cada escenario (**anticipativas**, **clarividentes**, **no implantables**)
 - La solución de un escenario puede ser infactible en otros

M A D R I D

Alternativas de modelado de la incertidumbre

(ii)

- **Criterios heurísticos**

- **Decisiones robustas** aquéllas que aparecen en muchos escenarios deterministas (para muchos escenarios). Minimizar el máximo arrepentimiento de la f.o. óptima bajo información perfecta de todos los escenarios futuros
- **Decisiones flexibles** aquéllas que pueden cambiarse a lo largo del tiempo cuando se empieza a resolver la incertidumbre, si arrepentimiento en los primeros periodos

M A D R I D

Alternativas de modelado de la incertidumbre

(iii)

- **Aquí y ahora**
 - Deben tomarse las decisiones **antes de resolver la incertidumbre**
 - **Decisiones implantables o no anticipativas** (sólo se puede utilizar la información conocida hasta ese momento)
 - Las únicas **decisiones relevantes** son las de la **primera etapa**, dado que son las únicas que se toman inmediatamente
 - Solución estocástica **tiene en cuenta la distribución de estocasticidad**
 - Permite incluir actitudes **aversas al riesgo**, penalizando los casos peores
 - **OPTIMIZACIÓN ESTOCÁSTICA**

Ejemplo: modelo de coordinación hidrotérmica

- Análisis de escenarios
 - Ejecuta el modelo suponiendo que las aportaciones serán las mismas que **cualquiera de las aportaciones históricas previas** (i.e., año 1989 o 1974, etc.) para el alcance del modelo
 - Ejecuta el modelo suponiendo que las aportaciones serán las mismas que **la media de los valores históricos** (i.e., año medio) para el alcance del modelo
- Optimización estocástica
 - Ejecuta el modelo teniendo en cuenta que la **distribución de las aportaciones** será la misma que ha sido en el **pasado**

Ejemplo: Planificación de la expansión de la generación

- Alcance dividido en **tres periodos**
- **3 escenarios de demanda estocástica** con cambio sólo **en el primer periodo**
- Se dispone de varios tipos de generadores
- **Decisión de expansión** debe ser **única** para todos los escenarios
- **Restricciones**
 - Límite en el presupuesto disponible
 - Potencia mínima a instalar
 - Balance generación-demanda para cada escenario
 - Potencia generada menor que la instalada
- **Variables**
 - Potencia generada
 - Plan de expansión

Modelo de planificación de la expansión de la generación (i)

```
$TITLE Modelo de planificación de la expansión de la generación
```

SETS

```
I generadores / gen-1 * gen-4 /  
J periodos / per-1 * per-3 /  
S escenarios de demanda / s-1 * s-3 /
```

PARAMETERS

```
F(i) coste fijo de inversión [€]  
/ gen-1 10  
gen-2 7  
gen-3 16  
gen-4 6 /  
PROB(s) probabilidad del escenario [p.u.]  
/ s-1 0.2  
s-2 0.5  
s-3 0.3 /  
DEM(j) escenario de carga [MW]
```

Modelo de planificación de la expansión de la generación (ii)

TABLE $v(i,j)$ coste variable de operación [€ por MW]

	per-1	per-2	per-3
gen-1	40	24	4
gen-2	45	27	4.5
gen-3	32	19.2	3.2
gen-4	55	33	5.5

TABLE DEMS(s,j) demanda estocástica [MW]

	per-1	per-2	per-3
s-1	3	3	2
s-2	5	3	2
s-3	7	3	2

SCALARS

POTMIN	potencia mínima a instalar [MW]	/	12	/	
PRSPTO	límite presupuestario	[€]	/	120	/

Modelo de planificación de la expansión de la generación (iii)

VARIABLES

$X(i)$ potencia instalada [MW]
 $Y(j, i)$ potencia producida [MW]
 $YS(s, j, i)$ potencia producida estocástica [MW]
COSTE coste total [€]

POSITIVE VARIABLES X, Y, YS

EQUATIONS

COST coste total [€]
COSTS coste total estocástico [€]
PRESUP límite presupuestario [€]
INSMIN potencia mínima a instalar [MW]
BALPOT potencia producida < instalada [MW]
BALPOTS potencia producida < instalada estocástica [MW]
BALDEM balance de demanda [MW]
BALDEMS balance de demanda estocástica [MW] ;

Modelo de planificación de la expansión de la generación (iv)

```

COST .. COSTE =E= SUM(i, F(i) * X(i))
          + SUM((j,i), v(i,j) * Y ( j,i)) ;
COSTS .. COSTE =E= SUM(i, F(i) * X(i))
          + SUM((s,j,i), PROB(s) * v(i,j) * YS(s,j,i)) ;

PRESUP .. SUM(i, F(i) * X(i)) =L= PRSPTO ;

INSMIN .. SUM(i, X(i)) =G= POTMIN ;

BALPOT ( j,i) .. Y ( j,i) =L= X(i) ;
BALPOTS(s,j,i) .. YS(s,j,i) =L= X(i) ;

BALDEM ( j) .. SUM(i, Y ( j,i)) =G= DEM( j) ;
BALDEMS(s,j) .. SUM(i, YS(s,j,i)) =G= DEMS(s,j) ;

```

Modelo de planificación de la expansión de la generación (v)

```
MODEL DETERM / COST, INSMIN, PRESUP, BALPOT, BALDEM / ;  
MODEL ESTOCA / COSTS, INSMIN, PRESUP, BALPOTS, BALDEMS / ;
```

** Cada escenario determinista*

```
LOOP (s,  
      DEM(j) = DEMS(s,j) ;  
      SOLVE DETERM MINIMIZING COSTE USING LP ;  
);
```

** Escenario de demanda media*

```
DEM(j) = SUM(s, PROB(s) * DEMS(s,j)) ;  
SOLVE DETERM MINIMIZING COSTE USING LP ;
```

** Problema estocástico*

```
SOLVE ESTOCA MINIMIZING COSTE USING LP ;
```

Análisis de los planes de expansión

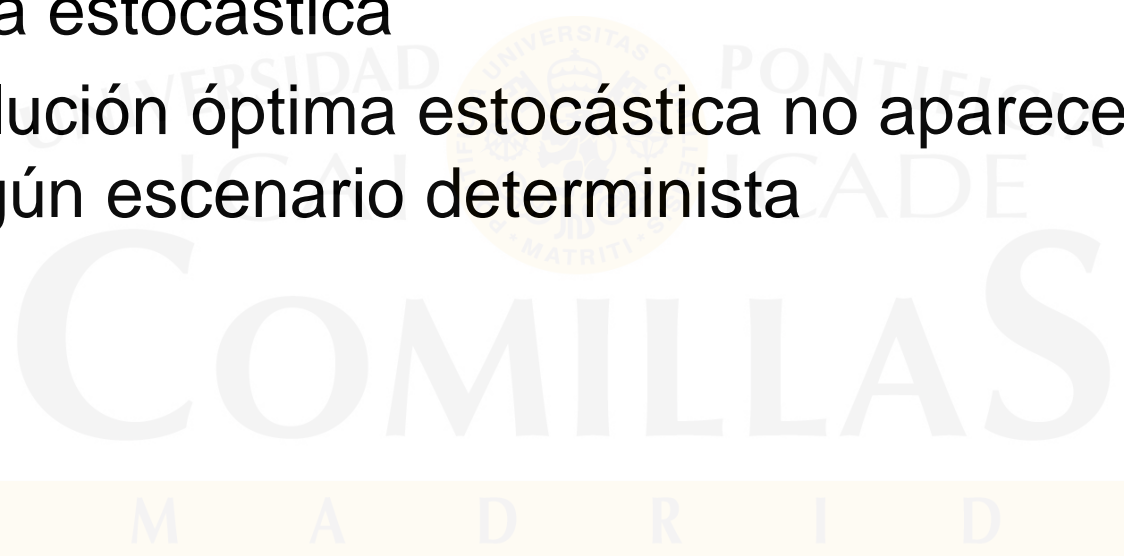
- Potencia instalada de cada generador [MW]
- Coste total [€]

	Det 1	Det 2	Det 3	Medio	Estocást
Gen 1	.	0.33	3.67	0.67	0.67
Gen 2	2
Gen 3	3	4.67	3.33	4.53	4.33
Gen 4	9	7	5	6.8	5

Coste total	262	346.67	437.33	355.73	362.47
--------------------	------------	---------------	---------------	---------------	---------------

Principales conclusiones del problema estocástico de expansión de la generación

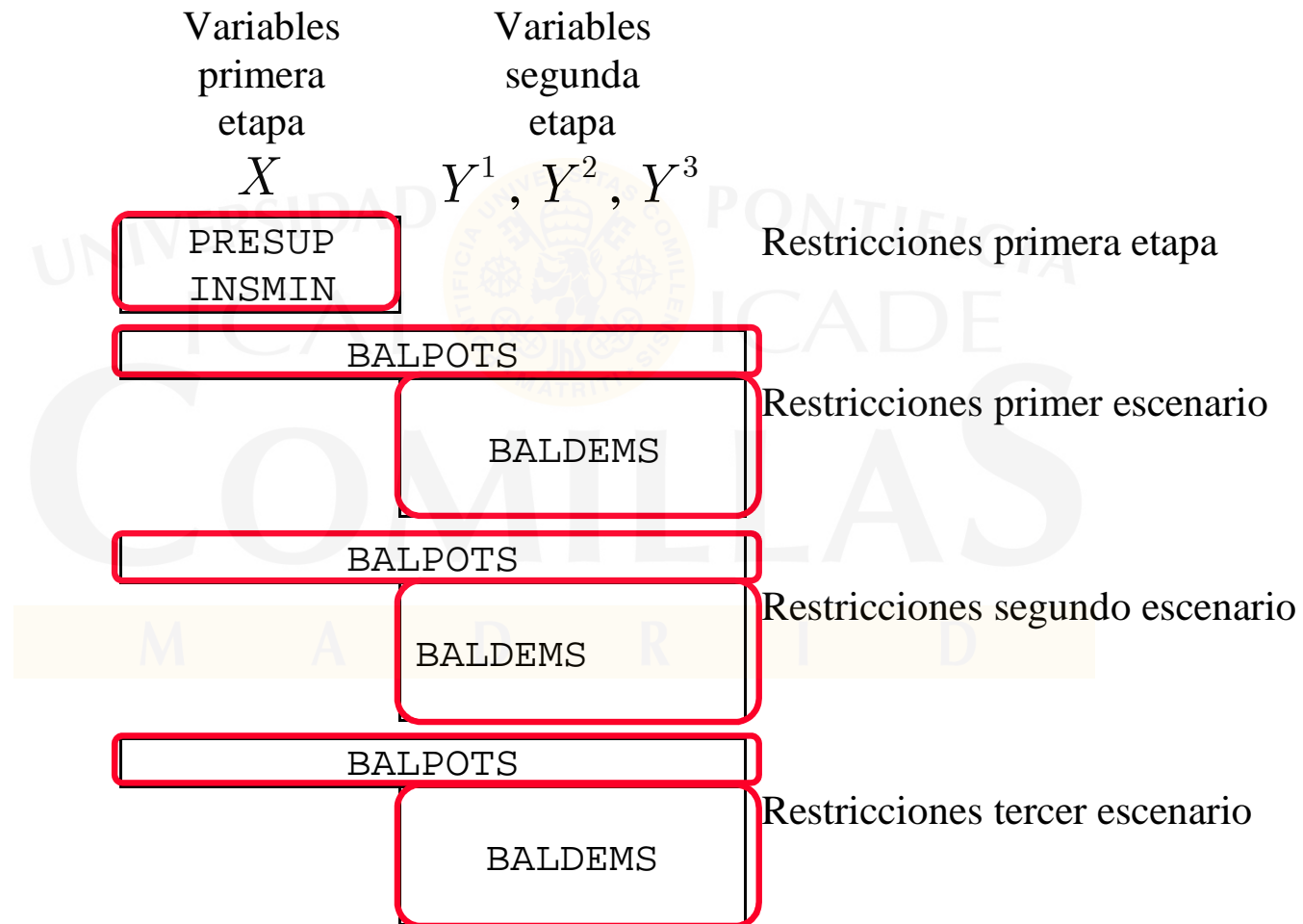
- Las decisiones deterministas (con información perfecta) no aparecen necesariamente en la solución óptima estocástica
- La solución óptima estocástica no aparece típicamente en algún escenario determinista



Medidas estocásticas

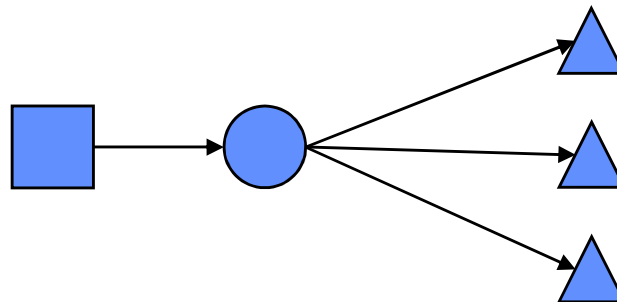
- Valor esperado con información perfecta *Expected value with perfect information* (EVWPI) o *Wait and See* (WS)
 - Media ponderada del valor de función objetivo de cada escenario sabiendo que éste va a ocurrir con certidumbre (356.93 para el ejemplo) (siempre menor o igual para minimización que la función objetivo del problema estocástico) (280, 349.33 y 439.33 respectivamente)
- Valor de la solución estocástica *Value of the stochastic solution* (VSS) *Expected Value of Including Uncertainty* (EVIU)
 - Diferencia entre la función objetivo esperada de la solución del valor medio de los parámetros estocásticos **EEV** ($280 \times 0.2 + 347.73 \times 0.5 + 454.73 \times 0.3 = 366.27$) y del problema estocástico **RP** ($366.28 - 362.47 = 3.81$)
- Valor esperado de la información perfecta *Expected value of perfect information* (EVPI) o arrepentimiento medio
 - Media ponderada de la diferencia entre la solución del problema estocástico en cada escenario y la solución con información perfecta en dicho escenario (siempre positivo para minimización) ($280 - 262 = 18$, $349.33 - 346.67 = 2.66$, $439.33 - 437.33 = 2$) ($18 \times 0.2 + 2.66 \times 0.5 + 2 \times 0.3 = 5.54$)
- $EVPI = RP - WS$
- $VSS = EEV - RP$
- $WS \leq RP \leq EEV$ $EVPI \geq 0$ $VSS \geq 0$

Matriz de restricciones del problema



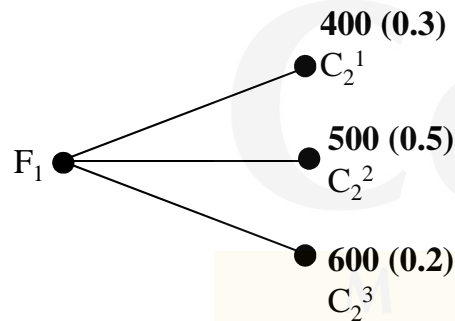
Árbol de decisión

- Representa la secuencia de **aleatoriedad** y **decisiones** que conforman el proceso.
- Elementos del árbol:
 - **Vértice de azar**: puntos de aleatoriedad, se representan mediante un círculo.
 - **Vértice de decisión**: puntos de decisión, se representan mediante un cuadrado.
 - **Vértice inicial o raíz**: raíz del árbol con las decisiones iniciales. Lo primero siempre es tomar una decisión.
 - **Vértice terminal u hoja**: vértices finales, se representan con triángulos.



Ejemplo fabricación: problema estocástico **bietapa**

- Decisión de **fabricación** de una cantidad de un producto a un coste de 2 €/ud para satisfacer una demanda aleatoria. Si no se fabrica lo suficiente se puede **comprar** a un proveedor externo a un precio de 4 €/ud.



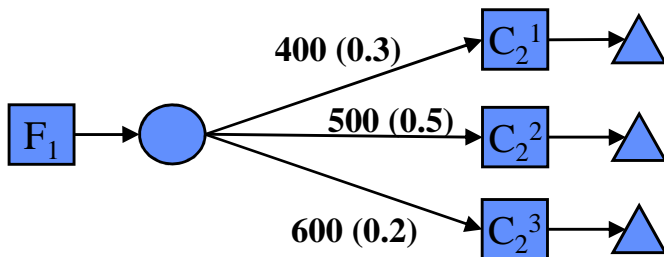
$$\min 2F_1 + 4(0.3C_2^1 + 0.5C_2^2 + 0.2C_2^3)$$

$$F_1 + C_2^1 \geq 400$$

$$F_1 + C_2^2 \geq 500$$

$$F_1 + C_2^3 \geq 600$$

$$F_1, C_2^1, C_2^2, C_2^3 \geq 0$$



$$F_1^* = 500$$

$$C_2^{1*} = 0; C_2^{2*} = 0; C_2^{3*} = 100$$

F_1	C_2^1	C_2^2	C_2^3

Problema estocástico **bi**etapa

1. Se toman **hoy** un conjunto de **decisiones** de la **primera etapa** con valores de los **parámetros conocidos** (deterministas)
2. **Durante la noche** se producen unos **sucesos aleatorios (exógenos)**
3. **Mañana** se toman un conjunto de **acciones correctoras en la segunda etapa** que mitigan (corrigen) los efectos de los sucesos aleatorios sobre las decisiones de hoy. Las decisiones de la segunda etapa son los **recursos**.

Recurso. Función de recursos

- Capacidad de tomar una **acción correctora después de realizarse la incertidumbre** (ocurra un suceso aleatorio)
- **Función de recursos**: función objetivo asociada a las acciones correctoras.
- Depende de las **decisiones previas** y de los **sucesos aleatorios**.
- Si las “etapas” son temporales la función de recursos es la **función de coste futuro**
- Optimización lineal estocástica bietapa: Planificación de la expansión de la generación:
 - Decisiones primera etapa deterministas (inversión)
 - **Recursos**: decisiones segunda etapa estocásticas (operación)

Tipos de recurso

- **Completo**
 - Todas la **decisiones** del primera etapa son **factibles** para cualquier escenario
- **Relativamente completo**
 - Todas la **decisiones factibles** del primera etapa son **factibles** para cualquier escenario factible
- **Parcial**

M A D R I D

Ejemplo fabricación: problema estocástico **bietapa**

$$\min 2F_1 + 4(0.3C_2^1 + 0.5C_2^2 + 0.2C_2^3)$$

$$F_1 + C_2^1 \geq 400$$

$$F_1 + C_2^2 \geq 500$$

$$F_1 + C_2^3 \geq 600$$

$$F_1, C_2^1, C_2^2, C_2^3 \geq 0$$

$$\min 2(F_1^1 + F_1^2 + F_1^3) + 4(0.3C_2^1 + 0.5C_2^2 + 0.2C_2^3)$$

$$F_1^1 = F_1^2$$

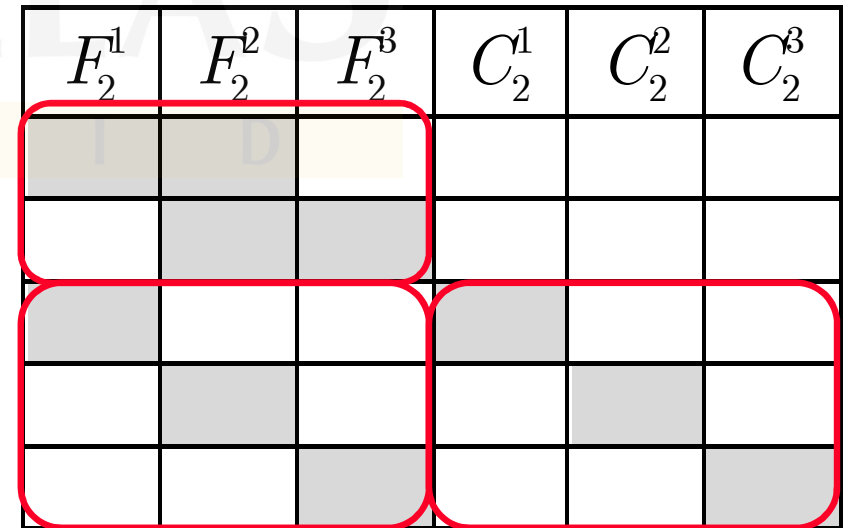
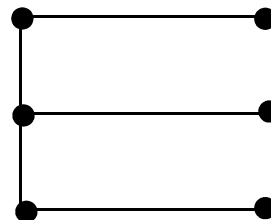
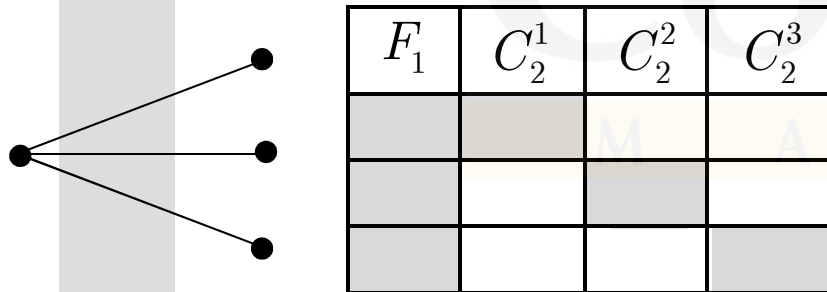
$$F_1^2 = F_1^3$$

$$F_1^1 + C_2^1 \geq 400$$

$$F_1^2 + C_2^2 \geq 500$$

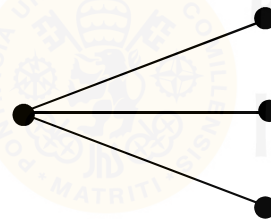
$$F_1^3 + C_2^3 \geq 600$$

$$F_1^1, F_1^2, F_1^3, C_2^1, C_2^2, C_2^3 \geq 0$$

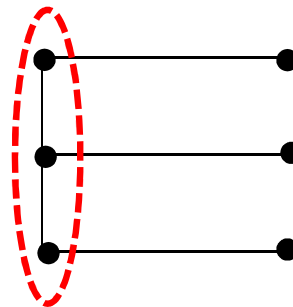


Modelado del árbol

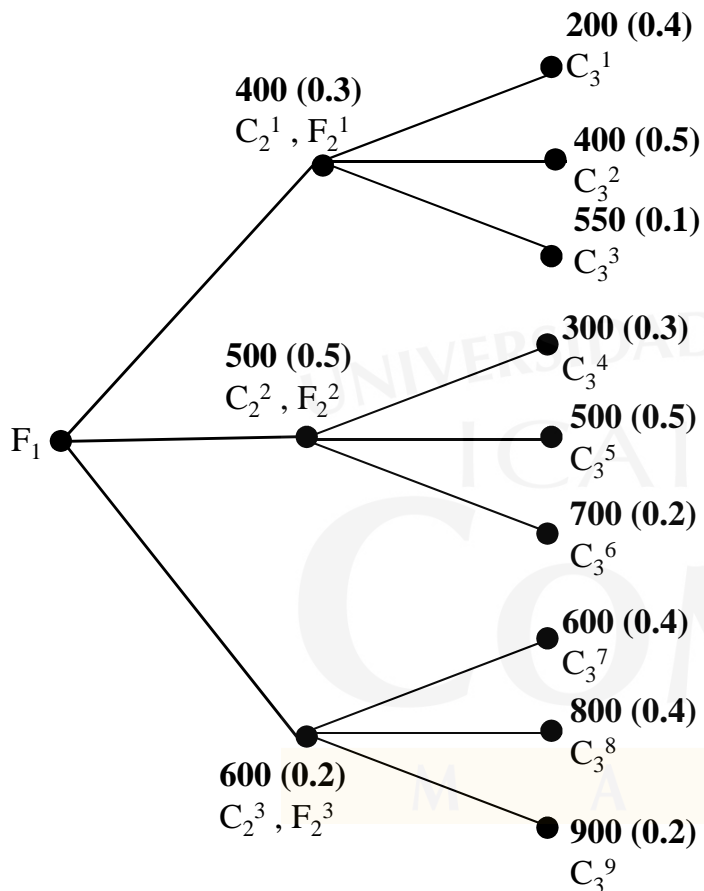
- **Formulación implícita** en la definición de parámetros y variables
 - Técnicas de descomposición (**Benders**, etc.)



- **Formulación explícita** mediante restricciones
 - Descomposición de escenarios (*scenario decomposition*, *splitting variables*, *non anticipativity constraints*) y **relajación lagrangiana**



Ejemplo fabricación: problema estocástico **trietapa**



$$\min 2F_1 + 4(0.3C_2^1 + 0.5C_2^2 + 0.2C_2^3) + 2(0.3F_2^1 + 0.5F_2^2 + 0.2F_2^3) +$$

$$+4(0.12C_3^1 + 0.15C_3^2 + 0.03C_3^3 + 0.15C_3^4 + 0.25C_3^5 +$$

$$+0.1C_3^6 + 0.08C_3^7 + 0.08C_3^8 + 0.04C_3^9)$$

$$F_1 + C_2^1 \geq 400$$

$$F_1 + C_2^2 \geq 500$$

$$F_1 + C_2^3 \geq 600$$

$$F_1 + C_2^1 - 400 + F_2^1 + C_3^1 \geq 200$$

$$F_1 + C_2^1 - 400 + F_2^1 + C_3^2 \geq 400$$

$$F_1 + C_2^1 - 400 + F_2^1 + C_3^3 \geq 550$$

$$F_1 + C_2^2 - 500 + F_2^2 + C_3^4 \geq 300$$

$$F_1 + C_2^2 - 500 + F_2^2 + C_3^5 \geq 500$$

$$F_1 + C_2^2 - 500 + F_2^2 + C_3^6 \geq 700$$

$$F_1 + C_2^3 - 600 + F_2^3 + C_3^7 \geq 600$$

$$F_1 + C_2^3 - 600 + F_2^3 + C_3^8 \geq 800$$

$$F_1 + C_2^3 - 600 + F_2^3 + C_3^9 \geq 900$$

$$F_1, C_2^1, C_2^2, C_2^3, F_2^1, F_2^2, F_2^3, C_3^1, C_3^2, C_3^3, C_3^4, C_3^5, C_3^6, C_3^7, C_3^8, C_3^9 \geq 0$$

$$F_1^* = 600$$

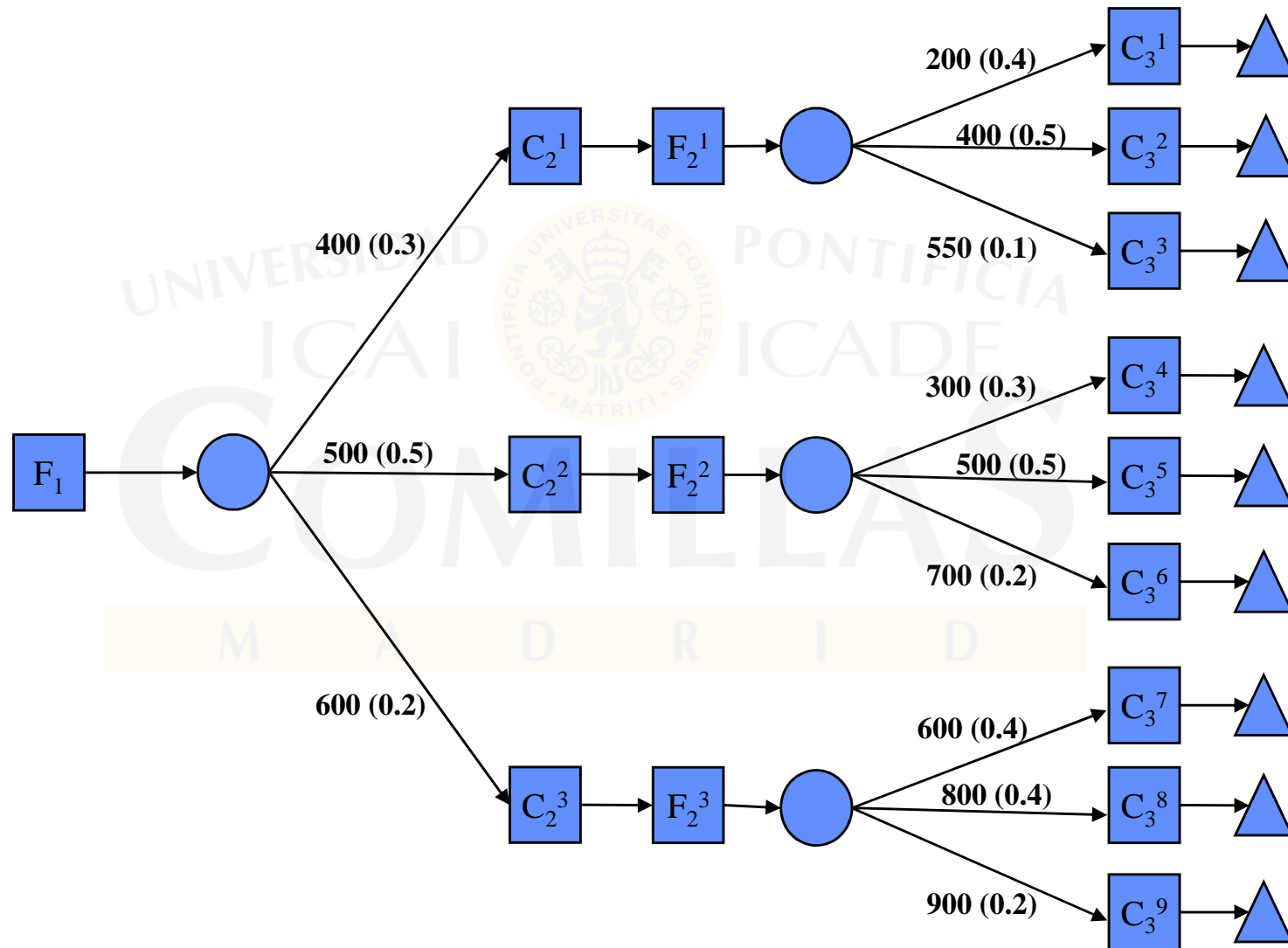
$$C_2^{1*} = C_2^{2*} = C_2^{3*} = 0$$

$$F_2^{1*} = 200; F_2^{2*} = 400; F_2^{3*} = 800$$

$$C_3^{1*} = C_3^{2*} = C_3^{4*} = C_3^{5*} = C_3^{7*} = C_3^{8*} = 0$$

$$C_3^{3*} = 150; C_3^{6*} = 200; C_3^{9*} = 100$$

Ejemplo fabricación: problema estocástico **trietapa**. Árbol de decisión



Árbol de probabilidad o de escenarios

- Representa la evolución en la **resolución de la estocasticidad a lo largo del tiempo**. Diferentes estados de los parámetros aleatorios a lo largo del tiempo.
- **Escenario**: cualquier camino que va de la raíz a las hojas
- Los escenarios que comparten información hasta un cierto momento comparten también las decisiones en el árbol (**decisiones implantables**)
- El árbol de probabilidad representa la **dinámica de los parámetros aleatorios** y la **no anticipatividad de las decisiones** y, por tanto, está implícito en la matriz de restricciones

Ejemplo fabricación: problema estocástico **trietapa**.

Reformulación del problema

$$\begin{aligned} \min & 2F_1 + 4(0.3C_2^1 + 0.5C_2^2 + 0.2C_2^3) + 2(0.3F_2^1 + 0.5F_2^2 + 0.2F_2^3) + \\ & + 4(0.12C_3^1 + 0.15C_3^2 + 0.03C_3^3 + 0.15C_3^4 + 0.25C_3^5 + \\ & + 0.1C_3^6 + 0.08C_3^7 + 0.08C_3^8 + 0.04C_3^9) \end{aligned}$$

$$F_1 + C_2^1 \geq 400$$

$$F_1 + C_2^2 \geq 500$$

$$F_1 + C_2^3 \geq 600$$

$$F_1 + C_2^1 - 400 = E_2^1$$

$$F_1 + C_2^2 - 500 = E_2^2$$

$$F_1 + C_2^3 - 600 = E_2^3$$

$$E_2^1 + F_2^1 + C_3^1 \geq 200$$

$$E_2^1 + F_2^1 + C_3^2 \geq 400$$

$$E_2^1 + F_2^1 + C_3^3 \geq 550$$

$$E_2^2 + F_2^2 + C_3^4 \geq 300$$

$$E_2^2 + F_2^2 + C_3^5 \geq 500$$

$$E_2^2 + F_2^2 + C_3^6 \geq 700$$

$$E_2^3 + F_2^3 + C_3^7 \geq 600$$

$$E_2^3 + F_2^3 + C_3^8 \geq 800$$

$$E_2^3 + F_2^3 + C_3^9 \geq 900$$

$$F_1, C_2^1, C_2^2, C_2^3, F_2^1, F_2^2, F_2^3, E_2^1, E_2^2, E_2^3, C_3^1, C_3^2, C_3^3, C_3^4, C_3^5, C_3^6, C_3^7, C_3^8, C_3^9 \geq 0$$

Se introduce la **variable exceso** al final del periodo 2

Ejemplo fabricación: problema estocástico **trietapa**.

Matriz de restricciones

F_1	C_2^1	C_2^2	C_2^3	E_2^1	F_2^1	E_2^2	F_2^2	E_2^3	F_2^3	C_3^1	C_3^2	C_3^3	C_3^4	C_3^5	C_3^6	C_3^7	C_3^8	C_3^9
█	█																	
		█																
			█															
				█	█													
						█	█											
								█	█									
										█	█							
												█	█					
														█	█			
																█	█	
																	█	█

Escenarios separables

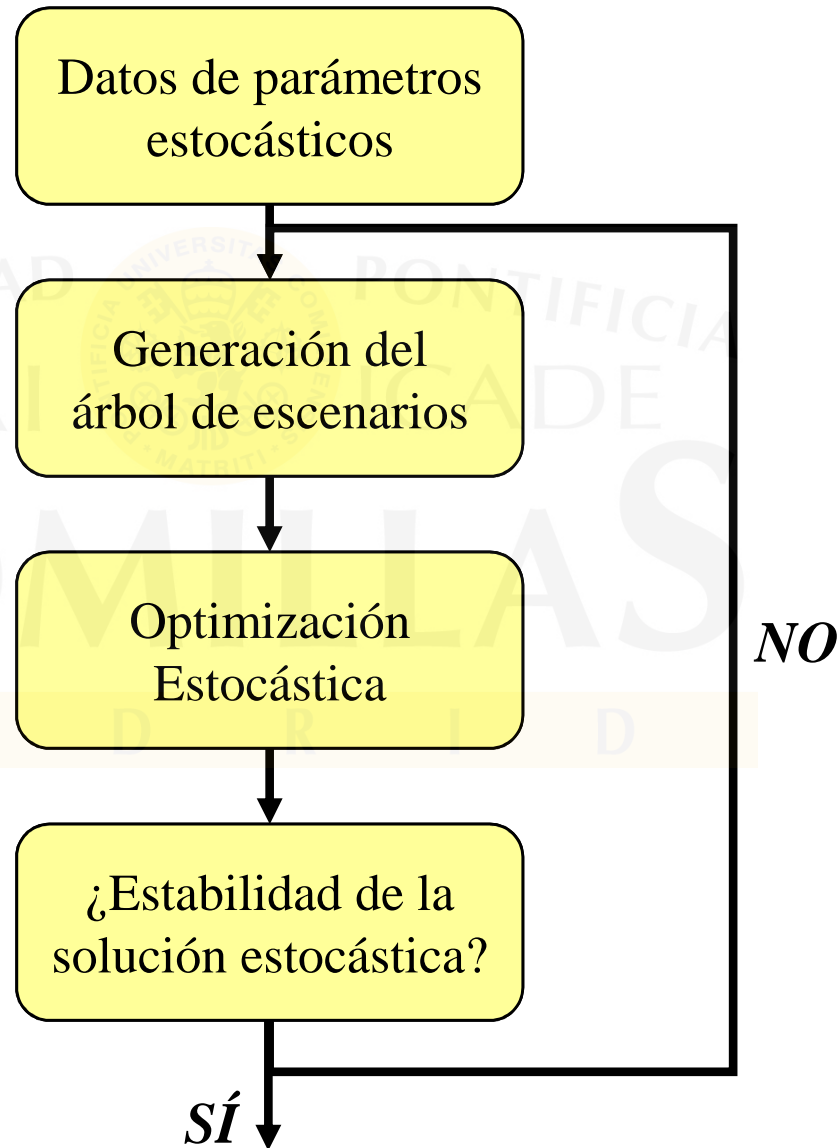
Optimización estocástica multietapa

- Toma decisiones óptimas en diferentes etapas en presencia de incertidumbre con distribución conocida
- **Formulación general** del problema:

$$\min_{x \in X} E_P \{ f(\omega, x) \} = \min_{x \in X} \int_{\Omega} f(\omega, x) \cdot dP(\omega)$$

- Incertidumbre representada habitualmente por un **árbol de escenarios**

Solución de un modelo estocástico



Solución de un modelo estocástico (ii)

- **Estabilidad** de la solución estocástica
 - Las decisiones estocásticas “principales” (i.e., de la primera etapa) deben ser robustas frente al modelado de la incertidumbre (estructura y número de escenarios del árbol)
 - Se debe generar un árbol de escenarios tal que la solución del modelo estocástico sea independiente de éste
 - Analizar las soluciones estocásticas para diferentes árboles

M A D R I D

Combinación habitual optimización-simulación

- Uso del modelo mediante un mecanismo de control de bucle abierto con un horizonte continuo
 1. **Primero** planificación mediante optimización estocástica
 2. **Segundo** simulación de las variables aleatorias mediante simulación
- **Optimización estocástica**
 - **Determina políticas óptimas** teniendo en cuenta la incertidumbre
- **Simulación**
 - **Evalúa posibles escenarios futuros** de incertidumbre dadas las políticas óptima obtenidas previamente

Restricciones probabilistas (*probabilistic or chance constraints*)

- La probabilidad de satisfacer una restricción con parámetros estocásticos es mayor que una cierta probabilidad
- O bien que la probabilidad de satisfacer un conjunto de restricciones con parámetros estocásticos es mayor que una cierta probabilidad
- En el caso de distribuciones discretas se necesita una variable binaria para cada suceso (combinación de valores discretos de los parámetros)

Optimización robusta

- Criterio conservador de protección frente al riesgo (criterio minimax o de Savage)
- Existen escenarios catastróficos o gran no linealidad en la función objetivo
- No se tienen o no se quiere utilizar probabilidades para los escenarios
- Función objetivo:
 - Minimizar el máximo arrepentimiento
 - Minimizar el máximo valor de la función objetivo
- OPTIMIZACIÓN ROBUSTA
 - Solución robusta si es similar a la óptima en todos los escenarios
 - Modelo robusto si es casi factible en todos los escenarios
 - Optimización robusta trata de congeniar ambos objetivos de similitud a optimalidad y a factibilidad

Risk measures

- Among others, convex and coherent risk measures are becoming a powerful tool in financial risk management due to their axiomatic foundation and their favorable computational properties.
- Let assume that the risk can be quantified on the basis of a random variable $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ defined on the probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- For a given scenario, $n \in \Omega$ the realization of the random variable is $X(n)$ that can represent for instance the profit from selling power in the spot market plus the auction revenues.
- A risk measure can be defined as a mapping $\rho : X \mapsto \mathbb{R}$

Coherent risk measures (Lüthi & Döege, 2005)

- $\rho : X \mapsto \mathbb{R}$ is a “convex risk measure” if it satisfies:

$$\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$$

$$\lambda \in [0, 1], \forall X, Y \in \mathcal{X}$$

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$$

$$X(n) \leq Y(n) \forall n \in \Omega$$

$$\rho(X + a) = -a + \rho(X)$$

a constant

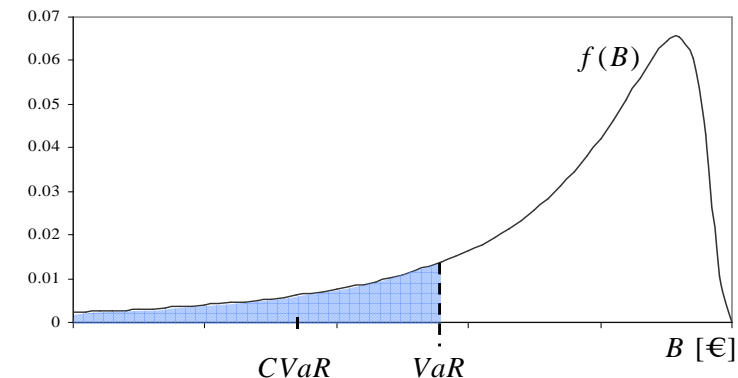
- If it satisfies also the following, it is called “coherent risk measure”

$$\text{if } \lambda \geq 0 \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$$

- We will restrict our attention to the CVaR.

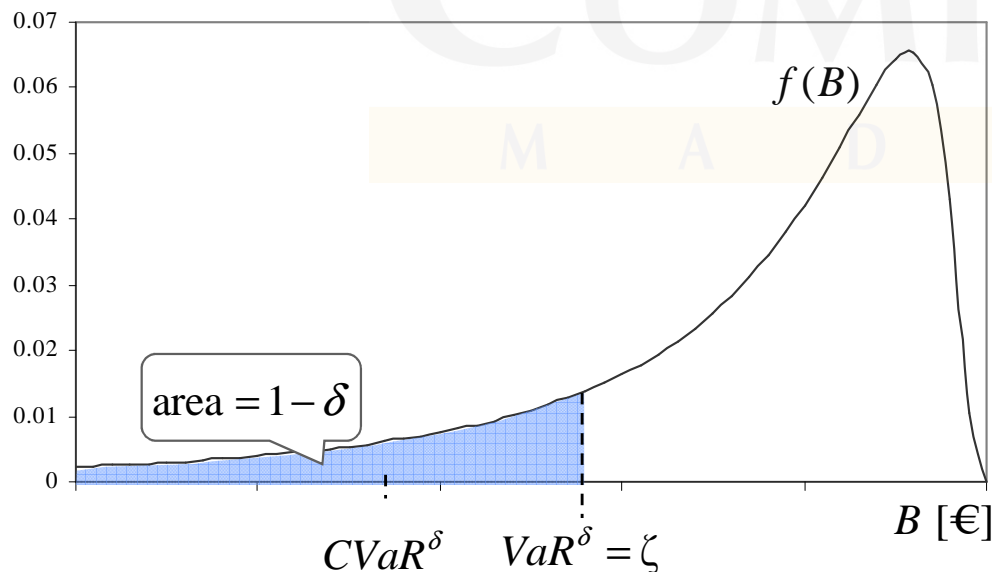
$$(-X - \eta)_+ = \max\{0, (-X - \eta)\}$$

$$CVaR_\beta(X) = \inf_\eta \left[\eta + \frac{1}{\beta} \mathbf{E}_P[(-X - \eta)_+] \right]$$



Gestión de riesgo: CVaR

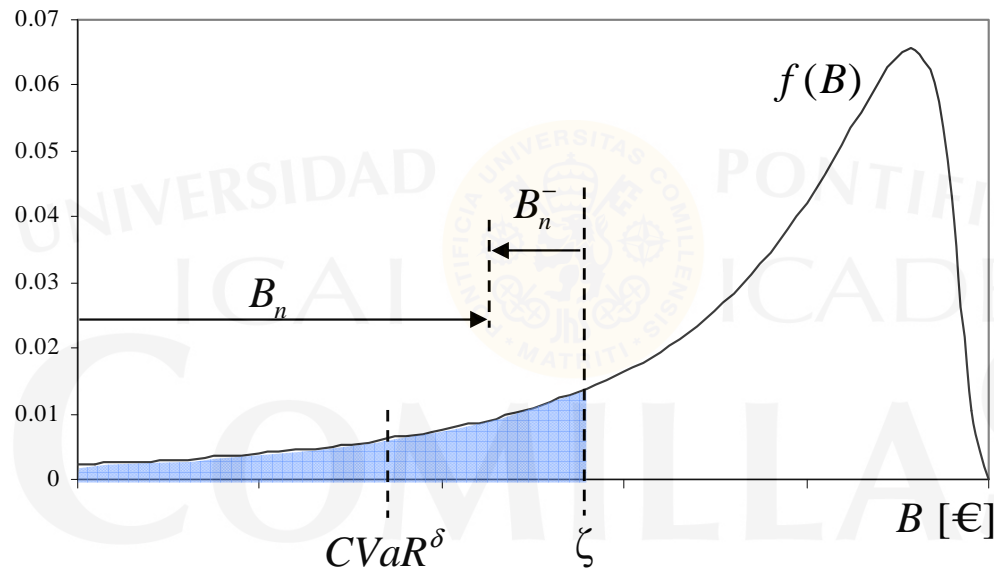
- El CVaR (Conditional Value at Risk) fue introducido en el sector financiero por Rockafellar y Uryasev en 1999, y se ha aplicado posteriormente a los mercados energéticos (Unger, 02), (Cabero et. al, 05), etc.
- Normalmente, se utiliza en términos de pérdidas. En este caso, se utiliza en términos de beneficios (se maximiza)
- Suponiendo que ξ representa el VaR (Value at Risk), el CVaR se define como: $CVaR^\delta(B) = E(B | B < \zeta)$



$$CVaR^\delta(B) = \frac{\sum_{n \in N | B_n < \zeta} \rho_n \cdot B_n}{\sum_{n \in N | B_n < \zeta} \rho_n} = \frac{\sum_{n \in N | B_n < \zeta} \rho_n \cdot B_n}{1 - \delta}$$

Formulación LP

- Restricciones de gestión de riesgo



Para el caso discreto, puede formularse linealmente como:

$$\zeta - \frac{\sum_{n \in N} \rho_n \cdot B_n^-}{1 - \delta} \geq CVaR_{\min}$$

$$B_n^- \geq \zeta - B_n, \forall n$$

$$B_n^- \geq 0, \forall n$$

Penalización de las violaciones

- Se introducen variables de holgura en las restricciones estocásticas y éstas se penalizan en la función objetivo



Aplicaciones: Asignación óptima de recursos

- En sistemas de energía eléctrica en años 80 (Bloom, Pereira):
 - Coordinación hidrotérmica
 - Planificación a largo plazo de la expansión de la generación y/o de la red de transporte o de distribución
 - Planificación de reactiva
 - Programación semanal / asignación de unidades
 - Optimización de ofertas al mercado
- En otros sistemas:
 - Planificación de la capacidad de una línea de producción
 - Gestión de una cartera de valores
 - Planificación de las subestaciones de alimentación al AVE y tipos de catenaria

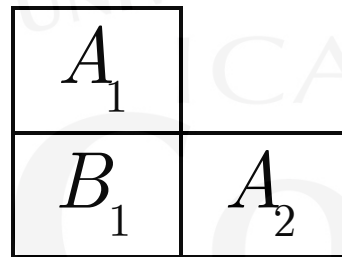
Índice

- Planteamiento general
- **Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica**
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Planificación lineal **bietapa PL-2** y **multietapa PL-P**

- **Bietapa PL-2**: decisiones en dos etapas
- **Multietapa PL-P**: decisiones en múltiples etapas
- **Estructura de la matriz de restricciones en escalera (diagonal por bloques)**
 - Cada etapa sólo está relacionada con la etapa anterior
- Los problemas de cada etapa son similares (tienen la **misma estructura**)
- La estructura de la matriz se puede detectar por inspección visual

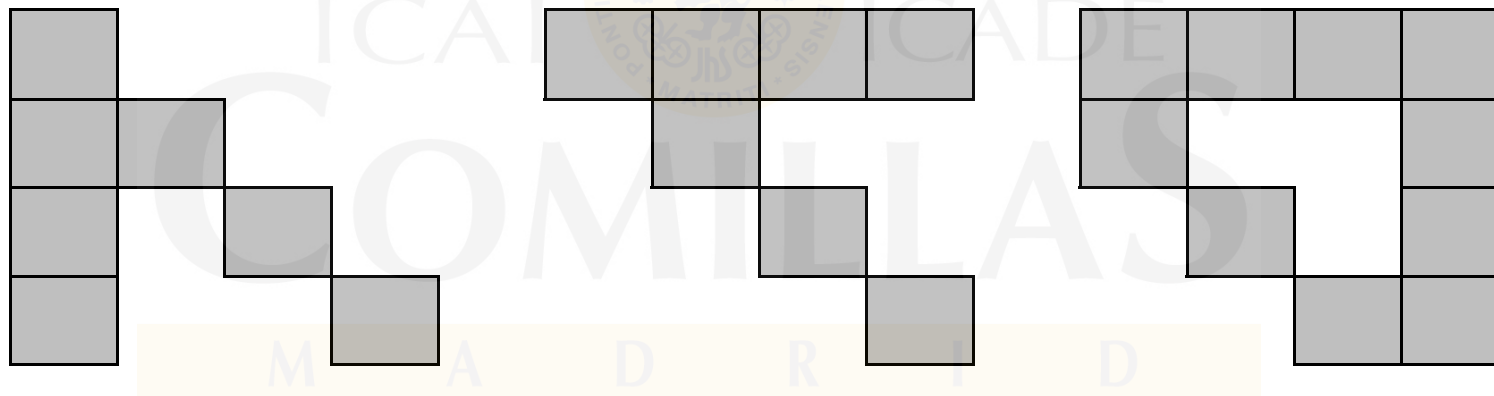
Planificación lineal determinista **bietapa** PL-2



$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} & (c_1^T x_1 + c_2^T x_2) \\ & A_1 x_1 = b_1 \\ & B_1 x_1 + A_2 x_2 = b_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Estructuras de matriz de restricciones

- Diagonal por bloques con variables que complican, restricciones o ambas



Planificación lineal estocástica **bietapa** PLE-2 (i)

- F.O. minimiza costes primera etapa y **valor esperado** de los costes de la segunda

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2^\omega} \quad & c_1^T x_1 + \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega c_2^{\omega T} x_2^\omega \\ & A_1 x_1 = b_1 \\ & B_1^\omega x_1 + A_2^\omega x_2^\omega = b_2^\omega \\ & x_1, x_2^\omega \geq 0 \end{aligned}$$

- Si A_2^ω no depende de ω se denomina de **recurso fijo**
- Estructura de la **matriz de restricciones**

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & & & \\ \hline B_1^1 & A_2^1 & & \\ \hline B_1^2 & & A_2^2 & \\ \hline B_1^3 & & & A_2^3 \\ \hline \end{array}$$

Problema determinista equivalente

- Conjunto de estados es pequeño
- Formulación de problema determinista equivalente

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2^{\omega_1}, x_2^{\omega_2}, x_2^{\omega_3}} \quad & c_1^T x_1 + p^{\omega_1} c_2^{\omega_1 T} x_2^{\omega_1} + p^{\omega_2} c_2^{\omega_2 T} x_2^{\omega_2} + p^{\omega_3} c_2^{\omega_3 T} x_2^{\omega_3} \\ A_1 x_1 \quad & = b_1 \\ B_1^{\omega_1} x_1 + A_2^{\omega_1} x_2^{\omega_1} \quad & = b_2^{\omega_1} \\ B_1^{\omega_2} x_1 + A_2^{\omega_2} x_2^{\omega_2} \quad & = b_2^{\omega_2} \\ B_1^{\omega_3} x_1 + A_2^{\omega_3} x_2^{\omega_3} \quad & = b_2^{\omega_3} \\ x_1, \quad x_2^{\omega_1}, \quad x_2^{\omega_2}, \quad x_2^{\omega_3} \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

Planificación lineal estocástica **bietapa** (ii)

- Minimización del **máximo arrepentimiento**

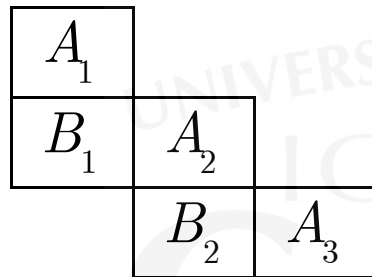
$$\begin{array}{llll} \min_{\alpha, x_1, x_2^\omega} \alpha & & & \\ \alpha - c_1^T x_1 - c_2^{\omega T} x_2^\omega & \geq -f^\omega & \forall \omega \in \Omega & \\ A_1 x_1 & = b_1 & & \\ B_1^\omega x_1 + A_2^\omega x_2^\omega & = b_2^\omega & & \\ x_1, x_2^\omega & \geq 0 & & \end{array}$$

f^ω f.o. con información perfecta para el escenario ω

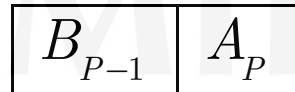
- Minimización del **máximo coste**

$$\begin{array}{llll} \min_{\alpha, x_1, x_2^\omega} \alpha & & & \\ \alpha - c_1^T x_1 - c_2^{\omega T} x_2^\omega & \geq 0 & \forall \omega \in \Omega & \\ A_1 x_1 & = b_1 & & \\ B_1^\omega x_1 + A_2^\omega x_2^\omega & = b_2^\omega & & \\ x_1, x_2^\omega & \geq 0 & & \end{array}$$

Planificación lineal determinista **multietapa** PL-P



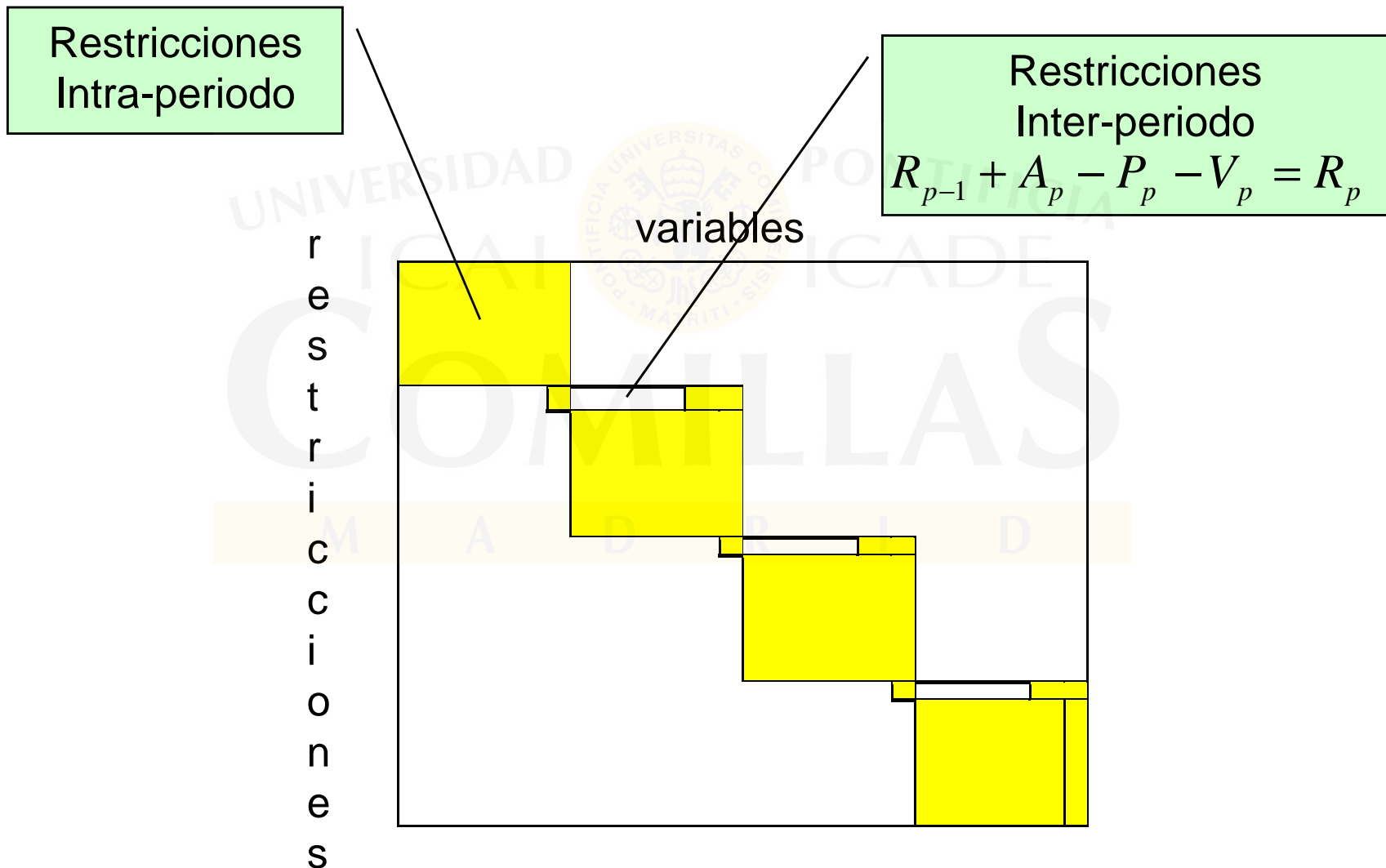
...



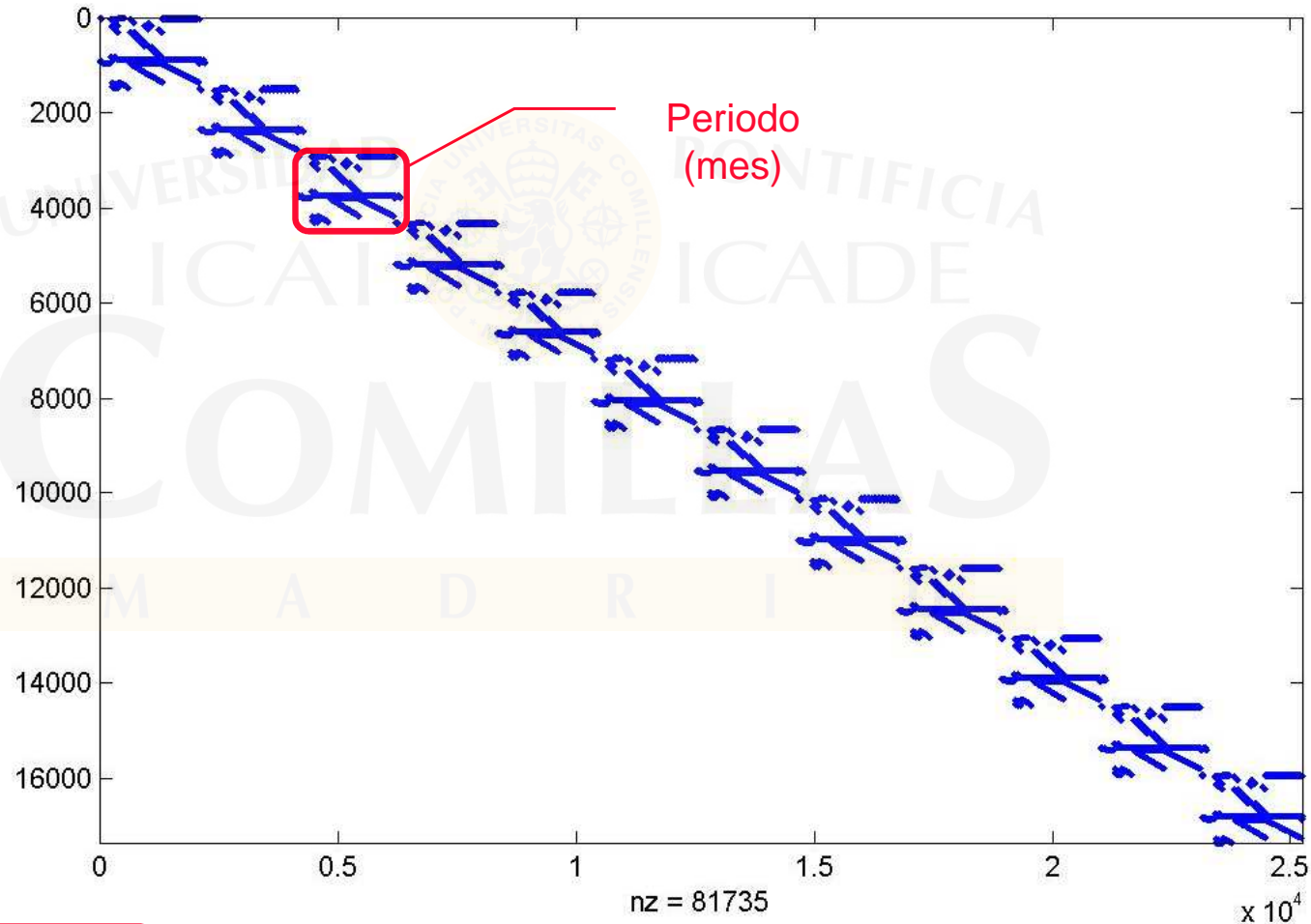
$$\begin{aligned} \min_{x_p} \sum_{p=1}^P c_p^T x_p \\ B_{p-1} x_{p-1} + A_p x_p = b_p \quad p = 1, \dots, P \\ x_p \geq 0 \\ B_0 \equiv 0 \end{aligned}$$

M A D R I D

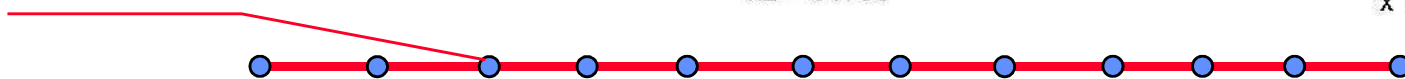
Modelo de coordinación hidrotérmica de medio plazo: matriz de restricciones



Modelo de coordinación hidrotérmica de medio plazo: matriz de restricciones



Periodo (mes)



Planificación lineal estocástica **multietapa PLE-P**

- F.O. minimiza **costes esperados** de todas las etapas

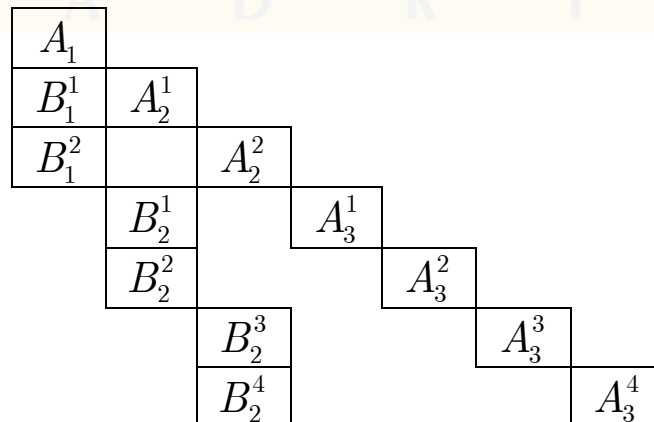
$$\min_{x_p^{\omega_p}} \sum_{p=1}^P \sum_{\omega_p \in \Omega_p} p_p^{\omega_p} c_p^{\omega_p T} x_p^{\omega_p}$$

$$B_{p-1}^{\omega_p} x_{p-1}^{\omega_{p-1}} + A_p^{\omega_p} x_p^{\omega_p} = b_p^{\omega_p} \quad p = 1, \dots, P$$

$$x_p^{\omega_p} \geq 0$$

$$B_0^{\omega_1} \equiv 0$$

- Tamaño **crece exponencialmente** con número de escenarios
- Las probabilidades $p_p^{\omega_p}$ son condicionadas
- Matriz de restricciones



Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- **Técnicas de descomposición**
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Técnicas de descomposición

- **Estrategia de divide y vencerás**
 - División temporal por periodos
 - División espacial por unidades
 - División por escenarios
- Permite la solución de problemas gigantescos (no resolubles directamente) con una cierta estructura se resuelven **iterativamente** en problemas **de menor tamaño**
- Función objetivo y región factible han de ser convexas siempre que necesite obtener las variables duales
- Dantzig-Wolfe 1960, Benders 1962, Geoffrion 1972 (Bd generalizado)

Técnicas de descomposición: clasificación

- De acuerdo a las **dificultades**
 - **Variables** (Benders)
 - **Restricciones** (Dantzig-Wolfe o Relajación lagrangiana)
- De acuerdo a la **información intercambiada** entre maestro y subproblema
 - **Primal** (Benders)
 - **Dual** (Dantzig-Wolfe o Relajación lagrangiana)

Mecanismos de coordinación. Modelo hidrotérmico

- **Primal (cantidades)**

- El maestro da la **cantidad de agua** a producir en cada periodo o los **niveles de reserva** al final del periodo
- Cada subproblema devuelve el **precio marginal (valor del agua)** asociado al uso de la cantidad previa

- **Dual (precios)**

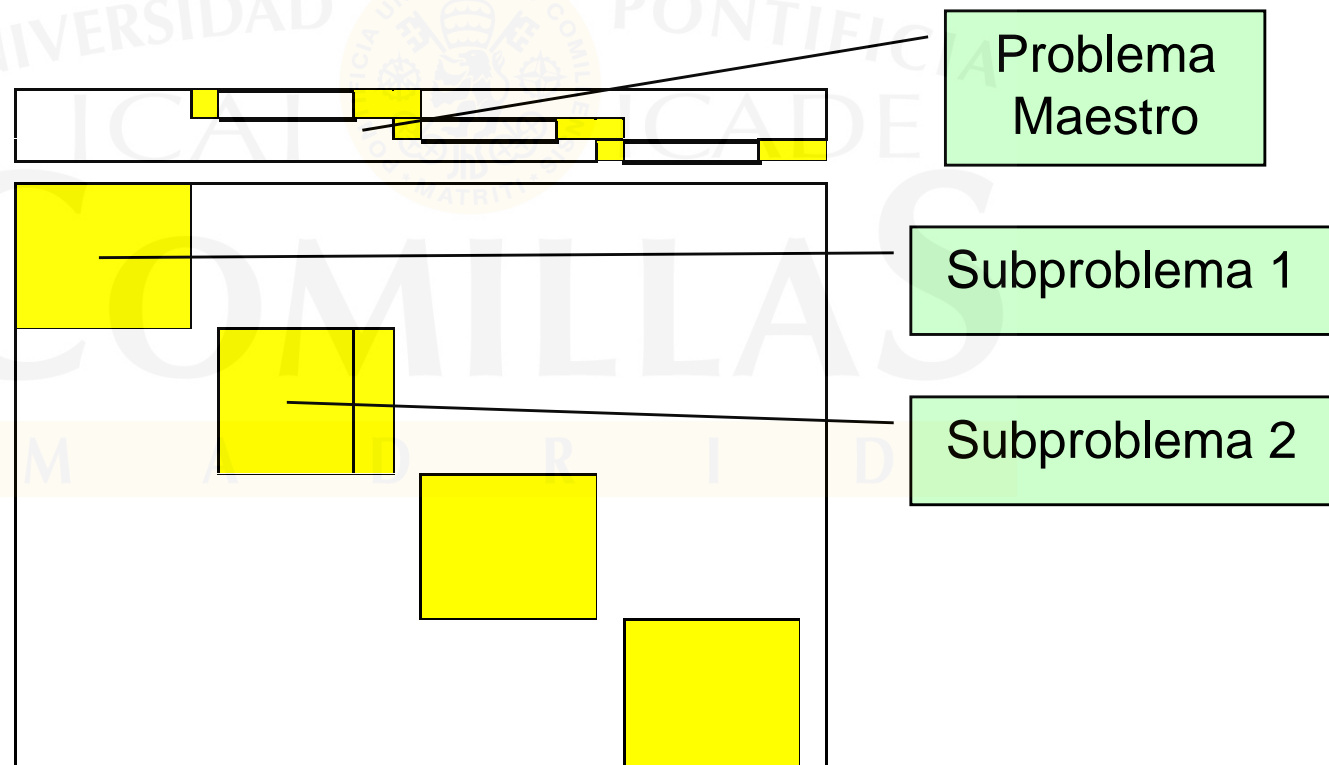
- El maestro envía el **valor del agua**
- Cada subproblema devuelve la **función de coste futuro** teniendo en cuenta estos valores

Modelo de coordinación hidrotérmica de medio plazo

- Resoluble por **Bd**, **DW-LR** o **descomposición anidada**
 - Variables de producción hidráulica complican la solución \Rightarrow Benders
 - Restricciones de producción hidráulica complican la solución \Rightarrow Dantzig-Wolfe, Relajación lagrangiana
- Criterio:
 - Ingenieril: adecuación al contexto
 - Matemático:
 - ¿Qué complica? (número de iteraciones previsibles)
 - Tamaños respectivos de maestro y subproblemas

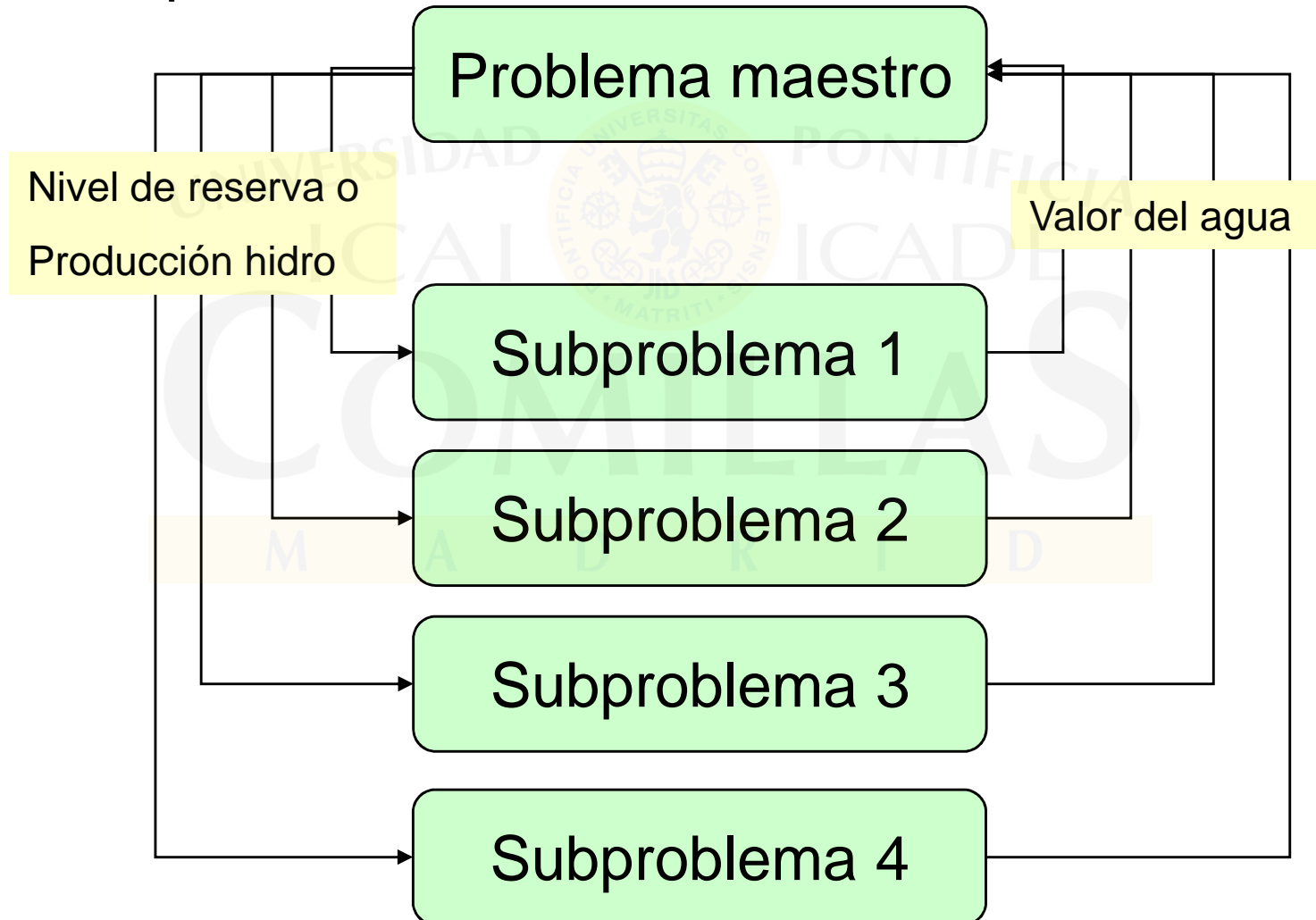
Algoritmo: Benders

- Problema Maestro : restricciones inter-periodo
- Subproblema: restricciones intra-periodo



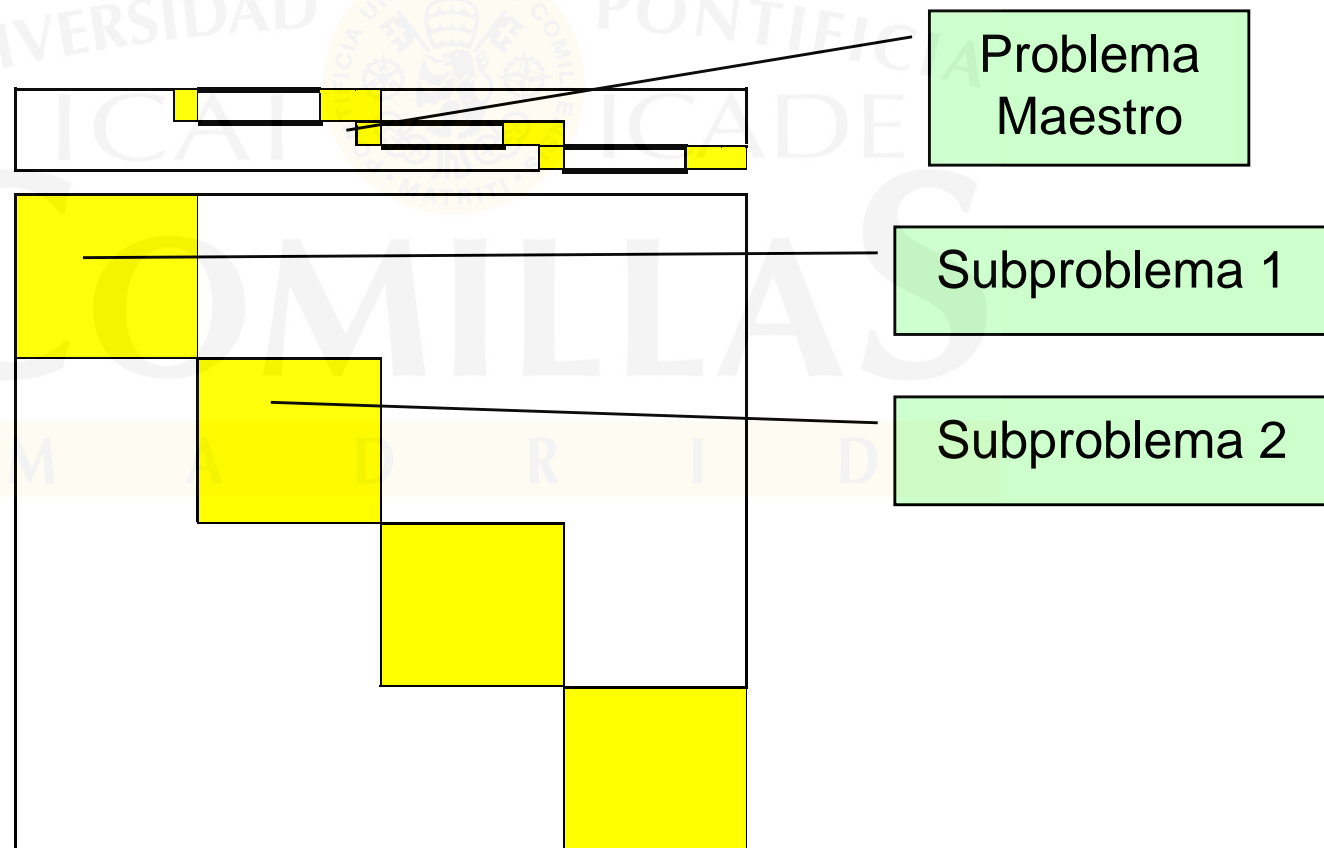
Descomposición de Benders

- Nivel del embalse o producción hidráulica es un dato para el subproblema



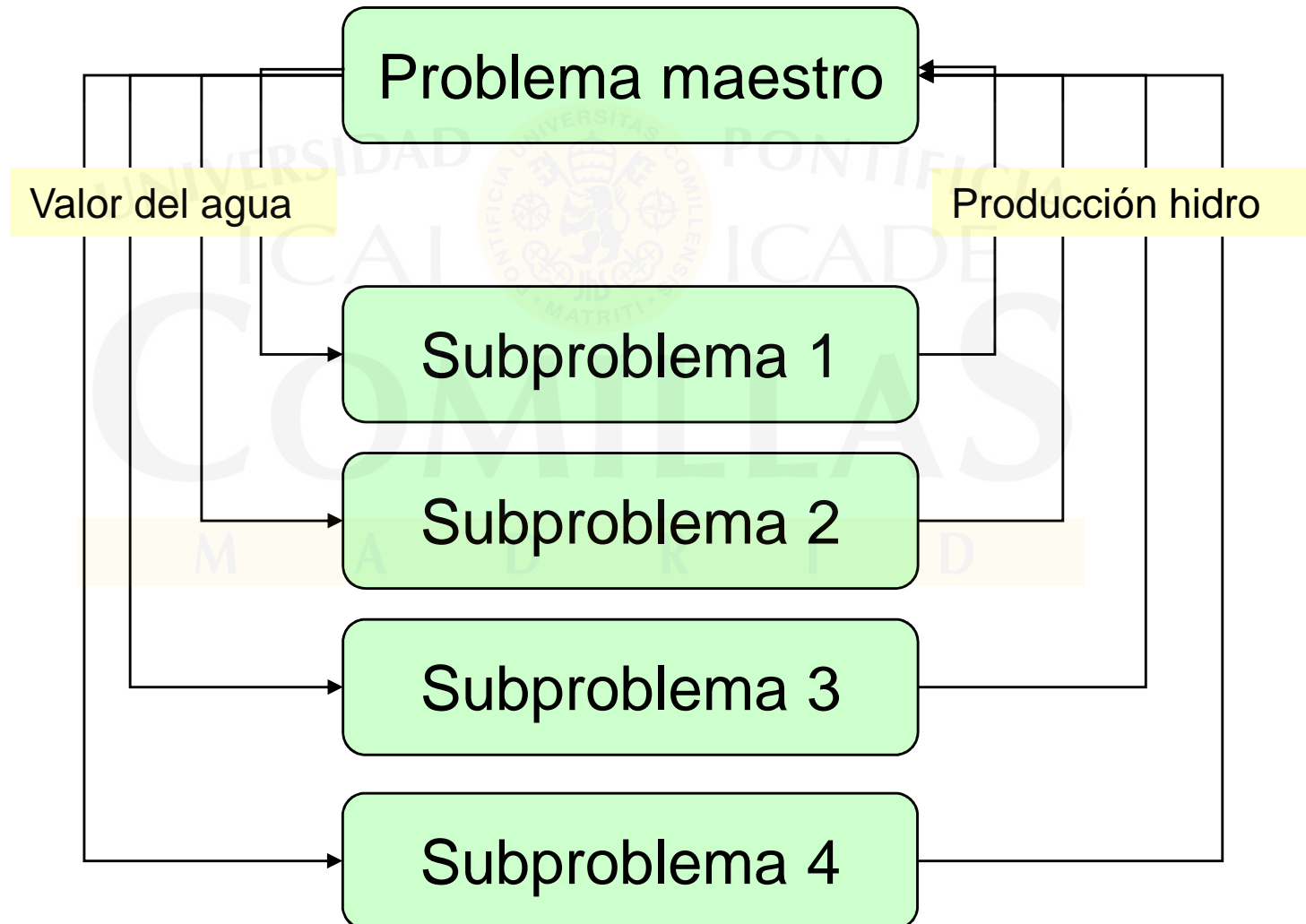
Algoritmo: Dantzig-Wolfe o relajación lagrangiana

- Problema **Maestro**: restricciones **inter-periodo**
- **Subproblema**: restricciones **intra-periodo**

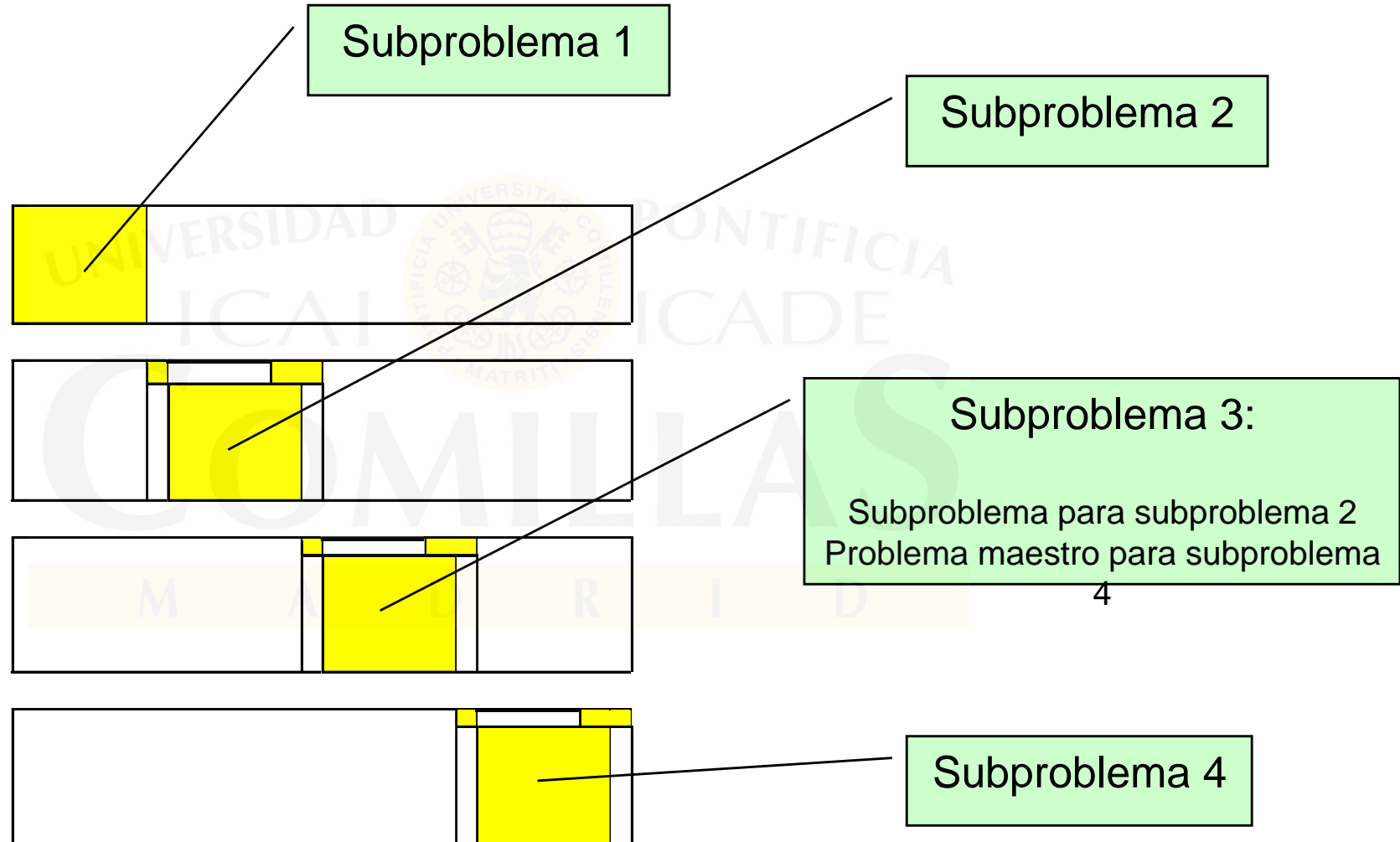


Descomposición DW o LR

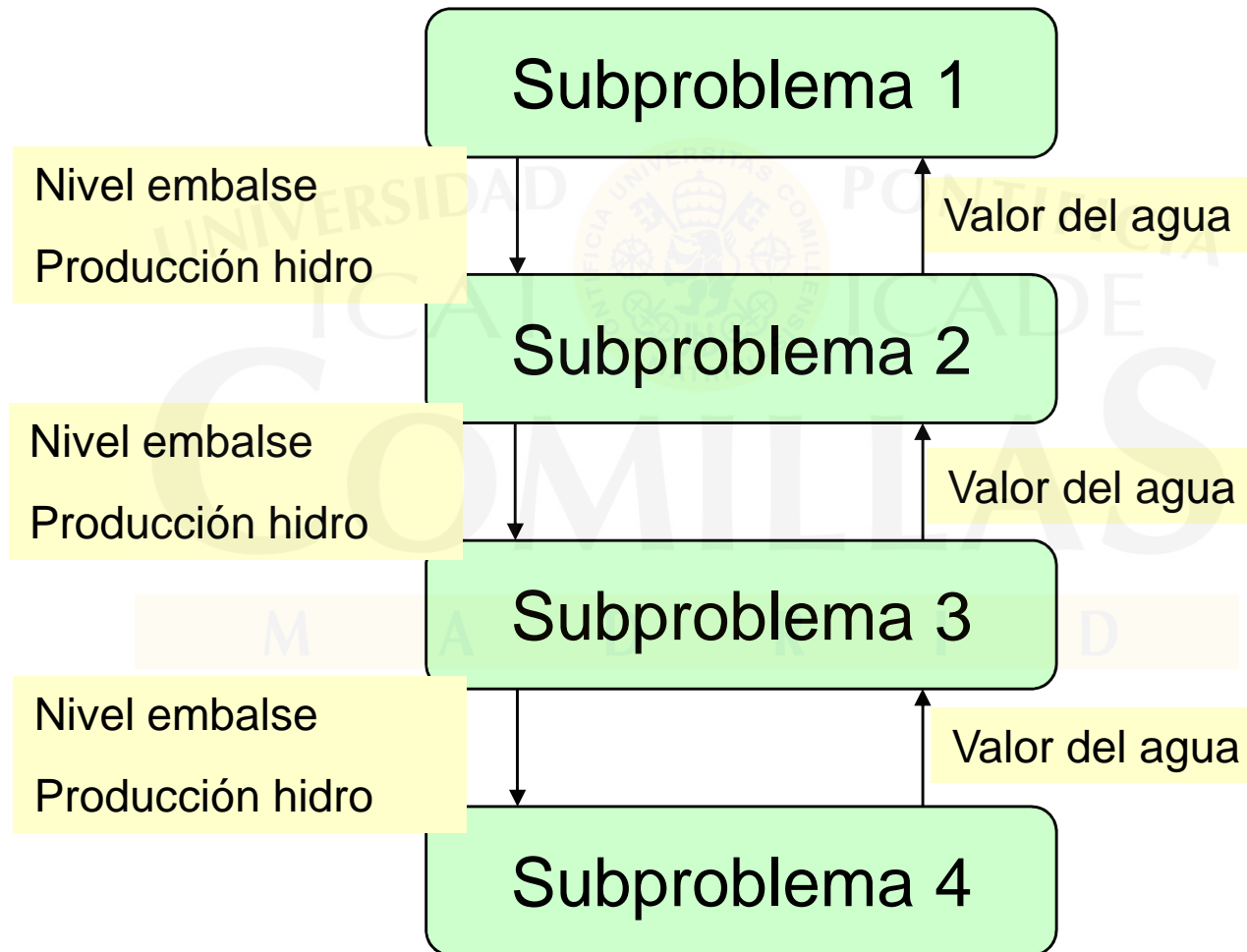
- Nivel del embalse es una **variable** para el subproblema



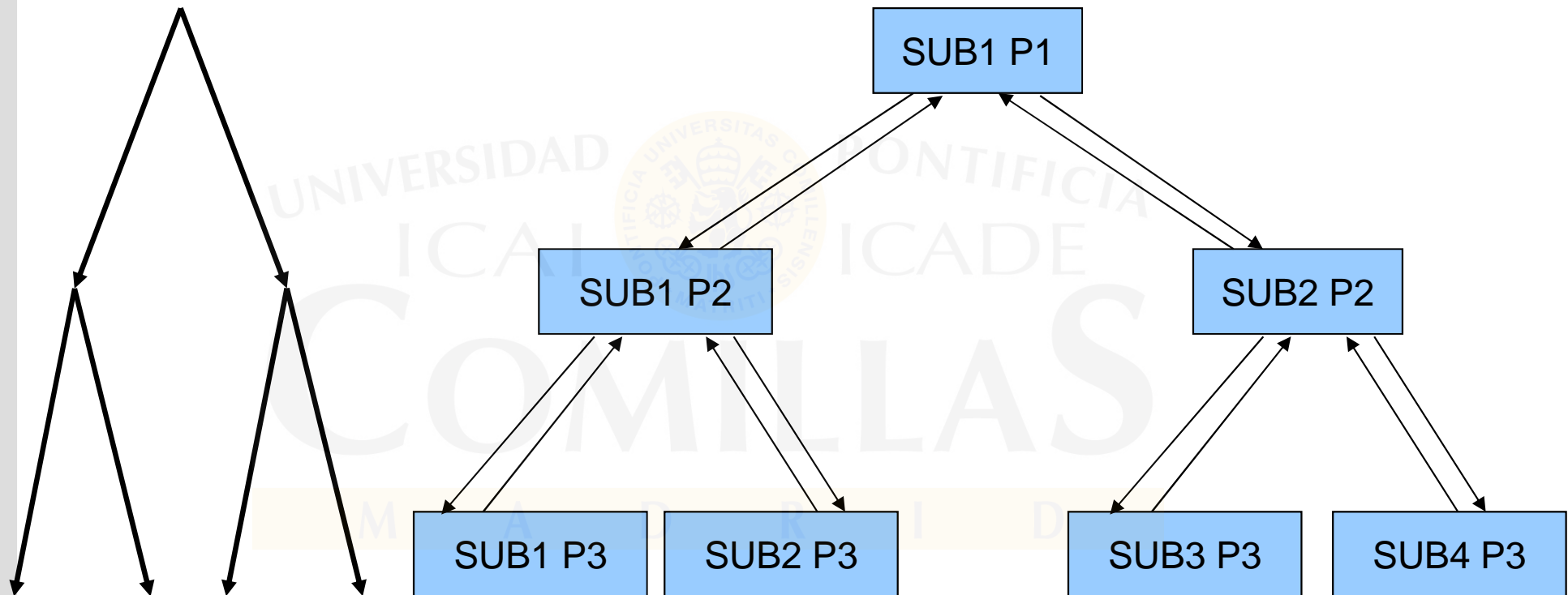
Algoritmo: Descomposición anidada



Descomposición anidada de Benders



Descomposición anidada de Benders



Aplicaciones informáticas

- Actualmente **no existen optimizadores** estándares, potentes y estables para problemas estocásticos. En casi todos los casos
optimización estocástica = “do-it-yourself”
- Optimizador con métodos de descomposición (<http://stoprog.org/stoprog/software.php>)
 - MSLiP (Horand I. Gassman)
 - SLP-IOR (Janos Mayer)
 - FortSP (OptiRisk Systems)
 - SPiNE (Gautam Mitra)
 - DDSIP (U. Gotzes, F. Neise)
 - PySP (Jean-Paul Watson)
 - Bouncing Nested Benders Solvers BNBS (Fredrik Altenstedt)
 - Stochastic Modeling Interface COIN-SMI (open-source interface for modeling stochastic linear programming problems)
- ILOG Concert + C++
- GAMS o AMPL + métodos de descomposición
- GAMS/**DECIS**

Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- **Descomposición de Benders**
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Descomposición de Benders

- Descomposición de Benders o
 - **primal** (porque se fijan variables del primal),
 - **en L** (por la forma de la matriz de restricciones),
 - **por recursos** (porque el maestro asigna recursos),
 - **aproximación exterior** (porque aproxima exteriormente la función de recursos)
- Divide PL-2 en maestro y subproblema

Descomponiendo en
Bender's Tavern en
Denver (INFORMS
Nov 2004)



Deducción del algoritmo (i)

- Problema lineal bietapa PL-2

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} & (c_1^T x_1 + c_2^T x_2) \\ A_1 x_1 & = b_1 \\ B_1 x_1 + A_2 x_2 & = b_2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

- También se puede expresar como

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \theta_2(x_1)} & c_1^T x_1 + \theta_2(x_1) \\ A_1 x_1 & = b_1 \\ x_1 & \geq 0 \end{aligned}$$

PROBLEMA MAESTRO

- Siendo $\theta_2(x_1) \in \mathbb{R}$ la función de recursos (**poligonal**)

$$\begin{aligned} \theta_2(x_1) & = \min_{x_2} c_2^T x_2 \\ A_2 x_2 & = b_2 - B_1 x_1 \quad : \pi_2 \\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

SUBPROBLEMA

- Y π_2 las variables duales de las restricciones

Deducción del algoritmo (ii)

- Expresamos el subproblema en su forma dual

$$\theta_2(x_1) = \max_{\pi_2} (b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2$$
$$A_2^T \pi_2 \leq c_2$$

- Región factible independiente de x_1 .

- Vértices del poliedro $\Pi = \{\pi_2^1, \pi_2^2, \dots, \pi_2^\nu\}$

- El máximo estará en uno de los vértices

$$\theta_2(x_1) = \max \{(b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2^l\} \quad l = 1, \dots, \nu$$

- Y expresado como problema lineal

$$\theta_2(x_1) = \min_{\theta_2}$$
$$\theta_2 \geq (b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2^1$$
$$\vdots$$
$$\theta_2 \geq (b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2^\nu$$

Cortes
Planos de corte
Hiperplanos soporte

Deducción del algoritmo (iii)

- Se introduce un corte en cada iteración
- Problema maestro relajado

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \theta_2} \quad & c_1^T x_1 + \theta_2 \\ & A_1 x_1 = b_1 \\ & \pi_2^{lT} B_1 x_1 + \theta_2 \geq \pi_2^{lT} b_2 \quad l = 1, \dots, j \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

- Variable dual generada por subproblema diferente en cada iteración. Como número de vértices es finito el número de iteraciones es también finito
- Corte válido: corte externo a la función de recursos (no necesariamente tangente). No es necesario resolver subproblema hasta optimalidad

Deducción del algoritmo (iv)

- Formulación alternativa de cortes de Benders

$$\begin{aligned}\theta_2 &\geq \pi_2^{jT} (b_2 - B_1 x_1) = \pi_2^{jT} (b_2 - B_1 x_1 + B_1 x_1^j - B_1 x_1^j) = \\ &= \pi_2^{jT} [b_2 - B_1 x_1^j - B_1(x_1 - x_1^j)] = \pi_2^{jT} [b_2 - B_1 x_1^j] + \pi_2^{jT} [-B_1(x_1 - x_1^j)]\end{aligned}$$

- Siendo $f_2^j = \pi_2^{jT} [b_2 - B_1 x_1^j]$
- Luego los cortes también se expresan así (linealización alrededor de un punto)

$$\theta_2 - f_2^l \geq \pi_2^{lT} B_1 (x_1^l - x_1)$$

$$\theta_2 + \pi_2^{lT} B_1 x_1 \geq f_2^l + \pi_2^{lT} B_1 x_1^l$$

- $\pi_2^{jT} B_1$ es un subgradiente de $\theta_2(x_1)$

Maestro relajado y subproblema

- Maestro: primera etapa + cortes

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \theta_2} c_1^T x_1 + \theta_2 \\ A_1 x_1 &= b_1 \\ \pi_2^{lT} B_1 x_1 + \theta_2 &\geq f_2^l + \pi_2^{lT} B_1 x_1^l \quad l = 1, \dots, j \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Subproblema: segunda etapa con decisiones primera etapa conocidas

$$\begin{aligned} f_2^j &= \min_{x_2} c_2^T x_2 \\ A_2 x_2 &= b_2 - B_1 x_1^j \quad : \pi_2^j \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cortes de factibilidad (i)

- Hasta ahora **subproblema** se suponía **factible** para propuestas de maestro (**recurso completo** o **parcialmente completo**)
- Si subproblema es
 - **Factible** se forman **cortes de optimalidad**
 - **Infactible** se forman **cortes de factibilidad**
 - **No acotado**, entonces **PL-2 no acotado**
- **Fase I del simplex** (minimizar suma de infactibilidades)

$$\begin{aligned} \min_{v^+, v^-} e^T v^+ + e^T v^- \\ A_2 x_2 + I v^+ - I v^- = b_2 - B_1 x_1 \quad : \pi_2 \\ x_2, v^+, v^- \geq 0 \end{aligned}$$

Lema de Farkas

- Sea el problema primal y su dual

$$\begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max b^T y \\ A^T y \leq c \end{array}$$

- **Exactamente uno** de estos sistemas de ecuaciones tiene solución
 - Si el **primero** es **cierto** necesariamente el **segundo** es **falso**

Condición de primal factible

$$\begin{array}{l} A^T x = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A^T y \leq 0 \\ b^T y > 0 \end{array}$$

Cortes de factibilidad (ii)

- El subproblema

$$\begin{aligned} f_2^j &= \min_{x_2} c_2^T x_2 \\ A_2 x_2 &= b_2 - B_1 x_1^j \quad : \pi_2^j \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

será **factible** si para las variables duales que cumplan

$$A_2^T \pi_2 \leq 0 \quad \text{se cumple} \quad (b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2 \leq 0$$

- Formulamos el subproblema como

$$\begin{aligned} \max_{\pi_2} & (b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2 \\ & A_2^T \pi_2 \leq 0 \end{aligned}$$

- Si esta f.o. es **estrictamente positiva** se genera **corte de factibilidad** para que esto no ocurra (**subproblema infactible**)

$$(b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2^j \leq 0$$

Cortes de factibilidad (iii)

- Como subproblema es un cono, podría ser no acotado, se introducen cotas a las variables duales

$$\begin{aligned} \max_{\pi_2} & (b_2 - B_1 x_1)^T \pi_2 \\ A_2^T \pi_2 & \leq 0 \\ -1 & \leq \pi_2 \leq 1 \end{aligned}$$

- El dual de este problema es el subproblema de minimización de infactibilidades

$$\begin{aligned} \min_{v^+, v^-} & e^T v^+ + e^T v^- \\ A_2 x_2 + I v^+ - I v^- & = b_2 - B_1 x_1 \quad : \pi_2 \\ x_2, v^+, v^- & \geq 0 \end{aligned}$$

Cortes de factibilidad (iv)

- Problema maestro

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \theta_2} & c_1^T x_1 + \theta_2 \\ & A_1 x_1 = b_1 \\ & \pi_2^{lT} B_1 x_1 + \delta_1^l \theta_2 \geq \pi_2^{lT} b_2 \quad l = 1, \dots, j \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

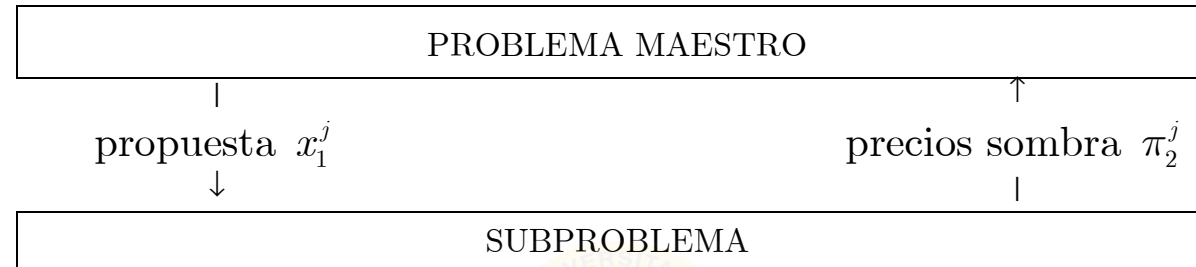
$\delta_1^l = 1$ cortes de optimalidad y $\delta_1^l = 0$ de factibilidad

- Cortes de factibilidad son cortes de optimalidad con pendiente infinita.
- Eliminan propuestas del maestro que hacen infactible el subproblema pero conservan las que no lo hacen infactible.
- Alternativamente a calcular cortes de factibilidad se puede penalizar la infactibilidad en el subproblema

Maestro y subproblema Bd

- Maestro
 - se añade un corte en cada iteración
 - cada corte define una nueva región factible
 - solución óptima iteración anterior se hace infactible
 - conveniente utilizar el método simplex dual
 - tamaño $(m_1 + j) \times (n_1 + 1)$
 - Puede ser no convexo (MIP, NLP)
- Subproblema
 - cada iteración altera cotas de restricciones
 - conveniente utilizar el método simplex primal (si es razonable por tamaño)
 - Tamaño $m_2 \times n_2$
 - Debe ser convexo (LP, NLP)

Algoritmo Bd (i)



- **Cota superior** del valor óptimo de la f.o. del problema PL-2
- **Cota inferior** del problema, el valor obtenido por la f.o. del problema maestro relajado

$$\bar{z} = c_1^T x_1^j + c_2^T x_2^j$$

$$z = c_1^T x_1^j + \theta_2^j$$

- **Condición de convergencia**

$$\frac{|\bar{z} - z|}{|\bar{z}|} = \frac{|c_2^T x_2^j - \theta_2^j|}{|c_1^T x_1^j + c_2^T x_2^j|} \leq \varepsilon$$

o repetición de la última solución propuesta

Algoritmo Bd (ii)

- Aproximación sucesiva de la función objetivo de la segunda etapa mediante los cortes.
- **Cortes de Benders** (planos de corte, hiperplanos soporte) son una linealización exterior de la función de recursos.
- **Cota inferior es monótona creciente. Cota superior no necesariamente es monótona decreciente.**
 - **Cota superior es mínimo de cotas superiores previas**
- En la primera iteración se puede fijar el valor de x_1^0 si se conoce la naturaleza del problema, o solucionar el maestro sin cortes $\theta_2 = 0$
- **En cualquier iteración se dispone de una solución factible cuasióptima**

Algoritmo Bd (iii)

1. Inicialización: $j = 0$ $z = -\infty$ $\bar{z} = \infty$ $\varepsilon = 10^{-4}$

2. Resolución del problema maestro

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \theta_2} c_1^T x_1 + \theta_2 \\ A_1 x_1 = b_1 \\ \pi_2^{lT} B_1 x_1 + \delta_1^l \theta_2 \geq \pi_2^{lT} b_2 \quad l = 1, \dots, j \\ x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \theta_2} c_1^T x_1 + \theta_2 \\ A_1 x_1 = b_1 \\ \pi_2^{lT} B_1 x_1 + \delta_1^l \theta_2 \geq f_2^l + \pi_2^{lT} B_1 x_1^l \quad l = 1, \dots, j \\ x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Obtener la solución (x_1^j, θ_2^j) y evaluar la cota inferior

Si no hay cortes de optimalidad $\theta_2 = 0$

3. Resolución del subproblema de suma de infactibilidades

$$\begin{aligned} f_2^j = \min_{x_2, v^+, v^-} e^T v^+ + e^T v^- \\ A_2 x_2 + I v^+ - I v^- = b_2 - B_1 x_1^j \quad : \pi_2^j \\ x_2, v^+, v^- \geq 0 \end{aligned}$$

Si $f_2^j \geq 0$ corte de factibilidad.

Si $f_2^j = 0$ ir al paso 4.

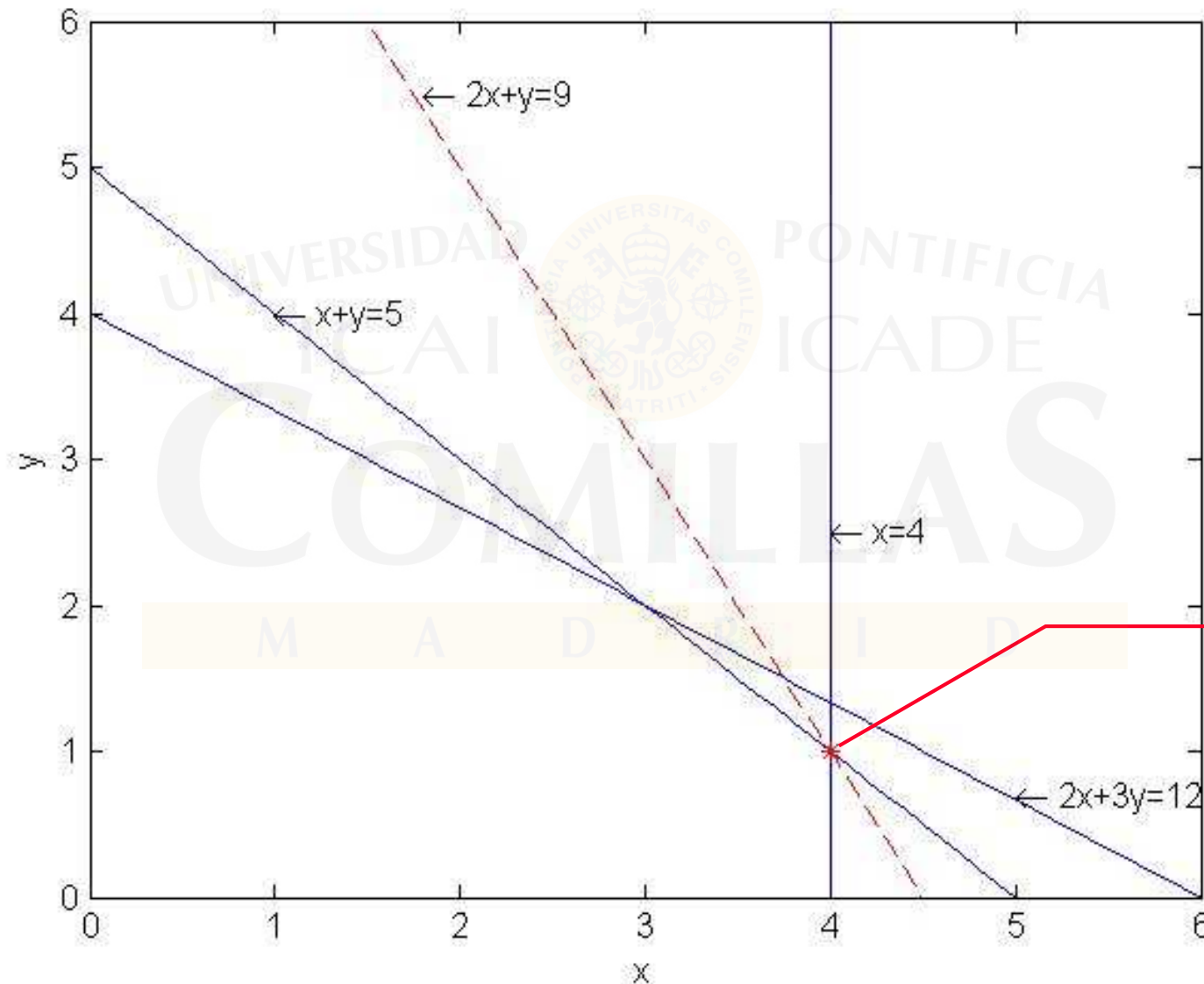
4. Resolución del subproblema de Benders

$$\begin{aligned} f_2^j = \min_{x_2} c_2^T x_2 \\ A_2 x_2 = b_2 - B_1 x_1^j \quad : \pi_2^j \\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Obtener x_2^j y actualizar cota superior .

3. Si cumple regla de parada $\frac{|\bar{z} - z|}{|\bar{z}|} = \frac{|c_2^T x_2^j - \theta_2^j|}{|c_1^T x_1^j + c_2^T x_2^j|} \leq \varepsilon$.
Si no ir a 2.

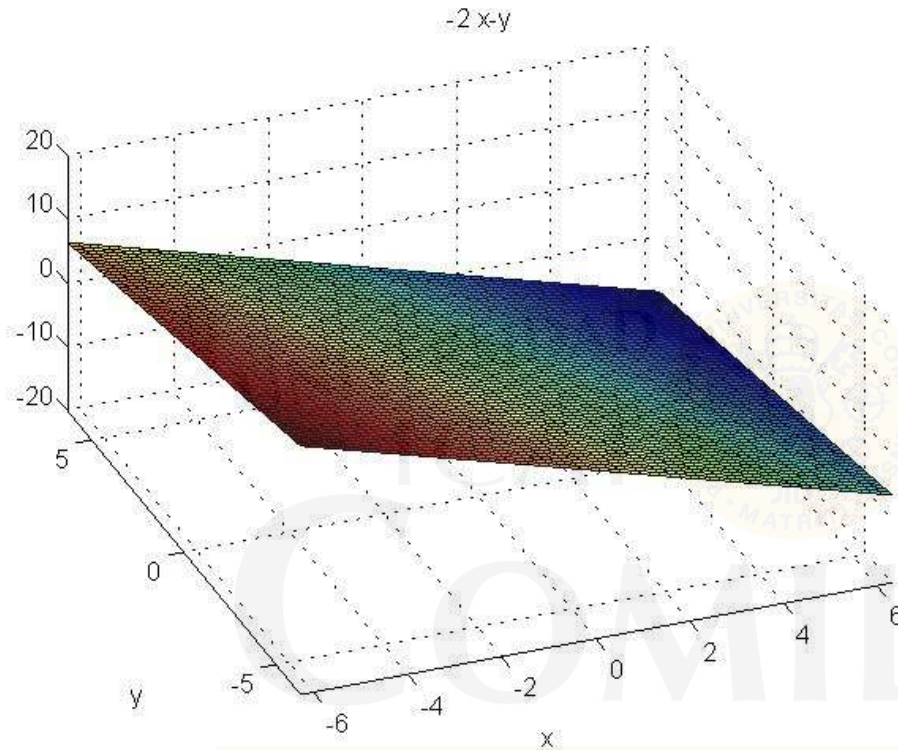
Caso ejemplo 1: problema completo



$$\begin{array}{ll} \min_{x,y} & -2x - y \\ & x \leq 4 \\ & x + y \leq 5 \\ & 2x + 3y \leq 12 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Solución óptima (4,1)
Valor de la f.o. -9

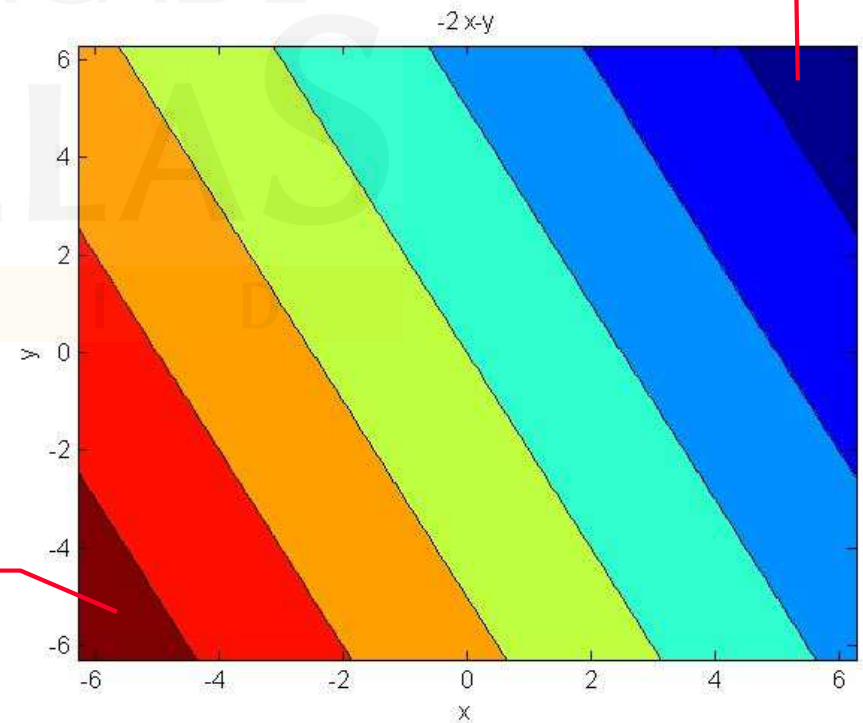
Caso ejemplo 1



Función objetivo en 3D

Valores bajos de la f.o.

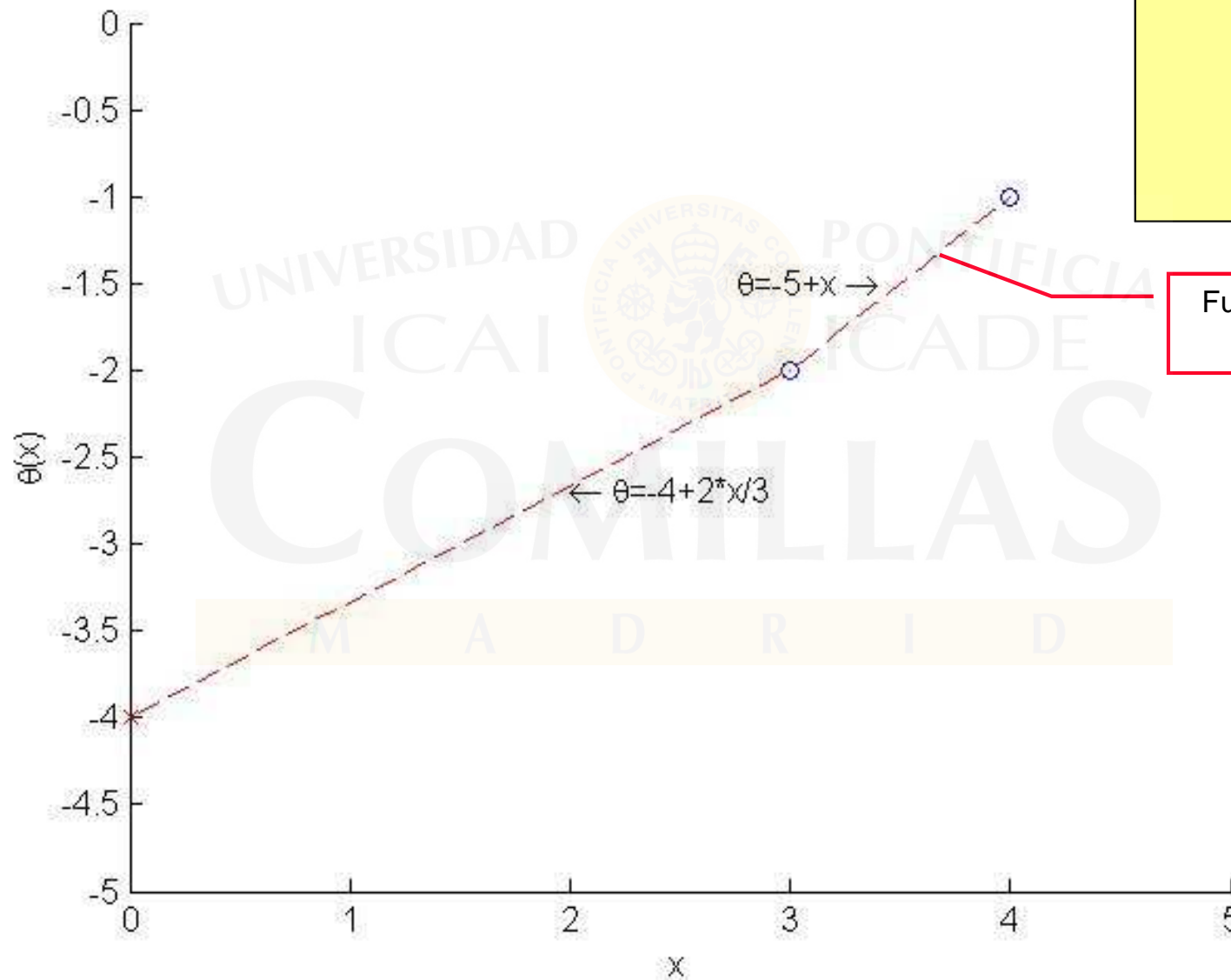
Curvas de nivel



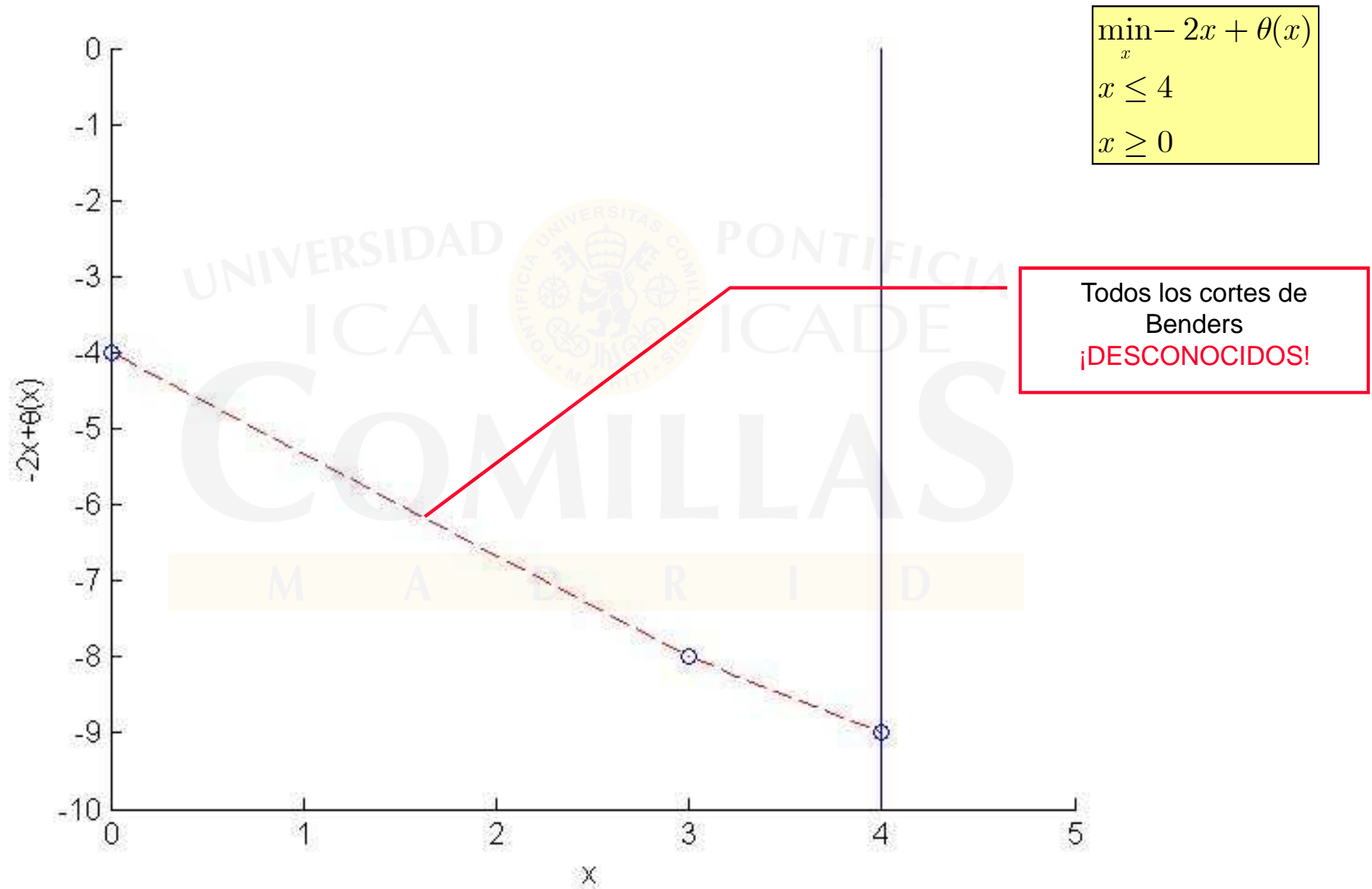
Valores altos de la f.o.

Caso ejemplo 1: función de recursos

$$\begin{aligned}\theta(x) = \min_y & \\ & y \leq 5 - x \\ & 3y \leq 12 - 2x \\ & y \geq 0\end{aligned}$$

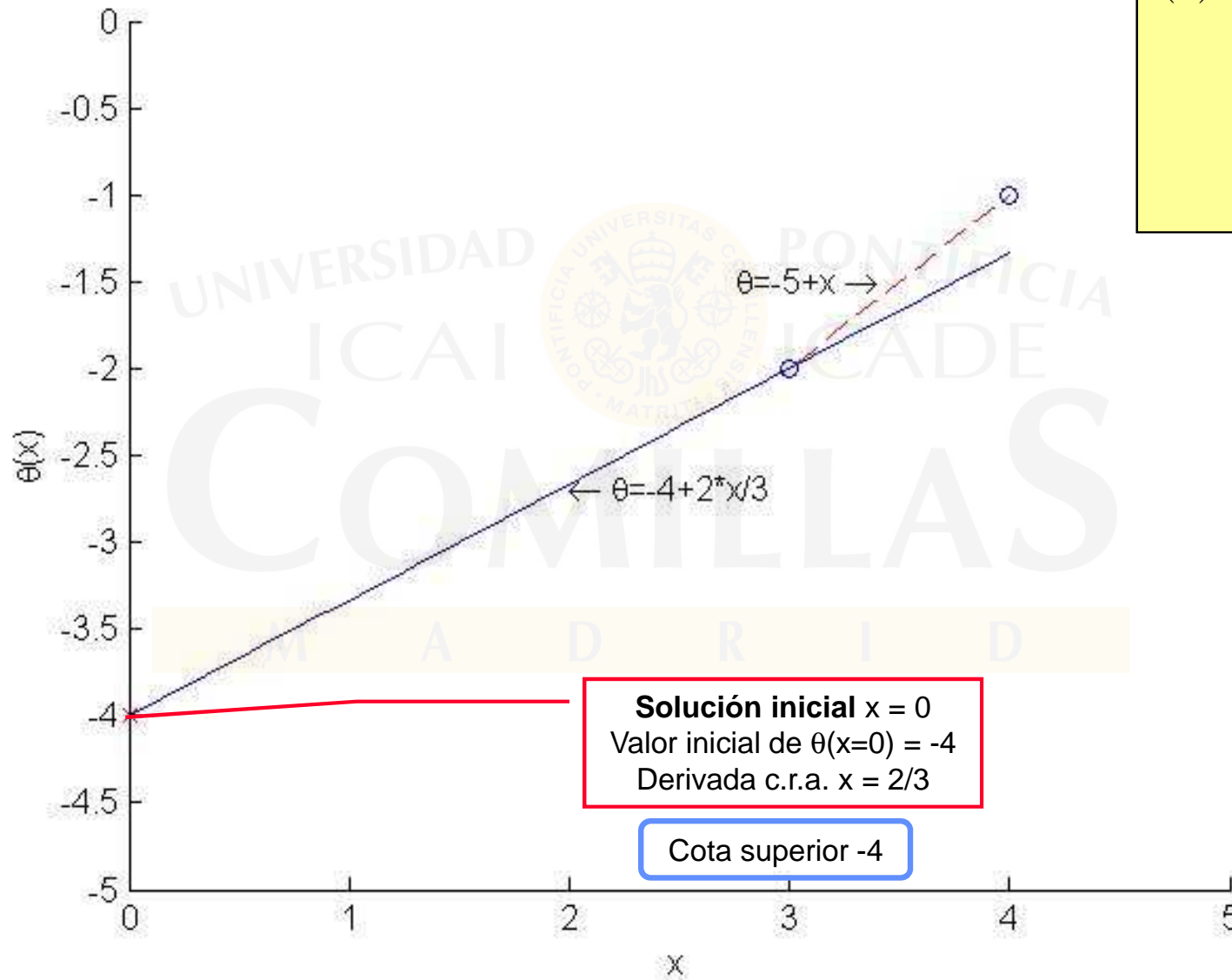


Caso ejemplo 1: problema maestro completo

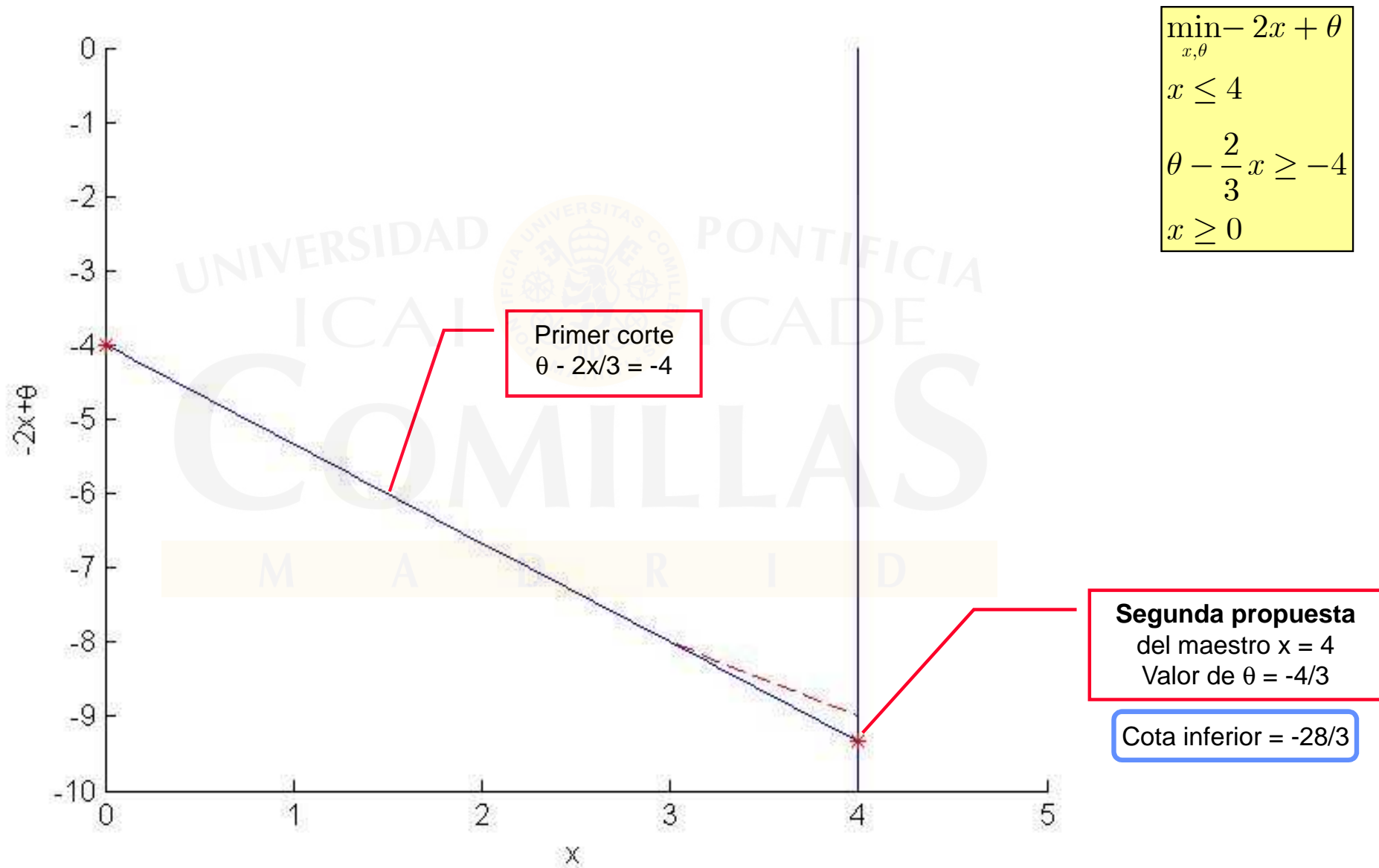


Caso ejemplo 1: función de recursos iteración 1

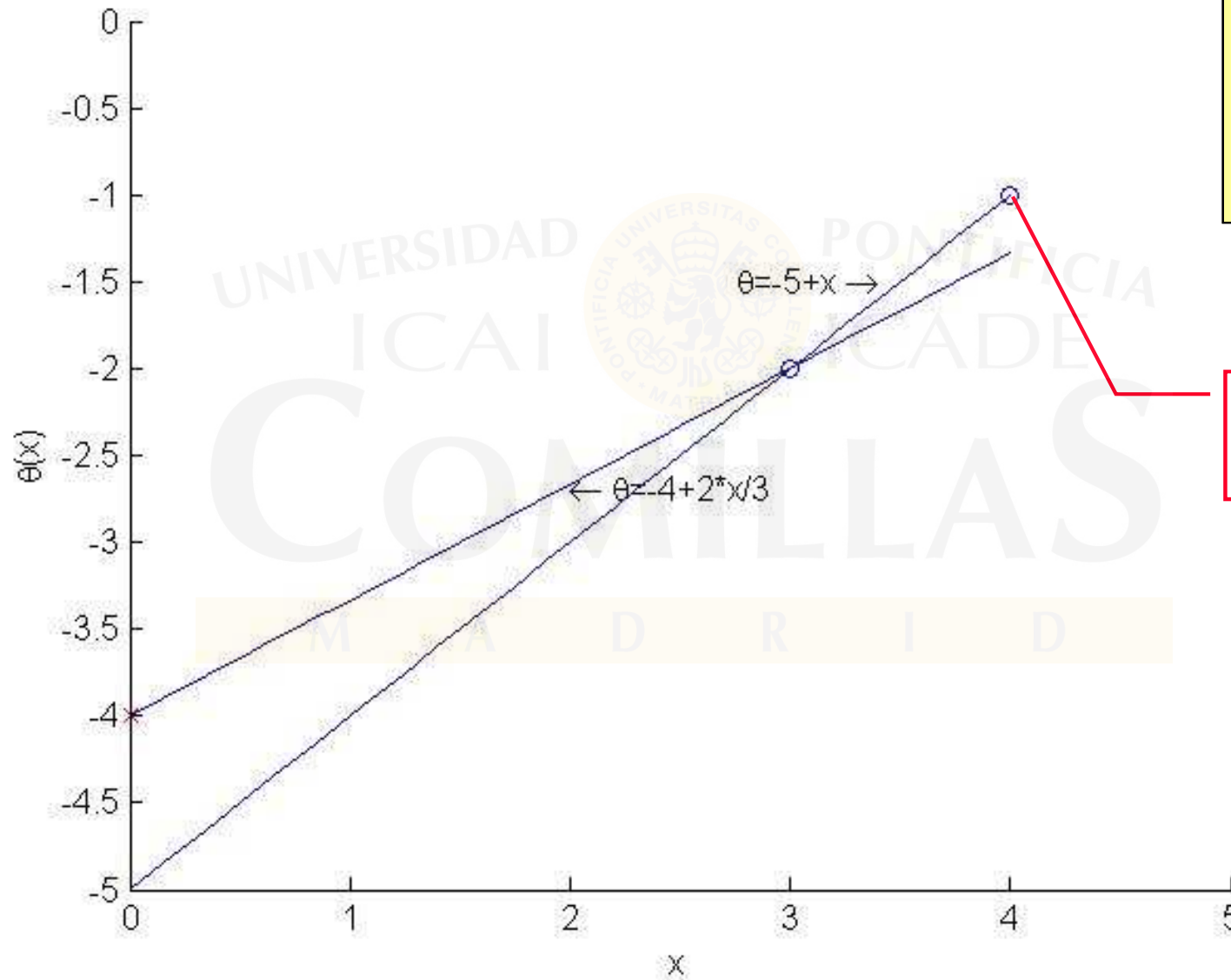
$$\begin{aligned}\theta(x) &= \min_y -y \\ y &\leq 5 - x \\ 3y &\leq 12 - 2 \cdot x \\ y &\geq 0\end{aligned}$$



Caso ejemplo 1: problema maestro iteración 1



Caso ejemplo 1: función de recursos iteración 2



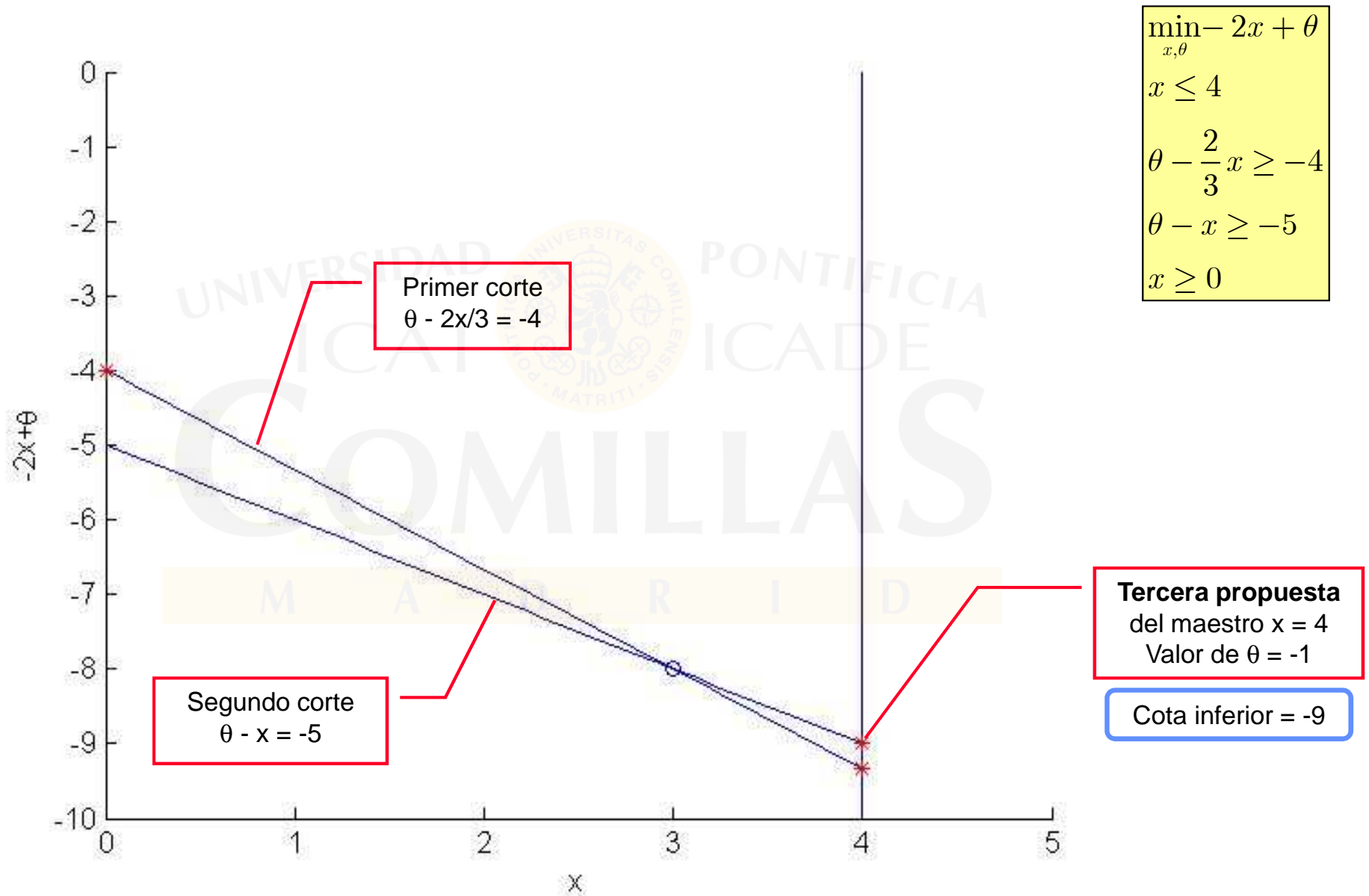
$$\begin{aligned}\theta(x) &= \min_y -y \\ y &\leq 5 - 4 \\ 3y &\leq 12 - 2 \cdot 4 \\ y &\geq 0\end{aligned}$$

Solución $x = 4$
Valor de $\theta(x=4) = -1$
Derivada c.r.a. $x = 1$

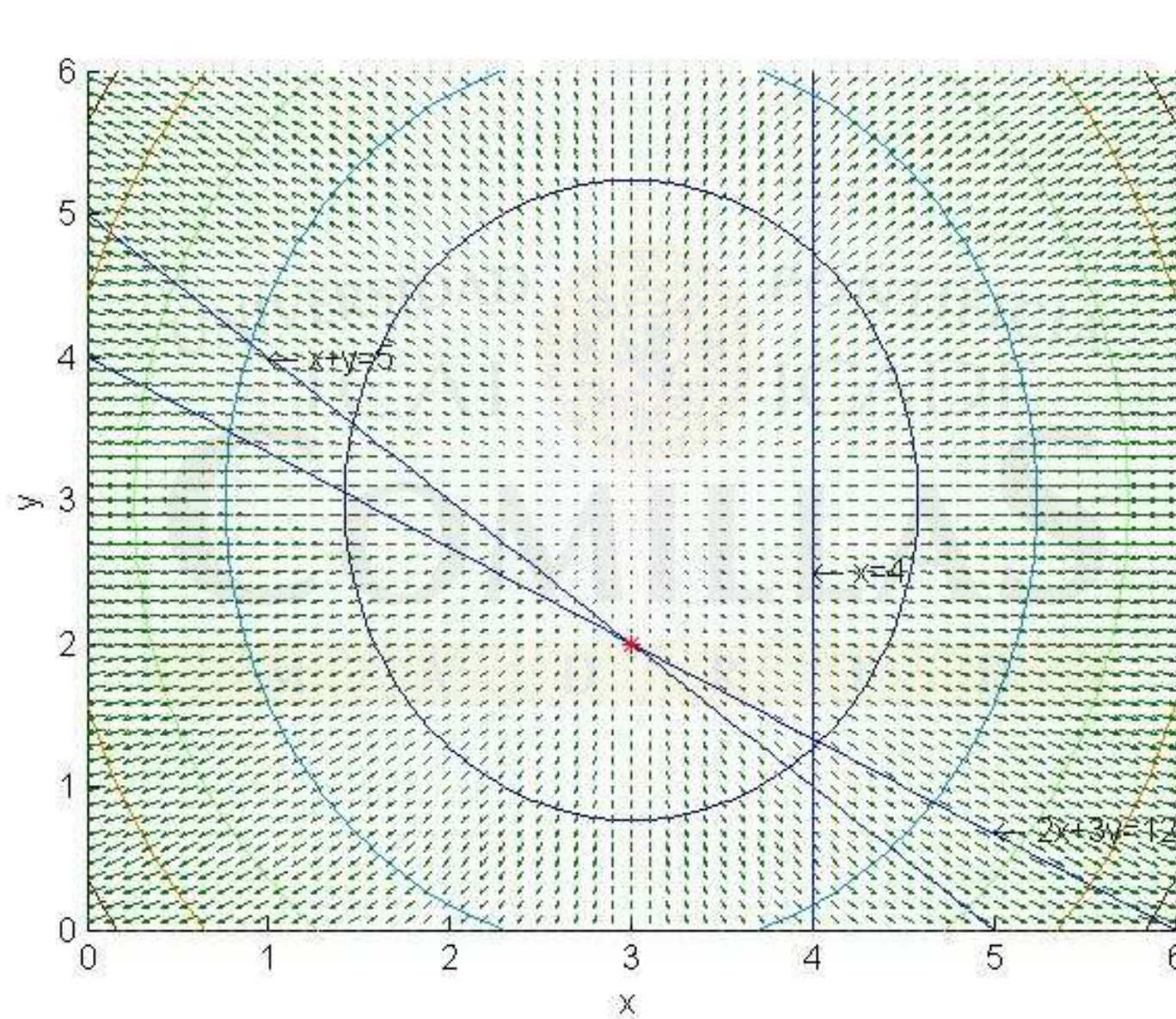
Cota superior -9



Caso ejemplo 1: problema maestro iteración 2

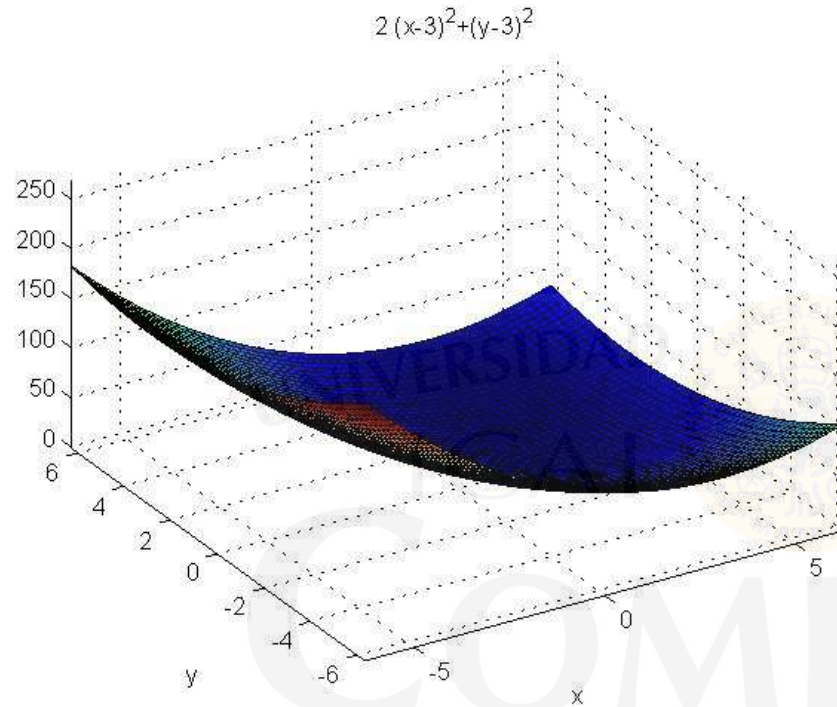


Caso ejemplo 2: problema completo



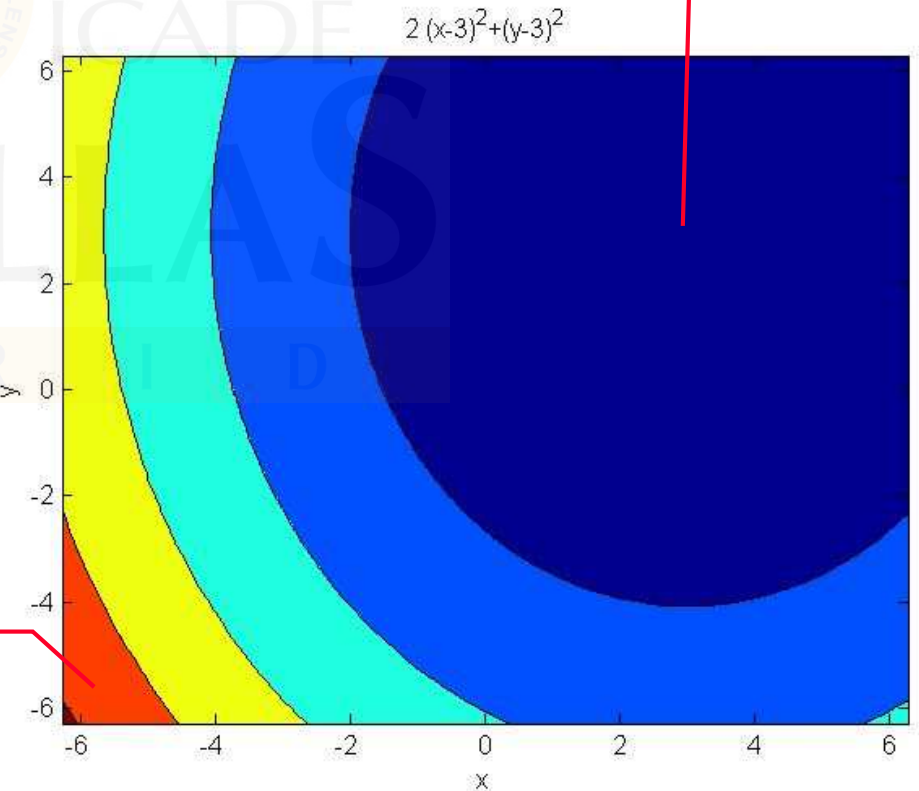
$$\begin{aligned} \min_{x,y} & 2(x-3)^2 + (y-3)^2 \\ x & \leq 4 \\ x + y & \leq 5 \\ 2x + 3y & \leq 12 \\ x, y & \geq 0 \end{aligned}$$

Caso ejemplo 2



Función objetivo en 3D

Curvas de nivel

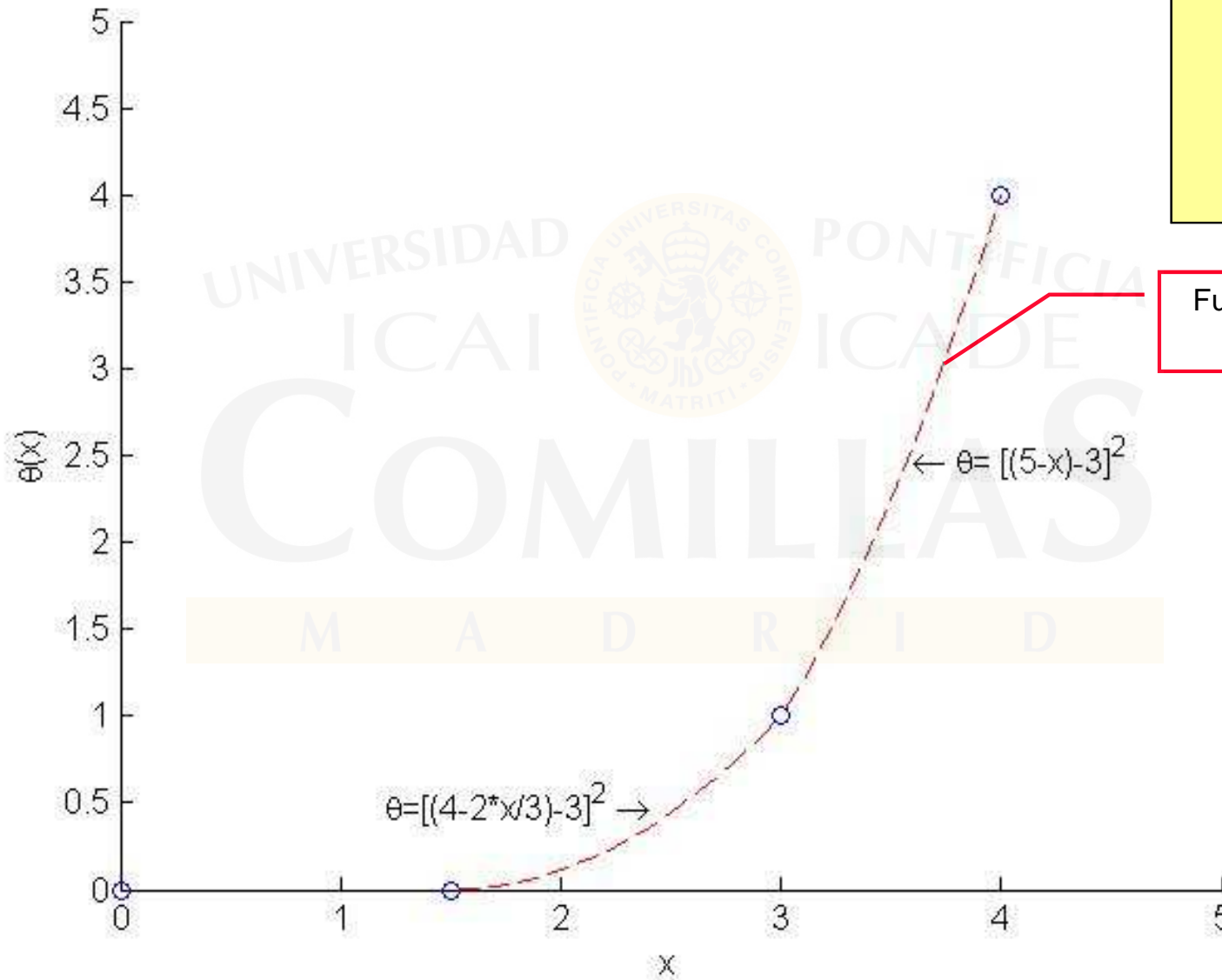


Valores altos de la f.o.

Valores bajos de la f.o.

Caso ejemplo 2: función de recursos

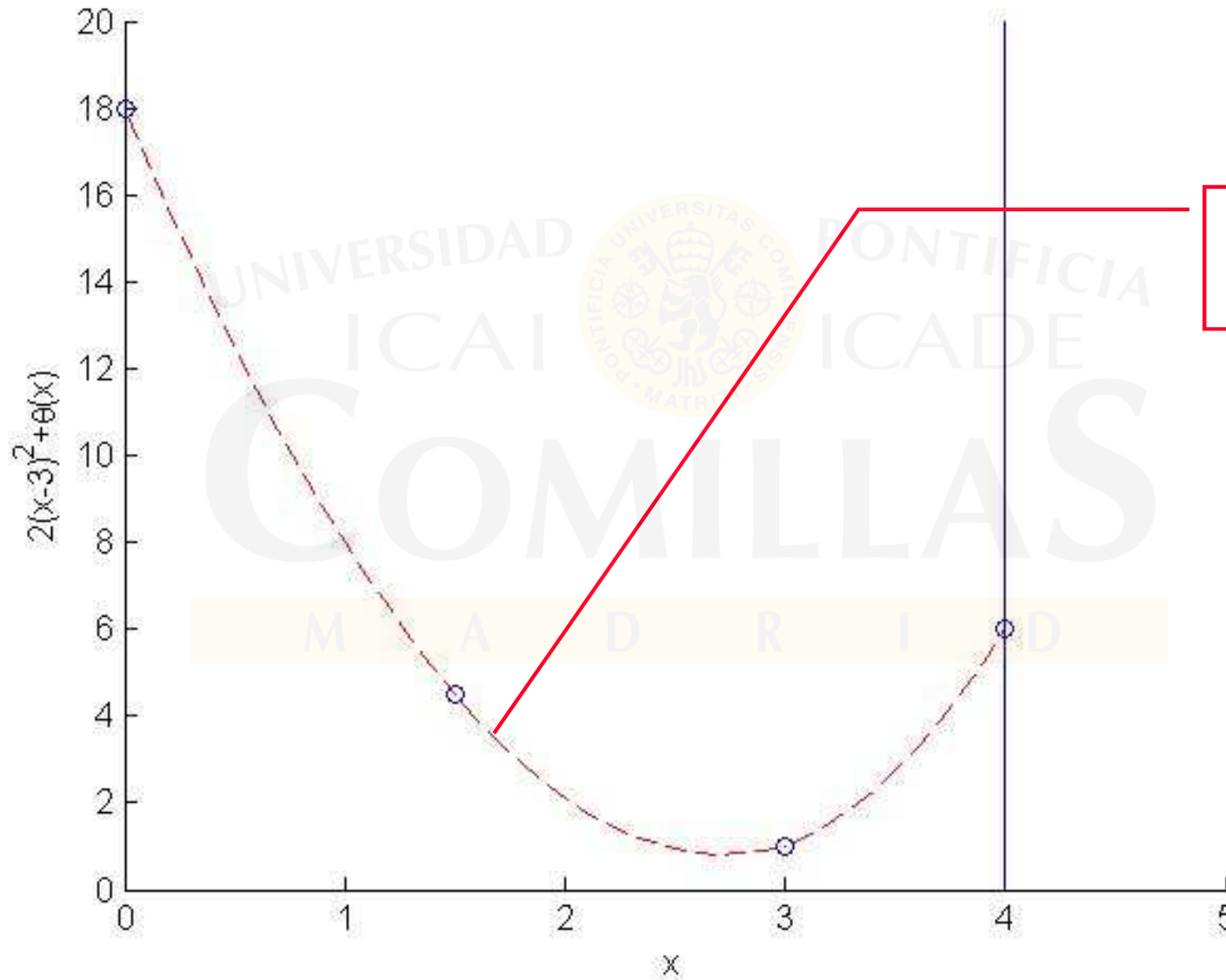
$$\theta(x) = \min_y (y - 3)^2$$
$$y \leq 5 - x$$
$$3y \leq 12 - 2x$$
$$y \geq 0$$



Función de recursos $\theta(x)$
¡DESCONOCIDA!

Caso ejemplo 2: problema maestro completo

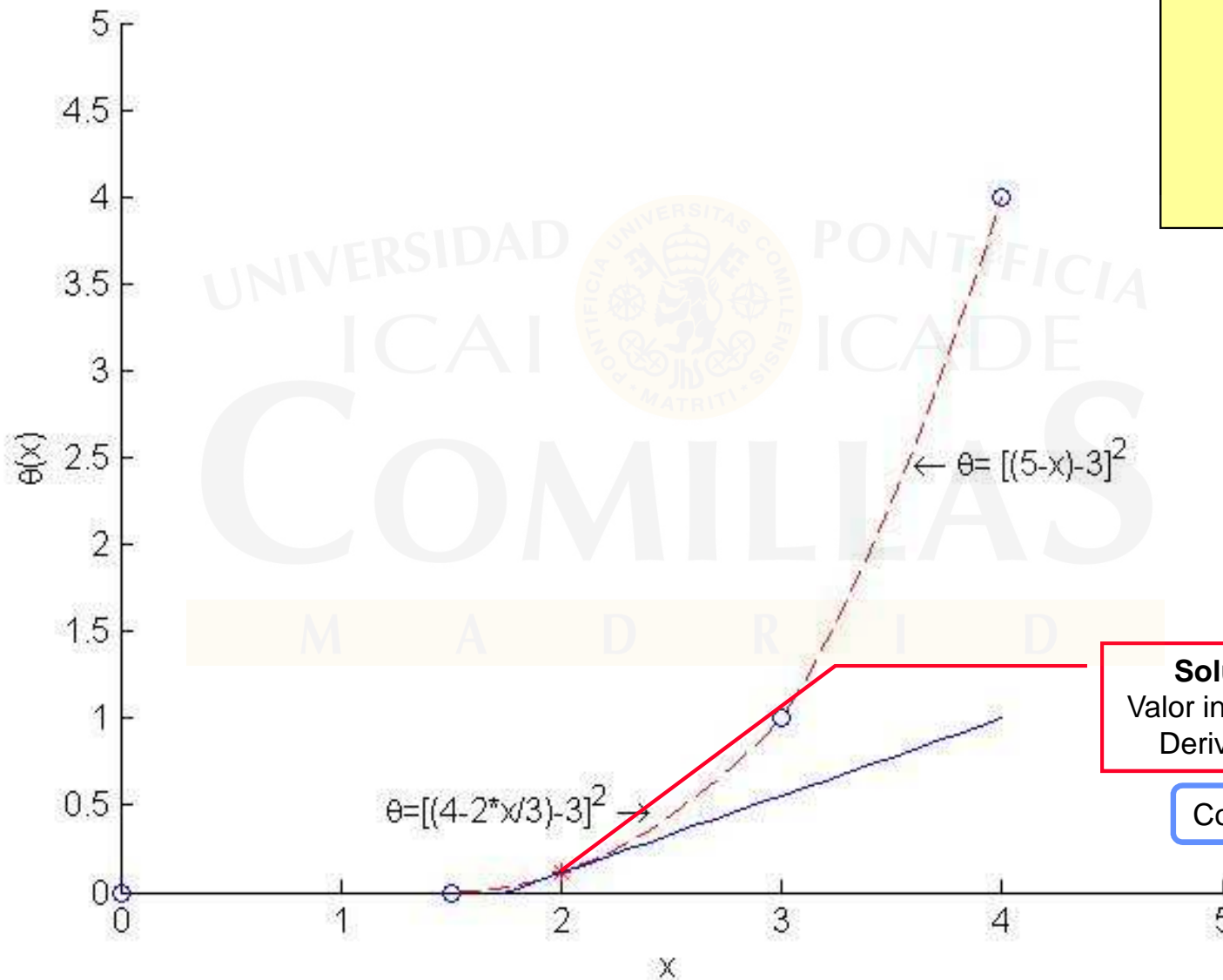
$$\min_x 2(x-3)^2 + \theta(x)$$
$$x \leq 4$$
$$x \geq 0$$



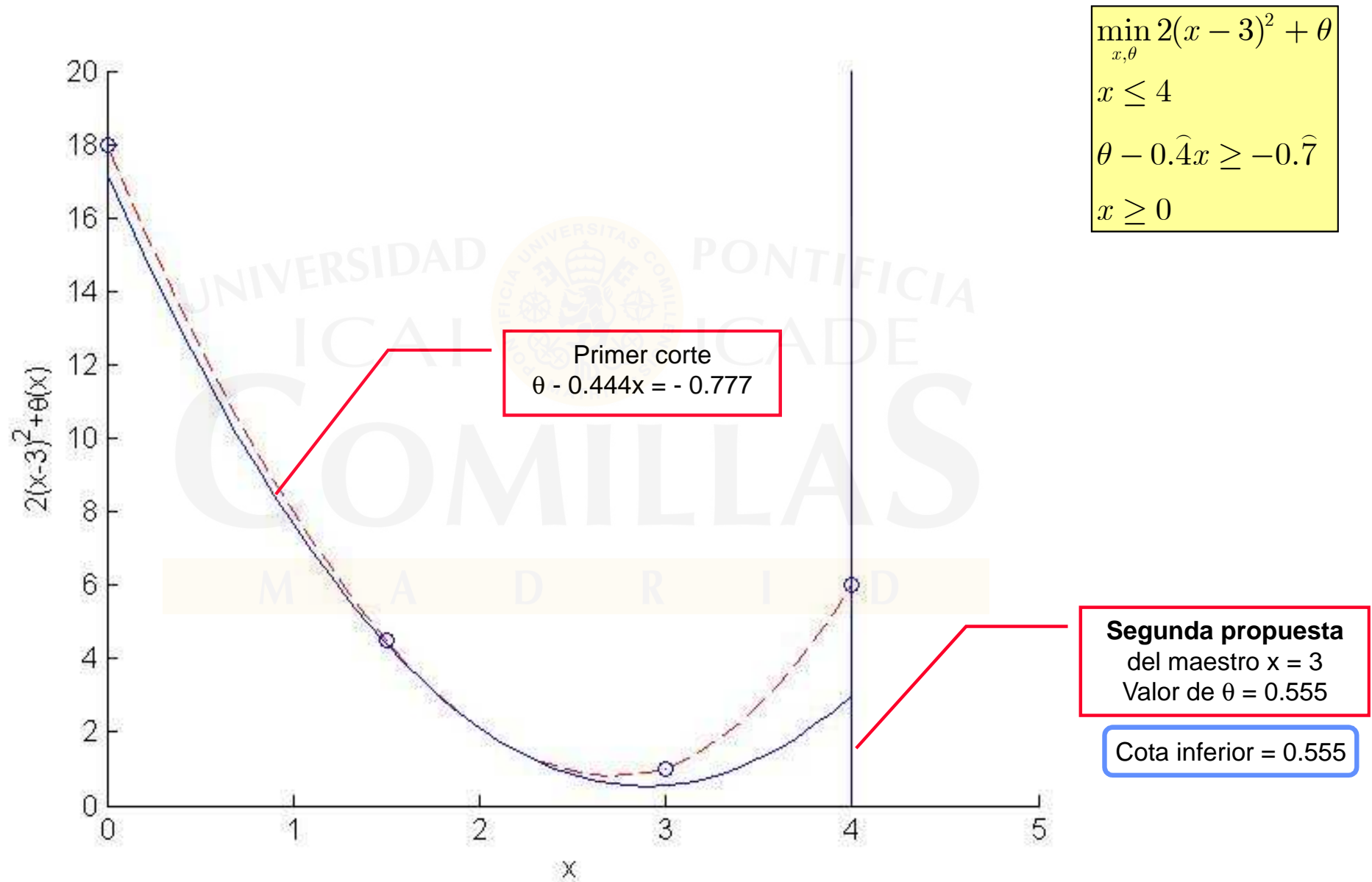
Todos los infinitos cortes de Benders
¡DESCONOCIDOS!

Caso ejemplo 2: función de recursos iteración 1

$$\theta(x) = \min_y (y - 3)^2$$
$$y \leq 5 - 2x$$
$$3y \leq 12 - 2 \cdot 2x$$
$$y \geq 0$$



Caso ejemplo 2: problema maestro iteración 1



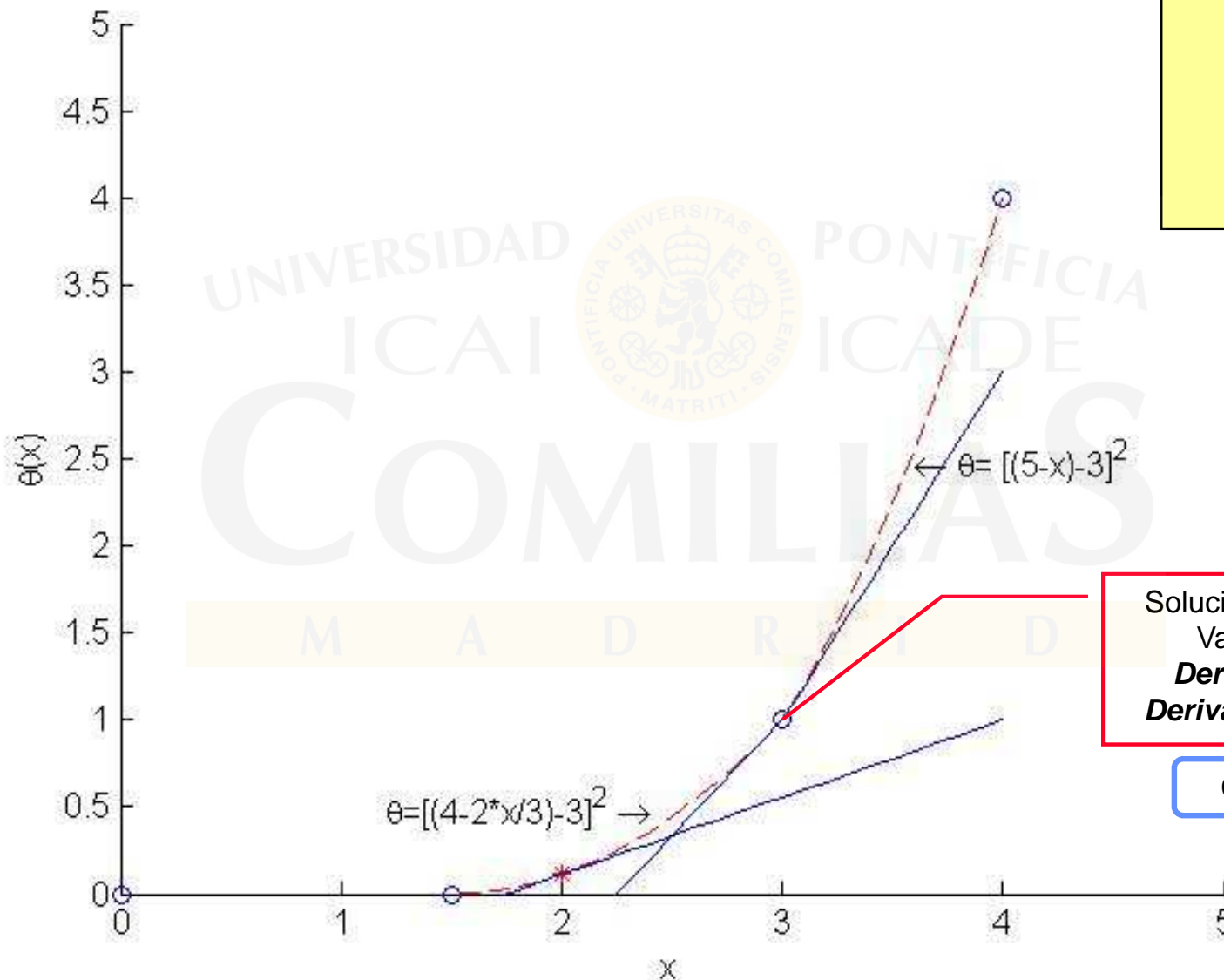
Caso ejemplo 2: función de recursos iteración 2

$$\theta(x) = \min_y (y - 3)^2$$

$$y \leq 5 - 3$$

$$3y \leq 12 - 2 \cdot 3$$

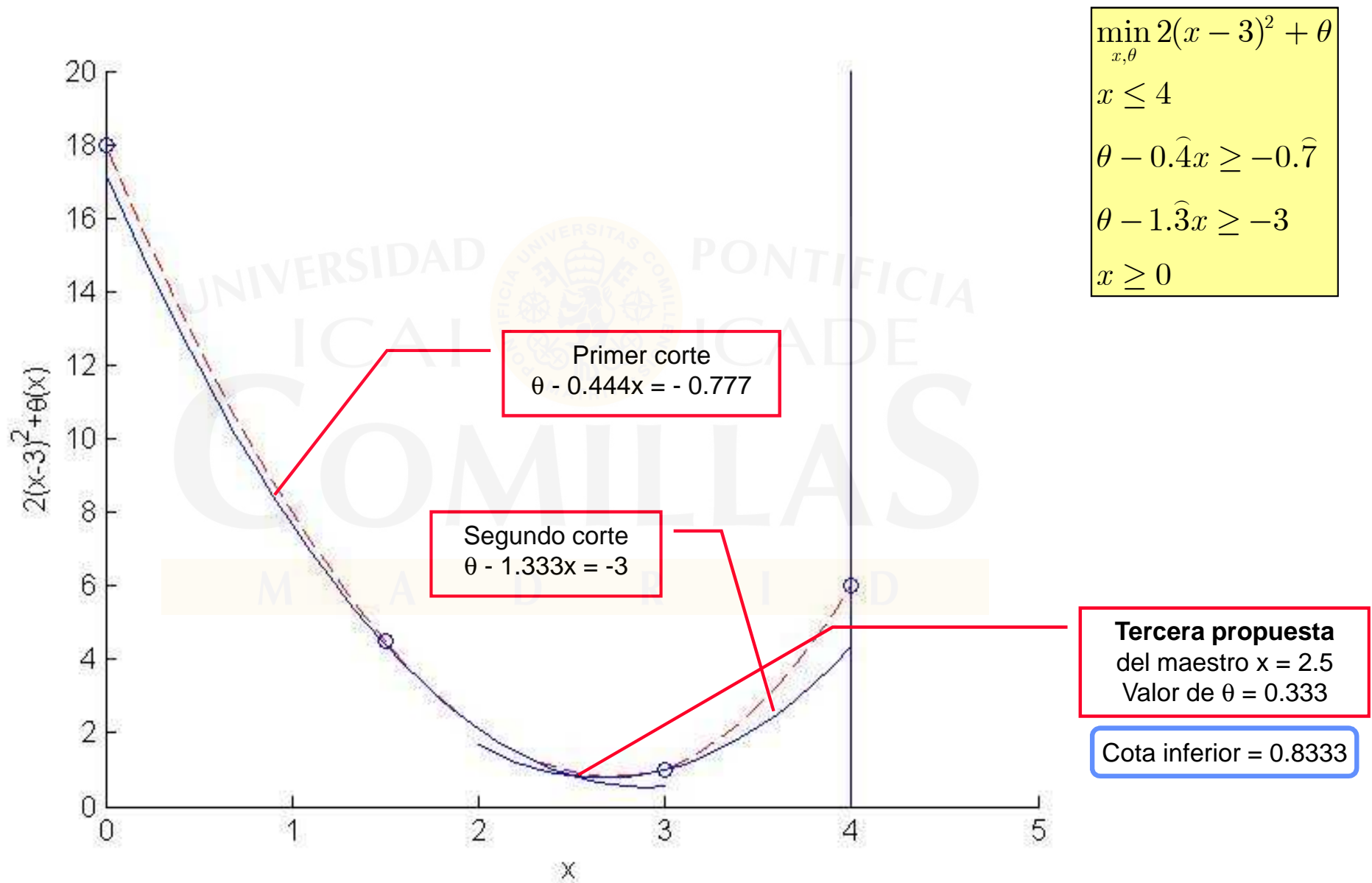
$$y \geq 0$$



Solución degenerada $x = 3$
 Valor de $\theta(x=3) = 1$
Derivada + c.r.a. $x = 2$
Derivada - c.r.a. $x = 1.333$

Cota superior 1

Caso ejemplo 2: problema maestro iteración 2



Problema de transporte con coste fijo

- Problema completo

$$\min_{x_{ij}, y_{ij}} \sum_{ij} (c_{ij} x_{ij} + f_{ij} y_{ij})$$

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} \geq b_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij} \quad \forall ij$$

$$x_{ij} \geq 0, y_{ij} \in \{0, 1\}$$

Problema de transporte de coste fijo

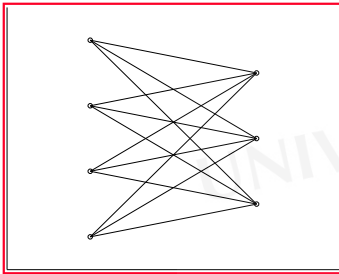
- Maestro
$$\min_{y_{ij}, \theta} \theta + \sum_{ij} f_{ij} y_{ij}$$
$$\delta^l \theta + \sum_{ij} \pi_{ij}^l M_{ij} y_{ij} \geq f^l + \sum_{ij} \pi_{ij}^l M_{ij} y_{ij}^l \quad l = 1, \dots, k$$
$$y_{ij} \in \{0, 1\}$$

- Subproblema

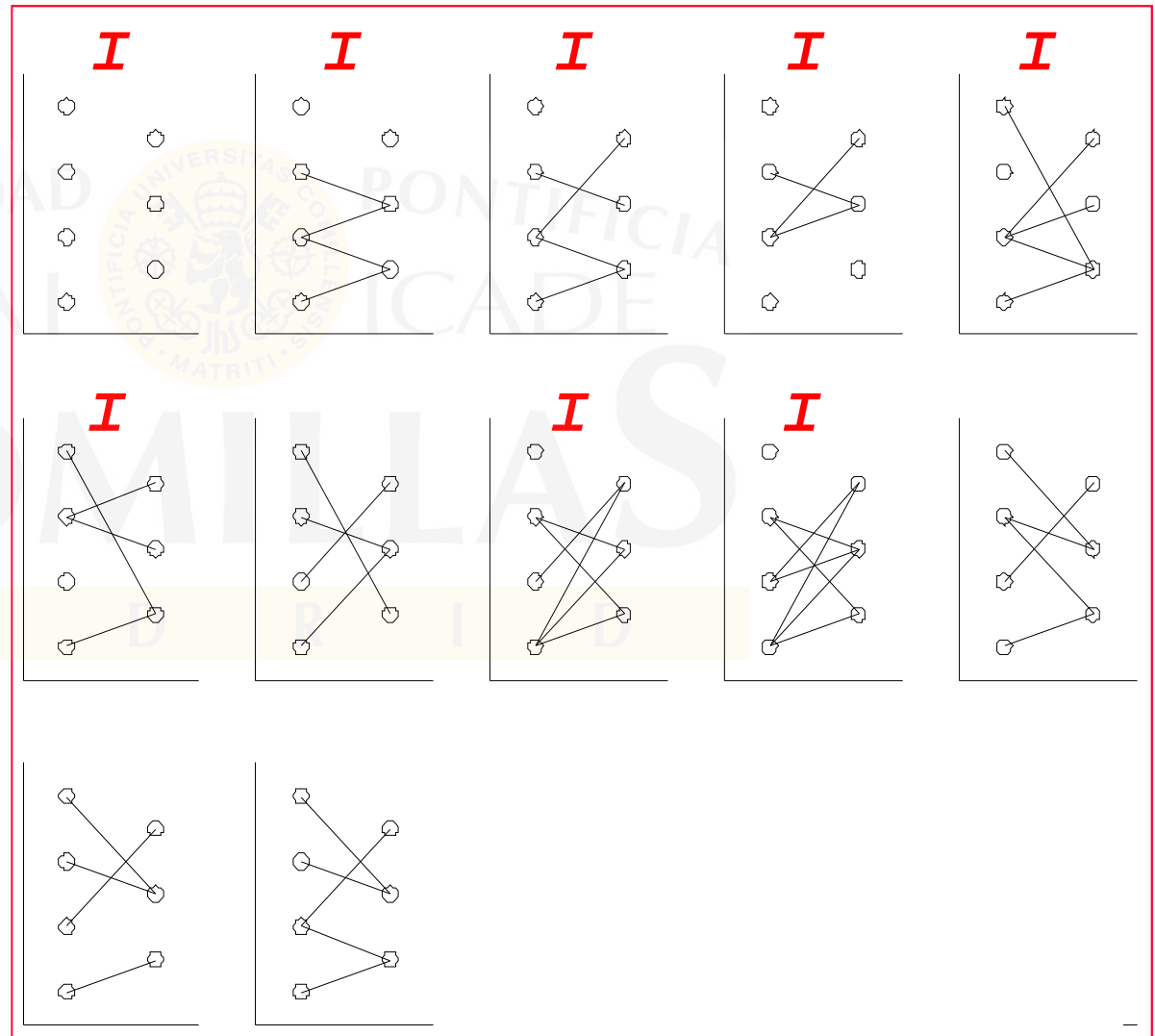
$$\min_{x_{ij}} \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \quad \forall i$$
$$\sum_i x_{ij} \geq b_j \quad \forall j$$
$$x_{ij} \leq M_{ij} y_{ij}^k \quad \forall ij \quad : \pi_{ij}^k$$
$$x_{ij} \geq 0$$

Caso de estudio. Solución

- Arcos posibles

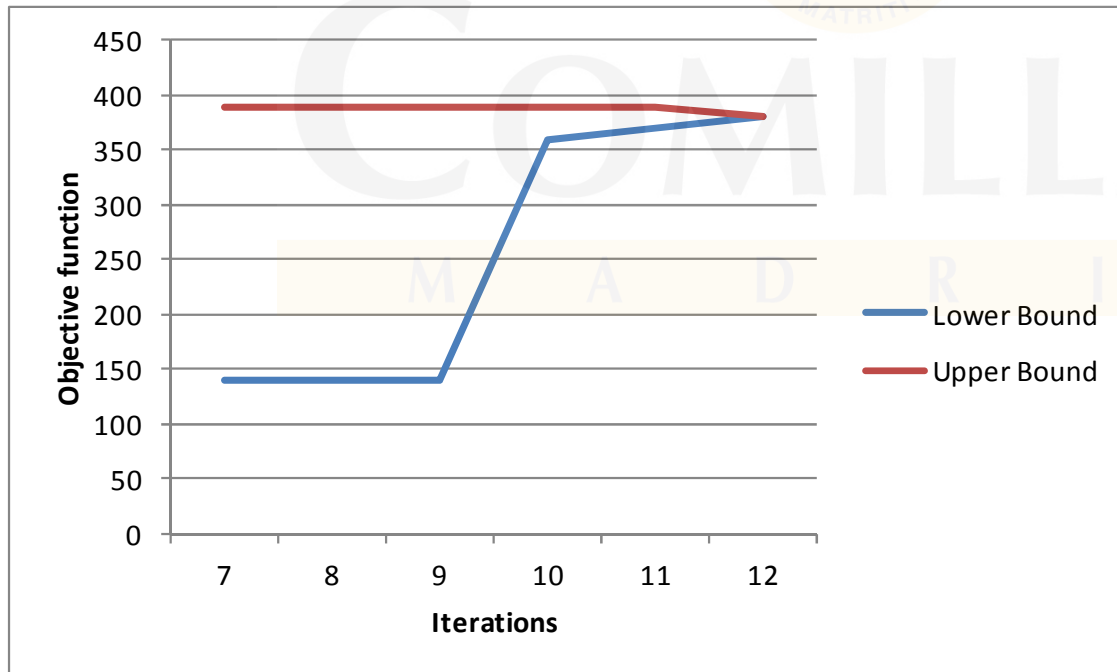


- Soluciones durante las iteraciones de la descomposición

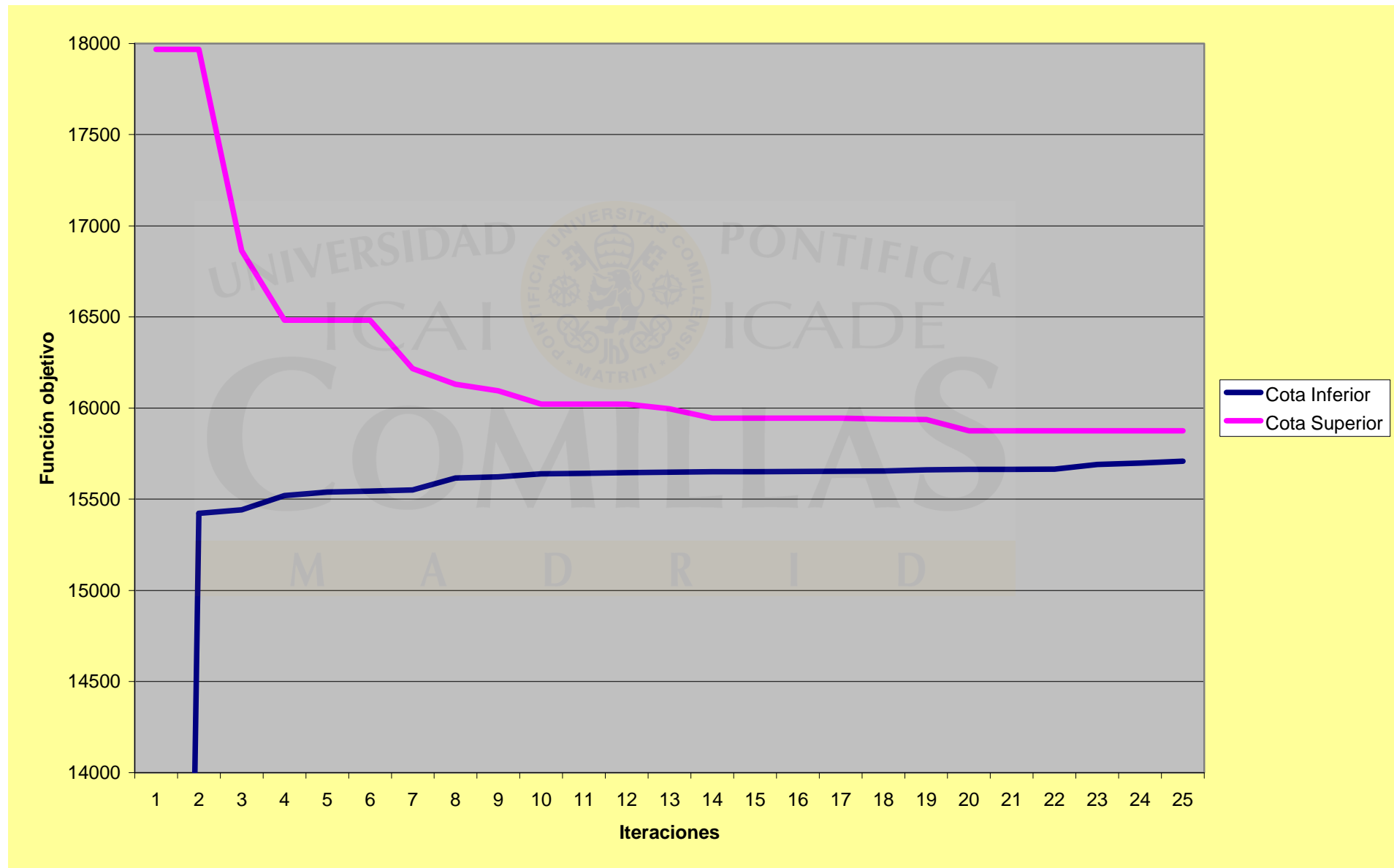


Caso de estudio. Convergencia

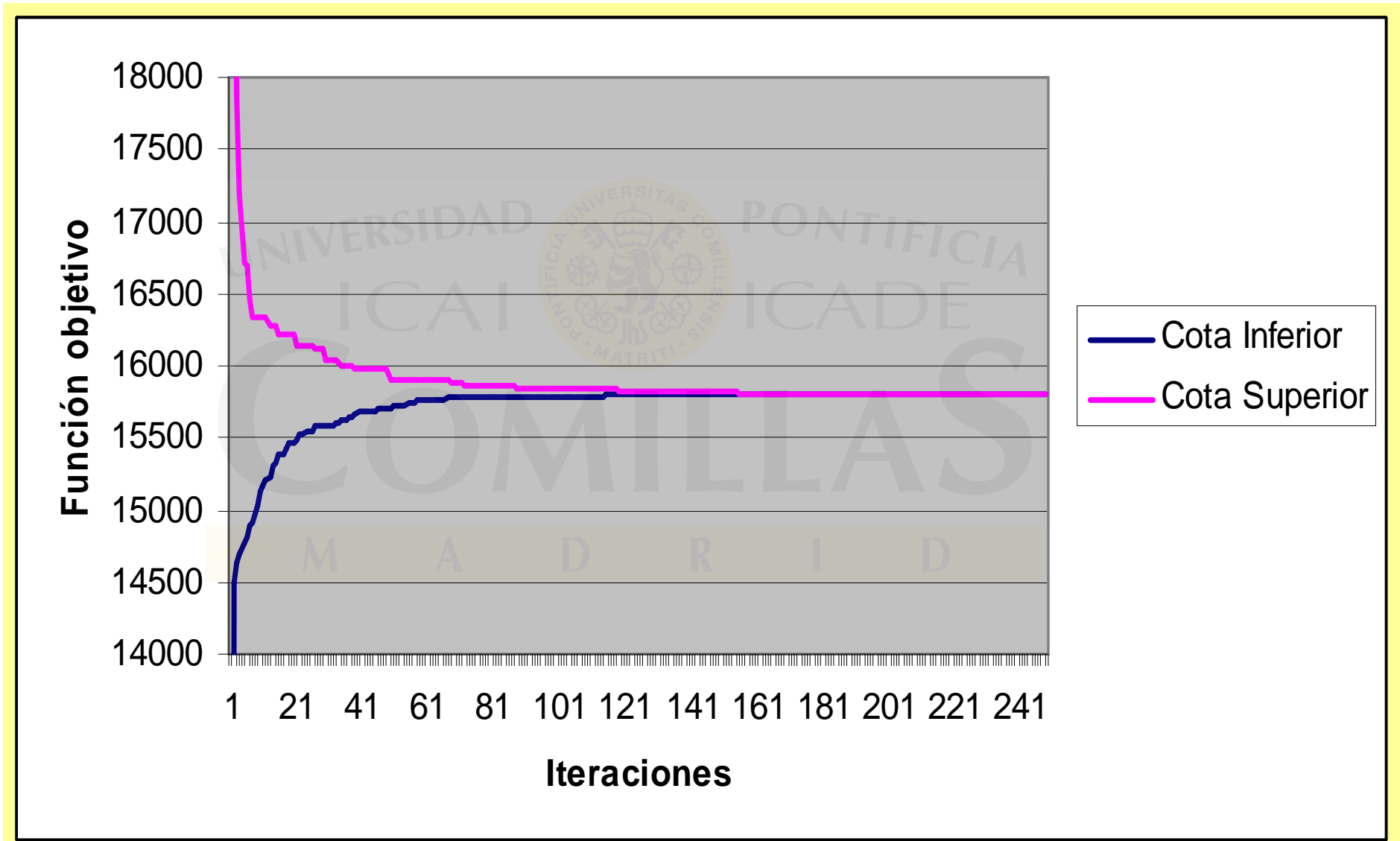
Iteration	Lower Bound	Upper Bound
1 a 6	$-\infty$	∞
7	140	390
8	140	390
9	140	390
10	360	390
11	370	390
12	380	380



Convergencia de modelo de coord. hidrotérm.



Convergencia de modelo de coord. hidrotérm.



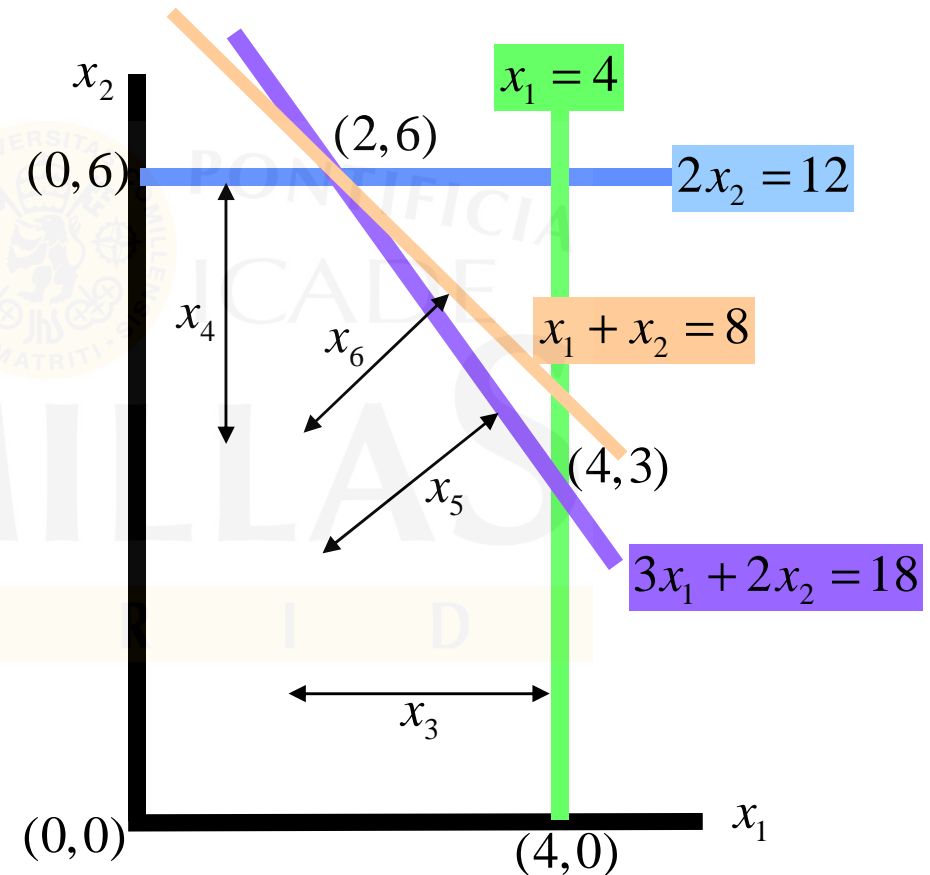
Achtung! Achtung!

- **Degeneración** en problemas LP
 - En casos reales es frecuente la aparición de múltiples óptimos (degeneración del problema primal o múltiples soluciones en el dual) con la misma o con diferente base. Dado que estas técnicas se basan en variables duales hay que ser especialmente cauteloso en su cálculo
 - Por ejemplo, en un modelo de coordinación hidrotérmica formulado como LP puede existir degeneración espacial (se puede producir con una central o con otra) y temporal (se puede producir ahora o en el futuro)

Degeneración

- La variable x_6 es degenerada (variable básica con valor 0)

$\min z = -3x_1 - 5x_2$					
x_1		$+x_3$			$= 4$
	$2x_2$		$+x_4$		$= 12$
$3x_1$	$+2x_2$			$+x_5$	$= 18$
x_1	$+x_2$				$+x_6 = 8$
$x_1,$	$x_2,$	$x_3,$	$x_4,$	$x_5,$	$x_6 \geq 0$



VARIABLES DUALES DEL PROBLEMA LINEAL BIETAPA (i)

- Variables duales del problema completo

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} & (c_1^T x_1 + c_2^T x_2) \\ A_1 x_1 & = b_1 \quad : \hat{\pi}_1 \\ B_1 x_1 + A_2 x_2 & = b_2 \quad : \hat{\pi}_2 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

- Al descomponer no podemos calcular las variables duales del problema completo con respecto a las ecuaciones de la segunda etapa.

Variables duales del problema lineal bietapa (ii)

- Problema maestro

$$\begin{aligned} \min_{x_1, y_1, \theta_2} \quad & c_1^T x_1 + \theta_2 \\ & A_1 x_1 = b_1 \quad : \pi_1 \\ & B_1 x_1 - I y_1 = 0 \quad : \rho_1 \\ & \pi_2^{lT} y_1 + \theta_2 \geq \pi_2^{lT} b_2 \quad l = 1, \dots, j \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

- Subproblema

$$\begin{aligned} \min_{x_2, z_2} \quad & c_2^T x_2 \\ & A_2 x_2 + y_1 z_2 = b_2 \quad : \pi_2 \\ & z_2 = 1 \quad : \mu_2 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Variables duales del problema completo

$$\hat{\pi}^* = \begin{bmatrix} \hat{\pi}_1^* \\ \hat{\pi}_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1^* \\ \rho_1^* \end{bmatrix}$$

Variables duales del problema lineal bietapa (iii)

- Variables duales en descomposición. No son iguales las del completo con respecto a las variables del subproblema que las de la función de recursos con respecto a las del subproblema
- Variables duales de restricciones de 2ª etapa son combinación lineal de variables duales de restricciones de cortes de Benders

¿Cuándo se utiliza la descomposición de Benders?

- variables x_1 complican la resolución del problema
- implícitamente $n_1 \ll n_2$
- número de iteraciones relacionado con n_1
- estructura en escalera induce separabilidad de subproblemas
- maestro y subproblema tienen naturaleza distinta
 - maestro en variables discretas (MIP)
 - subproblema con función objetivo no lineal (NLP)
- descomposición generalizada de Benders cuando f.o. convexa y región factible convexa en el subproblema

Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- **Descomposición de Dantzig-Wolfe**
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Descomposición de Dantzig-Wolfe

- Descomposición
 - dual (porque se envía información dual),
 - por precios (porque el maestro asigna precios),
 - generación de columnas (porque el maestro aumenta el número de variables en cada iteración),
 - linealización interna (se manejan puntos que son combinaciones de los vértices)
- Divide PL-2 en maestro y subproblema

M A D R I D

Descomposición de Dantzig-Wolfe

- Restricciones primera etapa complican la resolución

$$\begin{array}{l} \min_{x_1} c_1^T x_1 \\ A_1 x_1 = b_1 \\ A_2 x_1 = b_2 \\ x_1 \geq 0 \end{array}$$

- Implícitamente $m_1 \ll m_2$
- Necesita que la f.o. y la región factible de restricciones primera etapa sea convexa
- Los subproblemas puede ser no convexos (MIP, NLP)
- Aplicaciones:
 - planificación descentralizada con coordinación central
 - programación semanal de grupos de generación

Deducción del algoritmo (i)

- Problema lineal PL-2 se puede expresar como

$$\begin{aligned} \min_{x_1} & c_1^T x_1 \\ & A_1 x_1 = b_1 \\ & x_1 \in K \end{aligned}$$

Siendo K la región definida como $K = \{x_1 \mid A_2 x_1 = b_2, x_1 \geq 0\}$

- Todo punto de un poliedro se puede poner como combinación lineal convexa de sus vértices

$$K = \left\{ \sum_{l=1}^{\nu} x_1^l \lambda_l \mid \sum_{l=1}^{\nu} \lambda_l = 1, \lambda_l \geq 0 \right\}$$

Deducción del algoritmo (ii)

- Luego el problema completo PL-2 se expresa como

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_l} \quad & \sum_{l=1}^{\nu} (c_1^T x_1^l) \lambda_l \\ & \sum_{l=1}^{\nu} (A_1 x_1^l) \lambda_l = b_1 \quad : \pi_2 \\ & \sum_{l=1}^{\nu} \lambda_l = 1 \quad : \mu \\ & \lambda_l \geq 0 \quad l = 1, \dots, \nu \end{aligned}$$

- En lugar de calcular todos los vértices éstos se introducen iterativamente
- Se resuelve el problema completo original pero sobre una región factible K cada vez mayor, correspondiente al segundo conjunto de restricciones (que no complican).
- Función objetivo disminuye en cada iteración al introducir una nueva variable, monótona decreciente. Es una cota superior de la del problema completo.

Deducción del algoritmo (iii)

- Condición de optimalidad del problema maestro: costes reducidos para las variables no básicas ≥ 0 en problema de minimización

$$c_1^T x_1^* - \begin{pmatrix} \pi_2^T & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 x_1^* \\ 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\theta_2 = \min_{x_1 \in K} (c_1^T - \pi_2^T A_1) x_1 - \mu$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \min_{x_1} (c_1^T - \pi_2^{jT} A_1) x_1 - \mu^j \\ A_2 x_1 &= b_2 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

- El subproblema obtiene en cada iteración el vértice con el menor coste reducido y éste se incorpora al maestro. Cuando la función objetivo del subproblema es positiva o nula se ha alcanzado el óptimo.

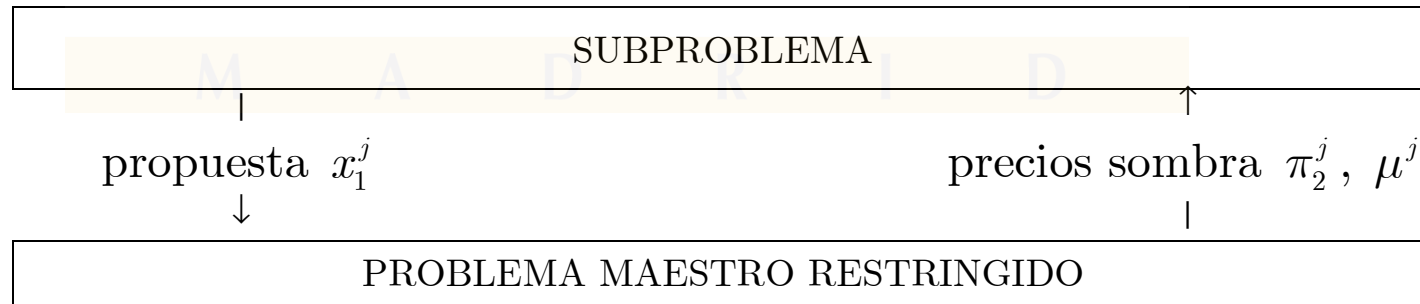
Maestro y subproblema DW

- Maestro relajado

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_l} \quad & \sum_{l=1}^j (c_1^T x_1^l) \lambda_l \\ \sum_{l=1}^j \quad & (A_1 x_1^l) \lambda_l = b_1 \quad : \pi_2 \\ \sum_{l=1}^j \quad & \lambda_l = 1 \quad : \mu \\ \lambda_l \geq 0 \quad & l = 1, \dots, j \end{aligned}$$

Subproblema

$$\begin{aligned} \theta_2 = \min_{x_1} \quad & (c_1^T - \pi_2^j A_1) x_1 - \mu^j \\ A_2 x_1 \quad & = b_2 \\ x_1 \geq 0 \end{aligned}$$



Maestro y subproblema DW

- Maestro:
 - combinación lineal de soluciones y restricciones primera etapa (**linealización interior**)
 - genera señales económicas (variables duales)
 - cada iteración añade una variable
 - puede tener **problemas de factibilidad** en primeras iteraciones
 - **Debe ser convexo**
- Subproblema:
 - función objetivo **costes reducidos**
 - restricciones segunda etapa
 - planifica descentralizadamente internalizando estas señales
 - cada iteración cambia la función objetivo
 - **Puede ser no convexo**

Solución óptima DW

- La solución óptima es la combinación lineal de las soluciones de todas las iteraciones

$$x_1^* = \sum_{l=1}^j x_1^l \lambda_l$$

$$z_1^* = \sum_{l=1}^j (c_1^T x_1^l) \lambda_l$$

Comparación entre Bd y DW

- Problema original PL-2: $(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$
- Por cada iteración de Bd
 - aumenta en 1 el número de restricciones del problema maestro
 - se modifican las cotas de las restricciones del subproblema
 - Maestro: $(m_1 + j) \times (n_1 + 1)$
 - Subproblema: $m_2 \times n_2$
- Por cada iteración de DW
 - aumenta en 1 el número de variables del problema maestro
 - se modifica la función objetivo del subproblema
 - Maestro: $(m_1 + 1) \times j$
 - Subproblema: $m_2 \times n_1$

Deducción del algoritmo (i)

- Sea el problema original

$$\begin{aligned} \min_{x_1} c_1^T x_1 \\ A_1 x_1 = b_1 \quad : \pi_2'^T \\ x_1 \in K \end{aligned}$$

- Formulamos el **lagrangiano**

$$L(x_1, \pi_2') = c_1^T x_1 + \pi_2'^T (A_1 x_1 - b_1)$$

- La **función dual** (cóncava) será

$$\begin{aligned} \theta_2(\pi_2') &= \min_{x_1 \in K} L(x_1, \pi_2') = c_1^T x_1 + \pi_2'^T (A_1 x_1 - b_1) \\ &= -\pi_2'^T b_1 + \min_{x_1 \in K} (c_1^T + \pi_2'^T A_1) x_1 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} \theta_2(\pi_2) &= \min_{x_1} (c_1^T - \pi_2^T A_1) x_1 + \pi_2^T b_1 \\ & \quad A_2 x_1 = b_2 \\ & \quad x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

SUBPROBLEMA

Deducción del algoritmo (ii)

- El óptimo de la **función dual** se alcanza en uno de sus vértices

$$\theta_2(\pi_2) = \pi_2^T b_1 + \min_{x_1^l} (c_1^T - \pi_2^T A_1) x_1^l$$

$$l = 1, \dots, \nu$$

- Se puede expresar como

$$\begin{aligned} \theta_2(\pi_2) &\leq \pi_2^T b_1 + (c_1^T - \pi_2^T A_1) x_1^1 \\ \theta_2(\pi_2) &\leq \pi_2^T b_1 + (c_1^T - \pi_2^T A_1) x_1^2 \\ &\vdots \\ \theta_2(\pi_2) &\leq \pi_2^T b_1 + (c_1^T - \pi_2^T A_1) x_1^\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{\theta_2, \pi_2} \theta_2 \\ \theta_2 + (A_1 x_1^1 - b_1)^T \pi_2 &\leq c_1^T x_1^1 \quad : \lambda_1 \\ \theta_2 + (A_1 x_1^2 - b_1)^T \pi_2 &\leq c_1^T x_1^2 \quad : \lambda_2 \\ &\vdots \\ \theta_2 + (A_1 x_1^\nu - b_1)^T \pi_2 &\leq c_1^T x_1^\nu \quad : \lambda_\nu \end{aligned}$$

- Tomando el dual se obtiene el **problema maestro**

$$\begin{aligned} \min_{\lambda_l} \sum_{l=1}^{\nu} (c_1^T x_1^l) \lambda_l \\ \sum_{l=1}^{\nu} \lambda_l = 1 \quad &: \mu = \theta_2 \\ \sum_{l=1}^{\nu} (A_1 x_1^l - b_1) \lambda_l = 0 \quad &: \pi_2 \\ \lambda_l \geq 0 \quad &l = 1, \dots, \nu \end{aligned}$$

**PROBLEMA
MAESTRO**

Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- **Relajación lagrangiana**
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Deducción del algoritmo (i)

- Partimos del óptimo de la función dual

$$\begin{aligned} \max_{\theta_2, \pi_2} \theta_2 \\ \theta_2 + (A_1 x_1^1 - b_1)^T \pi_2 &\leq c_1^T x_1^1 & : \lambda_1 \\ \theta_2 + (A_1 x_1^2 - b_1)^T \pi_2 &\leq c_1^T x_1^2 & : \lambda_2 \\ \vdots \\ \theta_2 + (A_1 x_1^\nu - b_1)^T \pi_2 &\leq c_1^T x_1^\nu & : \lambda_\nu \end{aligned}$$

o bien haciendo el cambio $\theta_2 = b_1^T \pi_2 + \mu$

$$\begin{aligned} \max_{\pi_2, \mu} b_1^T \pi_2 + \mu \\ (A_1 x_1^1)^T \pi_2 + \mu &\leq c_1^T x_1^1 & : \lambda_1 \\ (A_1 x_1^2)^T \pi_2 + \mu &\leq c_1^T x_1^2 & : \lambda_2 \\ \vdots \\ (A_1 x_1^\nu)^T \pi_2 + \mu &\leq c_1^T x_1^\nu & : \lambda_\nu \end{aligned}$$

Deducción del algoritmo (ii)

- Problema maestro restringido

$$\begin{aligned} \max_{\theta_2, \pi_2} \theta_2 \\ \theta_2 + (A_1 x_1^l - b_1)^T \pi_2 \leq c_1^T x_1^l \quad : \lambda_l \quad l = 1, \dots, j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{\pi_2, \mu} b_1^T \pi_2 + \mu \\ (A_1 x_1^l)^T \pi_2 + \mu \leq c_1^T x_1^l \quad : \lambda_l \quad l = 1, \dots, j \end{aligned}$$

- Las restricciones se denominan cortes duales o cortes de optimalidad lagrangianos.
- La formulación es el método de planos de corte de Kelly.
- Para evitar problemas no acotados, se introducen cortes de acotamiento

$$\begin{aligned} \max_{\theta_2, \pi_2} \theta_2 \\ \delta_1^l \theta_2 + (A_1 x_1^l - \delta_1^l b_1)^T \pi_2 \leq c_1^T x_1^l \quad : \lambda_l \quad l = 1, \dots, j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{\pi_2, \mu} b_1^T \pi_2 + \mu \\ (A_1 x_1^l)^T \pi_2 + \delta_1^l \mu \leq c_1^T x_1^l \quad : \lambda_l \quad l = 1, \dots, j \end{aligned}$$

- $\delta_1^l = 1$ cortes duales, $\delta_1^l = 0$ cortes de acotamiento

Deducción del algoritmo (iii)

- Subproblema

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \min_{x_1} (c_1^T - \pi_2^{jT} A_1) x_1 + \pi_2^{jT} b_1 \\ A_2 x_1 &= b_2 \\ x_1 &\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \min_{x_1} (c_1^T - \pi_2^{jT} A_1) x_1 - \mu^j \\ A_2 x_1 &= b_2 \\ x_1 &\geq 0\end{aligned}$$

Maestro y subproblemas RL

- Maestro:
 - dual del maestro de DW
 - genera señales económicas (variables primales)
 - cada iteración añade una restricción (corte dual).
 - función objetivo monótona decreciente
 - linealización exterior del subproblema
- Subproblema:
 - función objetivo costes reducidos o costes totales menos precio recursos
 - planifica descentralizadamente internalizando estas señales
 - restricciones segunda etapa
 - en cada iteración cambia la función objetivo
 - Puede ser no convexo

Comparación entre DW y RL

- Problema original: $(m_1 + m_2) \times n_1$
- Por cada iteración de RL
 - aumenta en 1 el número de restricciones del problema maestro
 - Método simplex dual
 - Maestro: $j \times (m_1 + 1)$
 - se modifica la función objetivo del subproblema
 - Método simplex primal
 - Subproblema: $m_2 \times n_1$
- Comparación con DW
 - DW: variables duales son duales del maestro (degeneración)
 - RL: variables duales son primales del maestro

Solución óptima de RL

- Solución **óptima** de RL **no necesariamente factible** en restricciones que complican $A_1 x_1 = b_1$
 - Introducir penalización de las mismas en la f.o. del subproblema (**lagrangiano aumentado**). Además consigue diferenciabilidad
 - **Postprocesado** de la solución óptima

Método del subgradiente

- Utiliza técnicas de NLP para obtener las variables duales

$$\pi_2^{j+1} = \pi_2^j + \alpha_j p_j$$

siendo $p_j = A_1 x_1^j - b_1$ y α_j la longitud de paso

- Actualización de la longitud de paso

$$\alpha_j = \frac{\beta_j [\theta_2(\pi_2^j) - c_1^T x_1^*]}{\sum_m \left(\sum_n a_{mn} x_n^j - b_m \right)^2}$$

Penalización por distancia a mejor solución hasta el momento

Penalización por violación de restricciones

Algoritmo RL

1. Inicialización: $j = 0$ $z = -\infty$ $\bar{z} = \infty$ $\varepsilon = 10^{-4}$

2. Resolución del problema maestro

$$\max_{\theta_2, \pi_2} \theta_2$$

$$\delta_1^l \theta_2 + (A_1 x_1^l - \delta_1^l b_1)^T \pi_2 \leq c_1^T x_1^l \quad : \lambda_l \quad l = 1, \dots, j$$

$$\max_{\pi_2, \mu} b_1^T \pi_2 + \mu$$

$$(A_1 x_1^l)^T \pi_2 + \delta_1^l \mu \leq c_1^T x_1^l \quad : \lambda_l \quad l = 1, \dots, j$$

Obtener la solución π_2

3. Resolución del subproblema de acotamiento

$$\theta_2^*(\pi_2) = \min_{x_1} (c_1^T - \pi_2^T A_1) x_1$$

$$A_2 x_1 \leq 0$$

$$0 \leq x_1 \leq 1$$

Si $\theta_2^*(\pi_2) \geq 0$ ir al paso 4.

Si no, formar corte de acotamiento. $(A_1 x_1^j)^T \pi_2 \leq c_1^T x_1^j$

4. Resolución del subproblema de RL

$$\theta_2 = \min_{x_1} (c_1^T - \pi_2^{jT} A_1) x_1 + \pi_2^{jT} b_1$$

$$A_2 x_1 = b_2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$\theta_2 = \min_{x_1} (c_1^T - \pi_2^{jT} A_1) x_1 - \mu^j$$

$$A_2 x_1 = b_2$$

$$x_1 \geq 0$$

Obtener x_1^j y formar corte dual. $\theta_2 + (A_1 x_1^j - b_1)^T \pi_2 \leq c_1^T x_1^j$

3. Si cumple regla de parada $d(\pi_2^j - \pi_2^{j-1}) < \varepsilon$ detener.

Si no ir a paso 2.

Problema de coste fijo. Formulación del subproblema

$$\min_{x_{ij}, y_{ij}} \sum_{ij} (c_{ij} x_{ij} + f_{ij} y_{ij}) + \lambda_{ij} (x_{ij} - M_{ij} y_{ij})$$

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} \geq b_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0, y_{ij} \in \{0, 1\}$$



$$\min_{x_{ij}, y_{ij}} \sum_{ij} (c_{ij} + \lambda_{ij}) x_{ij} + (f_{ij} - \lambda_{ij} M_{ij}) y_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} \geq b_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0, y_{ij} \in \{0, 1\}$$

$$\min_{x_{ij}} \sum_{ij} (c_{ij} + \lambda_{ij}) x_{ij}$$

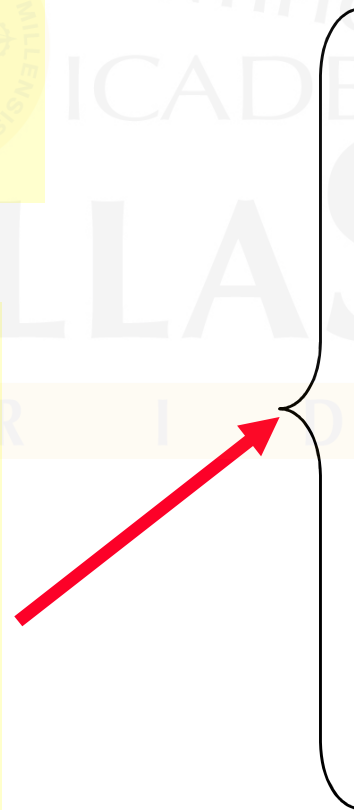
$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} \geq b_j \quad \forall j$$

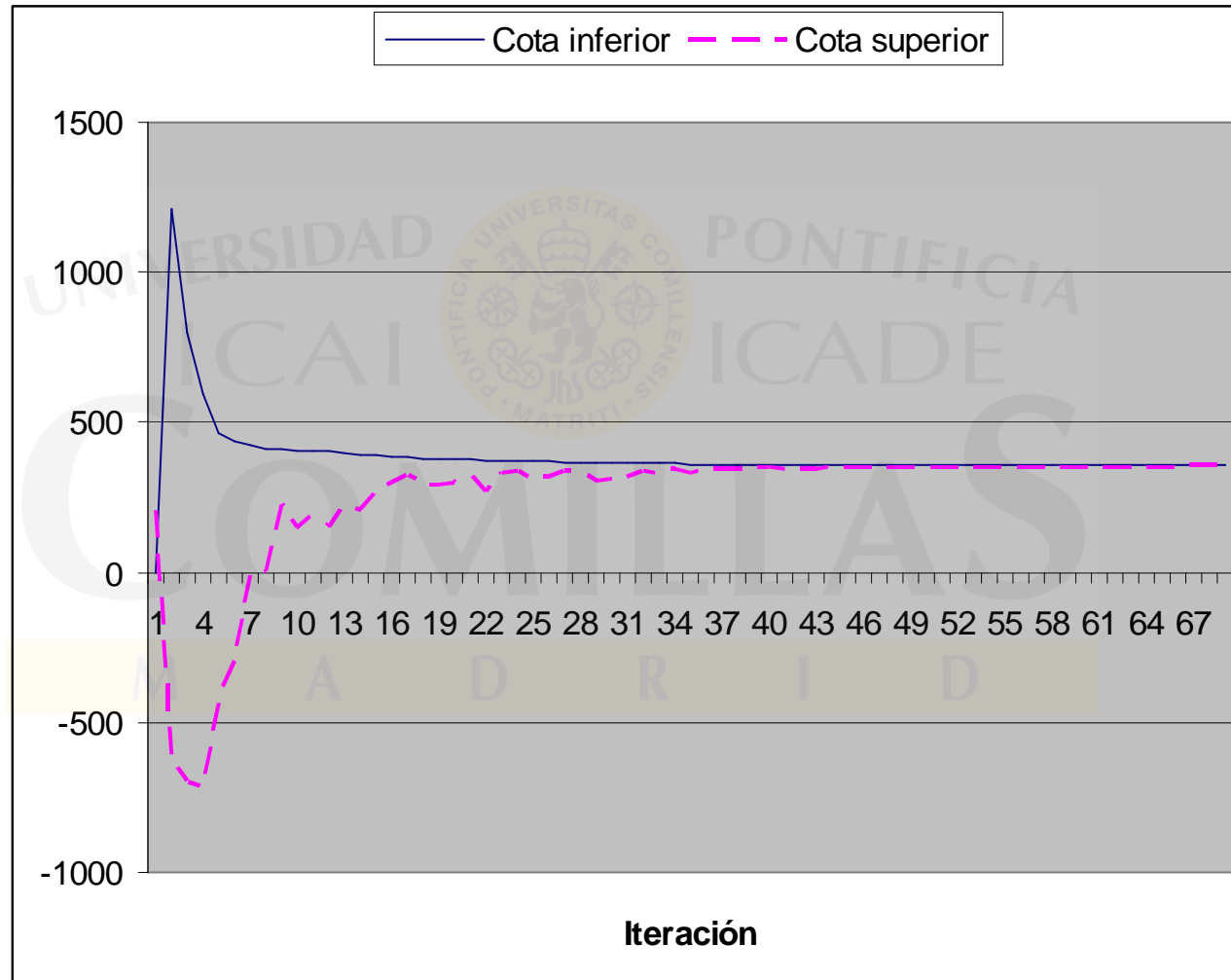
$$x_{ij} \geq 0$$

$$\min_{y_{ij}} \sum_{ij} (f_{ij} - \lambda_{ij} M_{ij}) y_{ij}$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}$$



Problema de coste fijo. Convergencia



Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- **Descomposición anidada**
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Descomposición anidada (i)

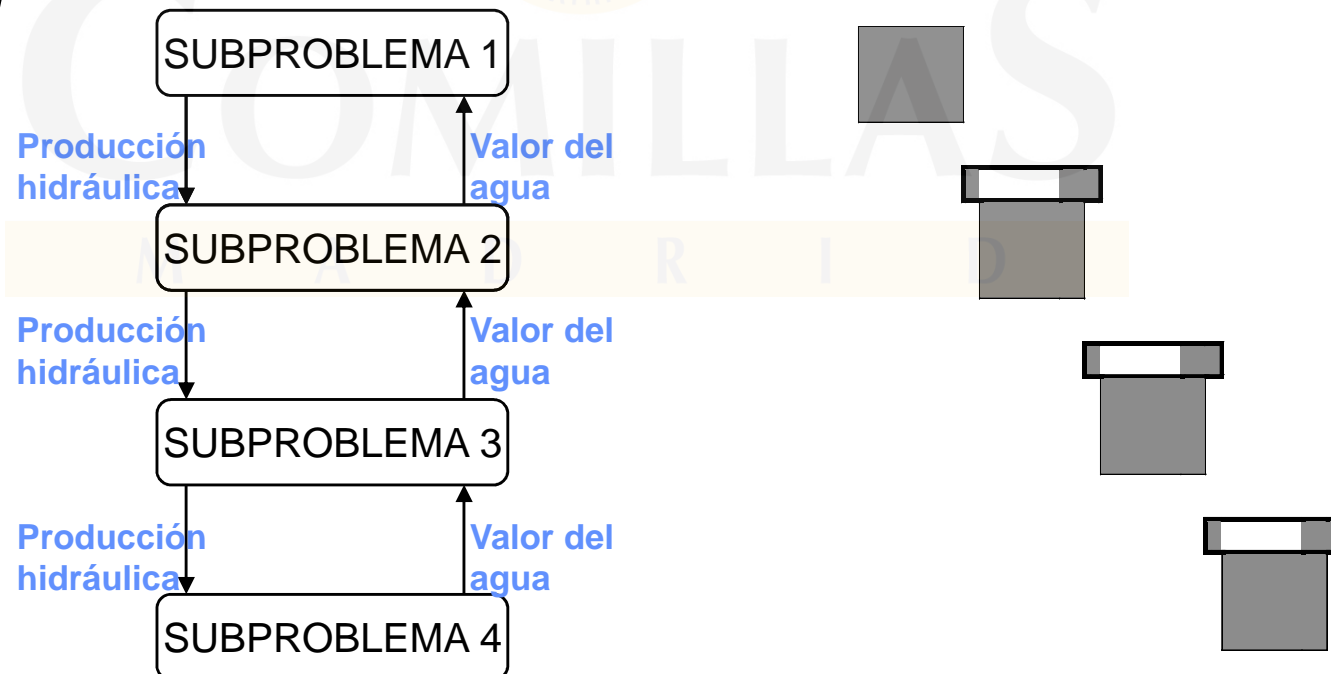
- Aplicación recursiva de técnicas de descomposición.
- Se aplica a cualquiera de los métodos anteriores.
- Supongamos el problema PL-P:

$$\begin{aligned} \min_{x_p} \quad & \sum_{p=1}^P c_p^T x_p \\ & B_{p-1} x_{p-1} + A_p x_p = b_p \quad p = 1, \dots, P \\ & x_p \geq 0 \\ & B_0 \equiv 0 \end{aligned}$$

- Aplicamos **descomposición de Bd**:
 - **Etapa 1 maestro**, etapas 2 a P subproblema
 - **Descomponemos** el subproblema que empieza en etapa 2
 - **Etapa 2 maestro**, etapas 3 a P subproblema
 - **Descomponemos** el subproblema que empieza en etapa 3
 - **Etapa 3 maestro**, etapas 4 a P subproblema
 - **Descomponemos** el subproblema que empieza en etapa 4

Descomposición anidada (ii)

- En la etapa p
 - Se resuelve un problema correspondiente a dicha etapa
 - como maestro recibe cortes de $p+1$ y le pasa la solución a $p+1$,
 - como subproblema genera cortes para $p-1$ y recibe la solución de $p-1$.



Descomposición anidada. Deducción de los cortes (i)

- Sea este problema con 4 etapas

$$\begin{array}{rcl} \min_{x_1, x_2, x_3, x_4} & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + c_3^T x_3 + c_4^T x_4 & \\ A_1 x_1 & & = b_1 \\ B_1 x_1 + A_2 x_2 & & = b_2 \\ & B_2 x_2 + A_3 x_3 & = b_3 \\ & & B_3 x_3 + A_4 x_4 = b_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

- Resolvemos la etapa 4 para una propuesta de etapa 3

$$\begin{array}{rcl} \min_{x_4} & c_4^T x_4 & \\ A_4 x_4 = & b_4 - B_3 x_3 & : \pi_4 \\ x_4 & \geq 0 & \end{array}$$

Descomposición anidada. Deducción de los cortes (ii)

- El problema maestro de la etapa 3 será

$$\begin{aligned} \min_{x_3, \theta_4} c_3^T x_3 + \theta_4 \\ A_3 x_3 = b_3 - B_2 x_2^l \quad : \pi_3 \\ \theta_4 + \pi_4^T B_3 x_3 \geq \pi_4^T b_4 \quad : \eta_3 \\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- La función objetivo del dual es

$$\max_{\pi_3, \eta_3} \pi_3^T (b_3 - B_2 x_2^l) + \eta_3^T (\pi_4^T b_4)$$

- El maestro de las etapa 3 y 4 simultáneas es

$$\begin{aligned} \min_{x_3, x_4} c_3^T x_3 + c_4^T x_4 \\ A_3 x_3 = b_3 - B_2 x_2^l \quad : \pi_3' \\ B_3 x_3 + A_4 x_4 = b_4 \quad : \mu_3 \\ x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- La función objetivo del dual es

$$\max_{\pi_3, \mu_3} \pi_3'^T (b_3 - B_2 x_2^l) + \mu_3^T b_4$$

Descomposición anidada. Deducción de los cortes (iii)

- La f.o. del problema de etapa 3 es cota inferior de la f.o. del problema de etapas 3 y 4 para cualquier valor de x_2

$$\pi_3'^T (b_3 - B_2 x_2) + \mu_3^T b_4 \geq \pi_3^T (b_3 - B_2 x_2) + \eta_3^T (\pi_4^T b_4)$$

- El corte a introducir en la etapa 2 suponiendo 3 y 4 como un único subproblema sería

$$\theta_3 \geq \pi_3'^T (b_3 - B_2 x_2) + \mu_3^T b_4 \geq \pi_3^T (b_3 - B_2 x_2) + \eta_3^T (\pi_4^T b_4)$$

- El siguiente corte es un corte válido

$$\theta_3 + \pi_3^T B_2 x_2 \geq \pi_3^T b_3 + \eta_3^T (\pi_4^T b_4)$$

Descomposición anidada. Deducción de los cortes (iv)

- El problema maestro de la etapa 2 es

$$\begin{aligned} \min_{x_2, \theta_3} \quad & c_2^T x_2 + \theta_3 \\ A_2 x_2 = b_2 - B_1 x_1^l \quad & : \pi_2 \\ \theta_3 + \pi_3^T B_2 x_2 \geq \pi_3^T b_3 + \eta_3^T (\pi_4^T b_4) \quad & : \eta_2 \\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- La función objetivo del dual es

$$\max_{\pi_2, \eta_2} \pi_2^T (b_2 - B_1 x_1^l) + \eta_2^T [\pi_3^T b_3 + \eta_3^T (\pi_4^T b_4)]$$

- El problema maestro de las etapas 2, 3 y 4 simultáneas y su f.o. del dual son

$$\begin{aligned} \min_{x_2, x_3, x_4} \quad & c_2^T x_2 + c_3^T x_3 + c_4^T x_4 \\ A_2 x_2 = b_2 - B_1 x_1^l \quad & : \pi_2' \\ B_2 x_2 + A_3 x_3 = b_3 \quad & : \mu_2 \\ B_3 x_3 + A_4 x_4 = b_4 \quad & : \mu_3 \\ x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\max_{\pi_2', \mu_2, \mu_3} \pi_2'^T (b_2 - B_1 x_1^l) + \mu_2^T b_3 + \mu_3^T b_4$$

Descomposición anidada. Deducción de los cortes (v)

- El corte a introducir en la etapa 1 sería

$$\theta_2 \geq \pi_2^T (b_2 - B_1 x_1) + \mu_2^T b_3 + \mu_3^T b_4 \geq \pi_2^T (b_2 - B_1 x_1) + \eta_2^T [\pi_3^T b_3 + \eta_3^T (\pi_4^T b_4)]$$

- El siguiente corte es un corte válido

$$\theta_2 + \pi_2^T B_1 x_1 \geq \pi_2^T b_2 + \eta_2^T [\pi_3^T b_3 + \eta_3^T (\pi_4^T b_4)]$$

- Los cortes para las etapas 2, 3 y 4 son

$$\begin{aligned}\theta_4 + \pi_4^T B_3 x_3 &\geq \pi_4^T b_4 \\ \theta_3 + \pi_3^T B_2 x_2 &\geq \pi_3^T b_3 + \eta_3^T (\pi_4^T b_4) \\ \theta_2 + \pi_2^T B_1 x_1 &\geq \pi_2^T b_2 + \eta_2^T [\pi_3^T b_3 + \eta_3^T (\pi_4^T b_4)]\end{aligned}$$

$$\theta_{p+1} + \pi_{p+1}^T B_p x_p \geq q_p = \pi_{p+1}^T b_{p+1} + \eta_{p+1}^T q_{p+1}$$

Descomposición anidada. Cortes alternativos

- Poniendo las expresiones de linealización alrededor de un punto

$$\theta_4 + \pi_4^T B_3 x_3 \geq f_4^l + \pi_4^T B_3 x_3^l$$
$$\theta_4 \geq f_4^l + \pi_4^T B_3 (x_3^l - x_3)$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &\geq \pi_3^T (b_3 - B_2 x_2) + \eta_3^T (\pi_4^T b_4) = \\ &= \pi_3^T (b_3 - B_2 x_2 + B_2 x_2^l - B_2 x_2^l) + \eta_3^T (\pi_4^T b_4) = \\ &= \pi_3^T (b_3 - B_2 x_2^l) + \pi_3^T B_2 (x_2^l - x_2) + \eta_3^T (\pi_4^T b_4) = \\ &= f_3^l + \pi_3^T B_2 (x_2^l - x_2) \end{aligned}$$

$$\theta_{p+1} \geq f_{p+1}^l + \pi_{p+1}^T B_p (x_p^l - x_p)$$
$$\theta_{p+1} + \pi_{p+1}^T B_p x_p \geq f_{p+1}^l + \pi_{p+1}^T B_p x_p^l$$

Descomposición anidada

- Subproblema genérico a resolver

$$\begin{aligned}
 & \min_{x_p, \theta_{p+1}} c_p^T x_p + \theta_{p+1} \\
 & A_p x_p = b_p - B_{p-1} x_{p-1}^l \quad : \pi_p \\
 & \pi_{p+1}^{lT} B_p x_p + \theta_{p+1} \geq q_p = \pi_{p+1}^{lT} b_{p+1} + \eta_{p+1}^{lT} q_{p+1} \quad : \eta_p \quad l = 1, \dots, j \\
 & x_p \geq 0 \\
 & \theta_{p+1} \equiv 0 \\
 & B_0 \equiv 0 \\
 & \pi_{p+1}^l \equiv 0 \\
 & \eta_{p+1}^l \equiv 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \min_{x_p, \theta_{p+1}} c_p^T x_p + \theta_{p+1} \\
 & A_p x_p = b_p - B_{p-1} x_{p-1}^l \quad : \pi_p \\
 & \pi_{p+1}^{lT} B_p x_p + \theta_{p+1} \geq f_{p+1}^l + \pi_{p+1}^{lT} B_p x_p^l \quad : \eta_p \quad l = 1, \dots, j \\
 & x_p \geq 0 \\
 & \theta_{p+1} \equiv 0 \\
 & B_0 \equiv 0 \\
 & \pi_{p+1}^l \equiv 0 \\
 & \eta_{p+1}^l \equiv 0
 \end{aligned}$$

- El problema converge cuando lo hace la primera etapa

Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- **Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa**
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Planificación lineal estocástica bietapa

- F.O. minimiza costes primera etapa y **valor esperado** de los costes de la segunda

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2^\omega} & c_1^T x_1 + \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega c_2^{\omega T} x_2^\omega \\ & A_1 x_1 = b_1 \\ & B_1^\omega x_1 + A_2^\omega x_2^\omega = b_2^\omega \\ & x_1, x_2^\omega \geq 0 \end{aligned}$$

- Si A_2^ω no depende de ω se denomina de **recurso fijo**
- Estructura de la **matriz de restricciones**

$$\begin{array}{cccc} A_1 & & & \\ B_1^1 & A_2^1 & & \\ B_1^2 & & A_2^2 & \\ B_1^3 & & & A_2^3 \end{array}$$

Descomposición de PLE-2

- Maestro monocorte

$$\begin{aligned}
 \min_{x_1, \theta_2} c_1^T x_1 + \theta_2 \\
 A_1 x_1 &= b_1 \\
 \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega \pi_2^{\omega l T} B_1^\omega x_1 + \theta_2 &\geq \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega \pi_2^{\omega l T} b_2^\omega \quad l = 1, \dots, j \\
 x_1 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- y multicorte

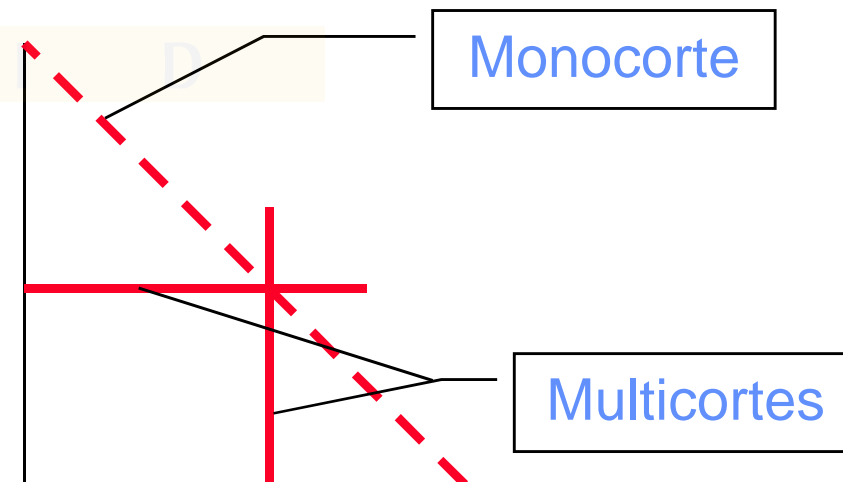
$$\begin{aligned}
 \min_{x_1, \theta_2^\omega} c_1^T x_1 + \sum_{\omega \in \Omega} p^\omega \theta_2^\omega \\
 A_1 x_1 &= b_1 \\
 \pi_2^{\omega l T} B_1^\omega x_1 + \theta_2^\omega &\geq \pi_2^{\omega l T} b_2^\omega \quad \omega \in \Omega \quad l = 1, \dots, j \\
 x_1 &\geq 0
 \end{aligned}$$

- Subproblema

$$\begin{aligned}
 \min_{x_2^\omega} c_2^{\omega T} x_2^\omega \\
 A_2^\omega x_2^\omega &= b_2^\omega - B_1^\omega x_1^l \quad : \pi_2^\omega \\
 x_2^\omega &\geq 0
 \end{aligned}$$

Monocorte vs. multicorte

- Monocorte $(m_1+j)x(n_1+1)$. Multicorte $(m_1+j\Omega)x(n_1+\Omega)$
- Multicorte conveniente cuando m_2 grande y Ω no mucho mayor que n_1
- Da lugar a menos iteraciones de Bd pero más costosas
- Multicorte acota independientemente cada escenario. Monocorte acota la suma ponderada de escenarios
- Corte subrogado que pondera cada corte con su variable dual correspondiente



Planificación lineal estocástica multietapa PLE-P

- F.O. minimiza **costes esperados** de todas las etapas

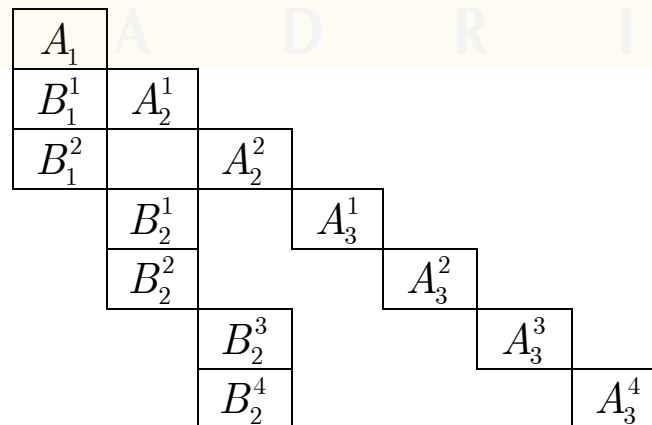
$$\min_{x_p^{\omega_p}} \sum_{p=1}^P \sum_{\omega_p \in \Omega_p} p_p^{\omega_p} c_p^{\omega_p T} x_p^{\omega_p}$$

$$B_{p-1}^{\omega_p} x_{p-1}^{\omega_{p-1}} + A_p^{\omega_p} x_p^{\omega_p} = b_p^{\omega_p} \quad p = 1, \dots, P$$

$$x_p^{\omega_p} \geq 0$$

$$B_0^{\omega_1} \equiv 0$$

- Las probabilidades $p_p^{\omega_p}$ son condicionadas
- Matriz de restricciones



Descomposición de PLE-P

- Maestro monocorte

$$\begin{aligned} & \min_{x_p^{\omega_p}, \theta_{p+1}^{\omega_p}} c_p^{\omega_p T} x_p^{\omega_p} + \theta_{p+1}^{\omega_p} \\ & A_p^{\omega_p} x_p^{\omega_p} = b_p^{\omega_p} - B_{p-1}^{\omega_p} x_{p-1}^{a(\omega_p)l} \quad : \pi_p^{\omega_p} \\ & \sum_{k \in d(\omega_p)} p^{\omega_p} \pi_{p+1}^{k l T} B_p^k x_p^{\omega_p} + \theta_{p+1}^{\omega_p} \geq q_p^{\omega_p} = \sum_{k \in d(\omega_p)} p^{\omega_p} \left(\pi_{p+1}^{k l T} b_{p+1}^k + \eta_{p+1}^{k l T} q_{p+1}^k \right) : \eta_p^{\omega_p} \\ & x_p^{\omega_p} \geq 0 \end{aligned}$$

donde $a(\omega_p)$ es el **ancestro** y $d(\omega_p)$ el **descendiente** de un subproblema dado

Descomposición estocástica multietapa

- Step 0 Set $I_t^{\xi_t} = J_t^{\xi_t} = 0$. Set $\theta_t^{\xi_t} \equiv 0$ at the initial iteration
- Step 1 Forward pass:
Repeat for $t = 1, \dots, T$
Repeat for each node ξ_t of stage t
Solve $(RP_t^{\xi_t})$
If feasible: obtain solution $x_t^{\xi_t}$
If $t = 1$ obtain lower bound $\underline{z} = v(RP_1^{\xi_1})$
If infeasible: stop forward pass, set $T' = t$ and go to Step 4
- Step 2 Upper bound computation:
Evaluate objective function of the complete problem with the primal solutions so far obtained. $\bar{z} = v(P)$
- Step 3 (stopping rule)
If $\bar{z} - \underline{z} < tol$ stop, $x_t^{\xi_t}$ is optimal solution, else go to Step 4
- Step 4 Backward pass
Repeat for $t = T', \dots, 1$
Repeat for each node ξ_t of stage t
Solve $(RP_t^{\xi_t})$
If feasible: obtain objective $\theta_t^{\xi_t, i} = v(RP_t^{\xi_t})$ and dual values $\pi_t^{\xi_t, i}$
Augment $I_t^{\xi_t} = I_t^{\xi_t} + 1$
If infeasible: obtain sum of infeasibilities $\tilde{\theta}_t^{\xi_t, j}$ and dual values $\tilde{\pi}_t^{\xi_t, j}$
Augment $J_t^{\xi_t} = J_t^{\xi_t} + 1$
- Go to step 1

Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- **Mejoras en las técnicas de descomposición**
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Mejoras en técnicas de descomposición (i)

- Método de optimización de los problemas

Subproblemas resueltos numerosas veces con modificaciones. En DAEB como maestro añaden restricciones y como subproblema cambian cotas restricciones.

- Método simplex dual candidato inicial. Probar método simplex o punto interior.
- Utilización de bases previas (opción BRATIO en GAMS).
- Utilización de punto inicial tomado de solución de problema determinista equivalente para un escenario.

Mejoras en técnicas de descomposición (ii)

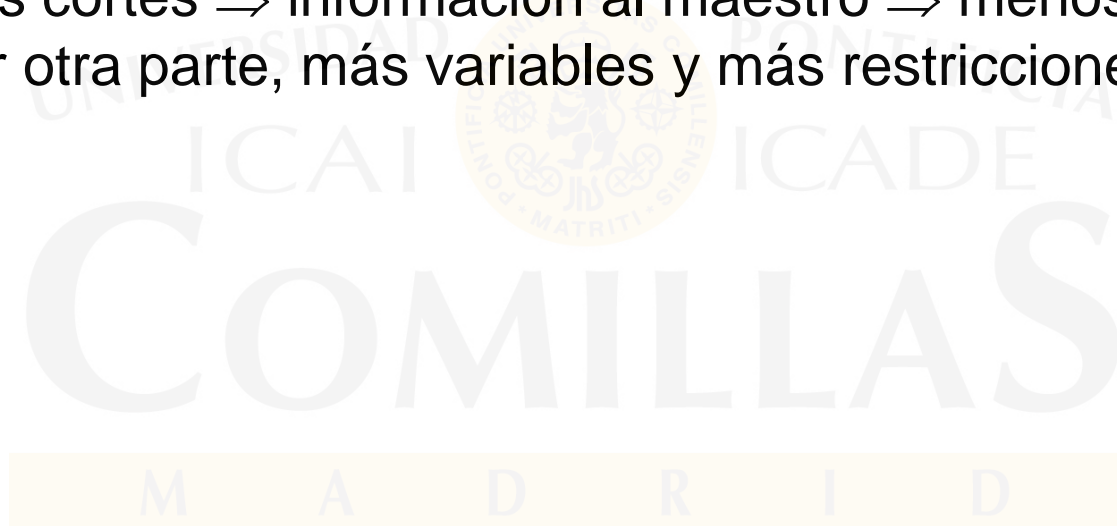
- Protocolos de barrido del árbol

Maneras de recorrer el árbol de escenarios entre la raíz y las hojas.

- Pasada rápida (*fast-pass*): de 1 a P y de P-1 a 1
- Remolona: resuelve la etapa con mayor error entre cotas inferior y superior. Se centra en las etapas finales, no retrocede hasta que el error en una etapa está controlado (*fast-forward*)
- Cautelosa: avanza cuando el error en una etapa es suficientemente pequeño. Se centra en las etapas iniciales, no avanza hasta que el error en una etapa está controlado (*fast-backward*)

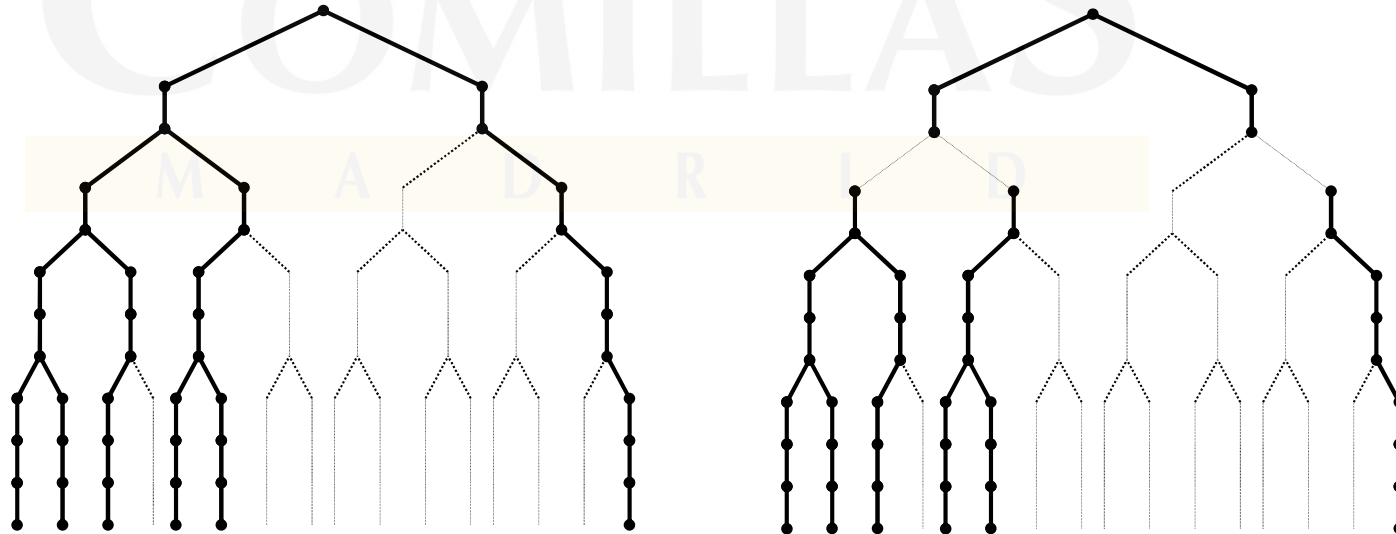
Mejoras en técnicas de descomposición (iii)

- Formulación y agregación de cortes
 - Tipo lineal o no lineal (linealización alrededor de un punto)
 - Monocorte o multicorte
 - Más cortes \Rightarrow información al maestro \Rightarrow menos iteraciones.
Por otra parte, más variables y más restricciones en maestro



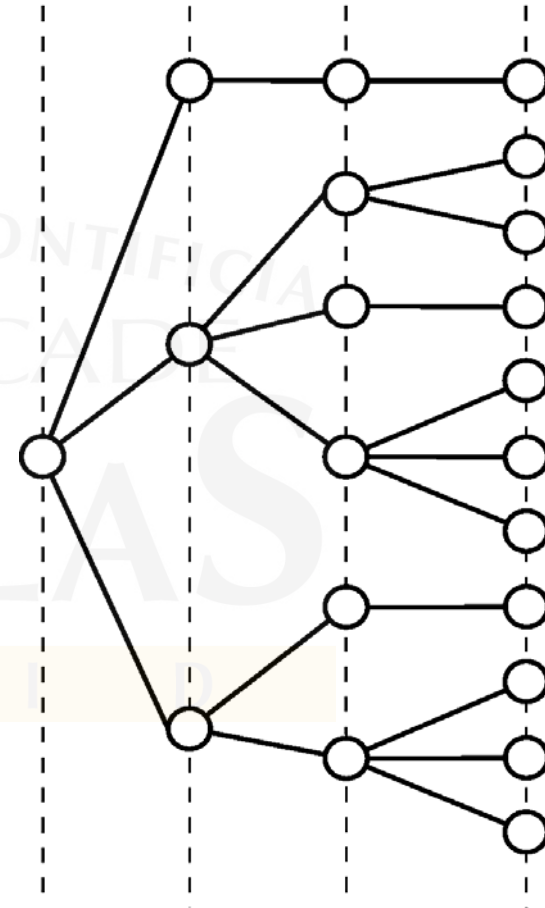
Mejoras en técnicas de descomposición (iv)

- Agregación de subproblemas (multicoordinación)
 - **Ventaja:** se reduce el número de iteraciones de algoritmo de descomposición
 - **Desventaja:** posible incremento de tiempo de solución del problema (método de punto interior)
- Agregación de nodos ascendente (de hojas a raíz) es la que mejor resultados ha dado



Algoritmos de partición del árbol de escenarios

- Por nodos
- Por escenarios
- Por subárboles
- Por escenarios completos
- Por partición de grafos



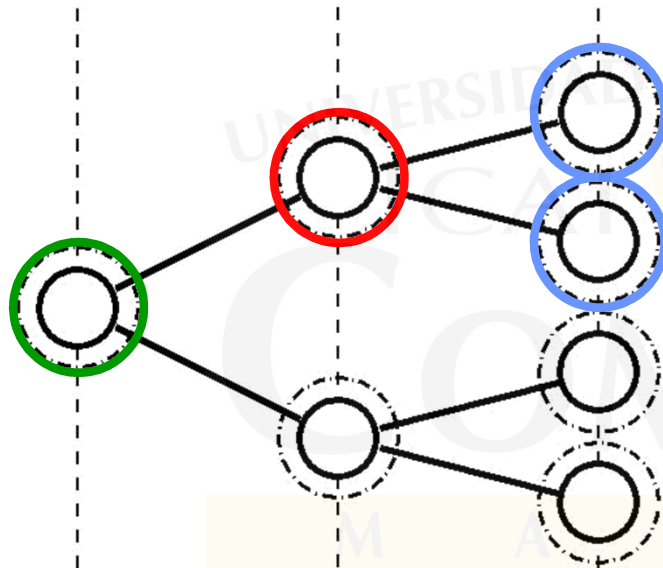
Fases generales del algoritmo

- Estrategia de barrido *fast-pass*
- Rebote frente a infactibilidades
- Sincronización al final de cada iteración
- Sincronización entre subproblemas padre e hijo

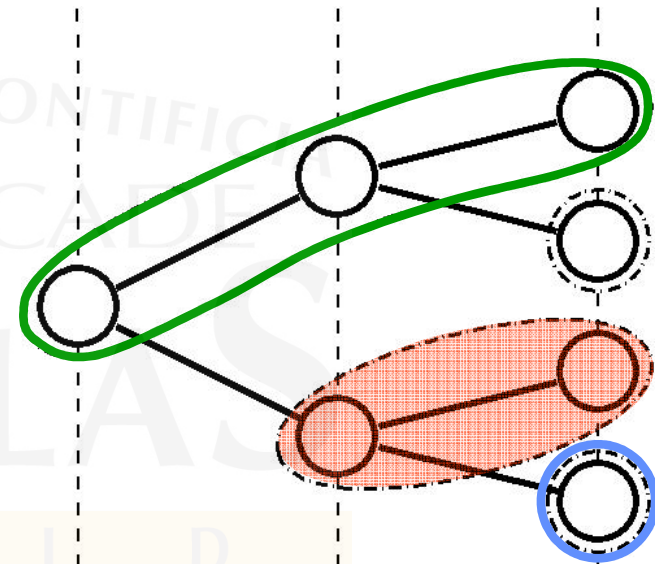


Partición por nodos y por escenarios

Nodos

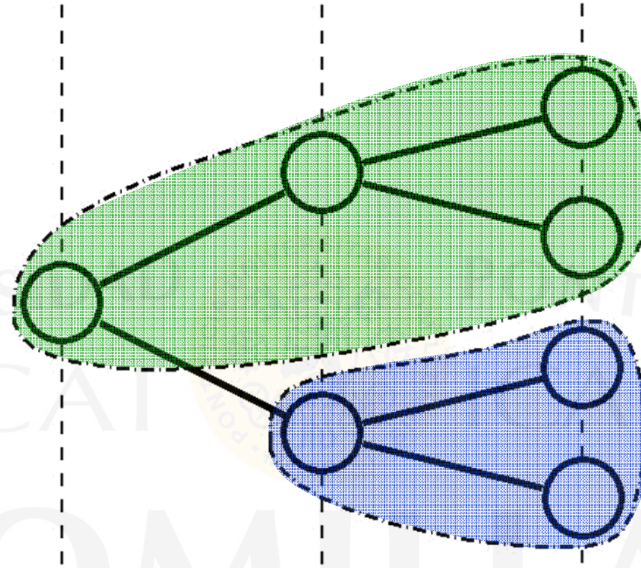


Escenarios

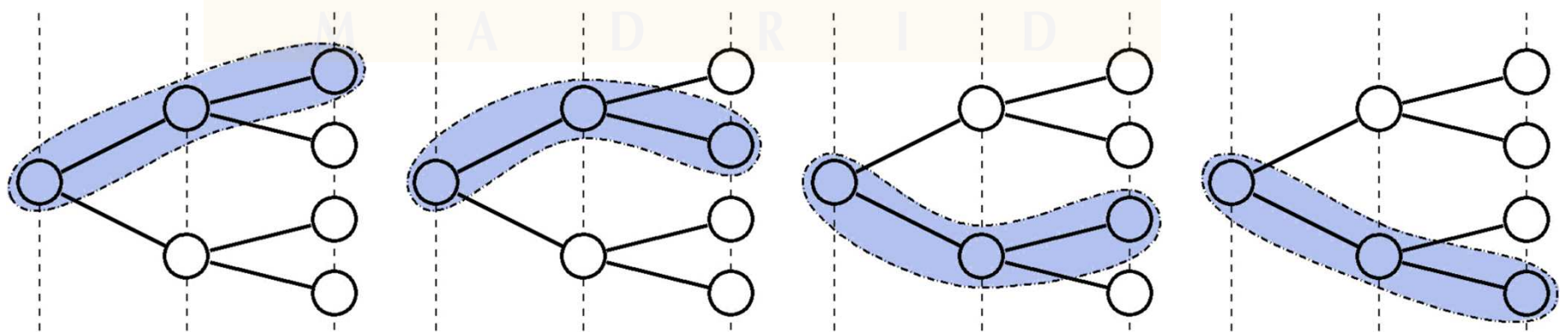


Partición por subárboles y por escenarios completos

Subárboles

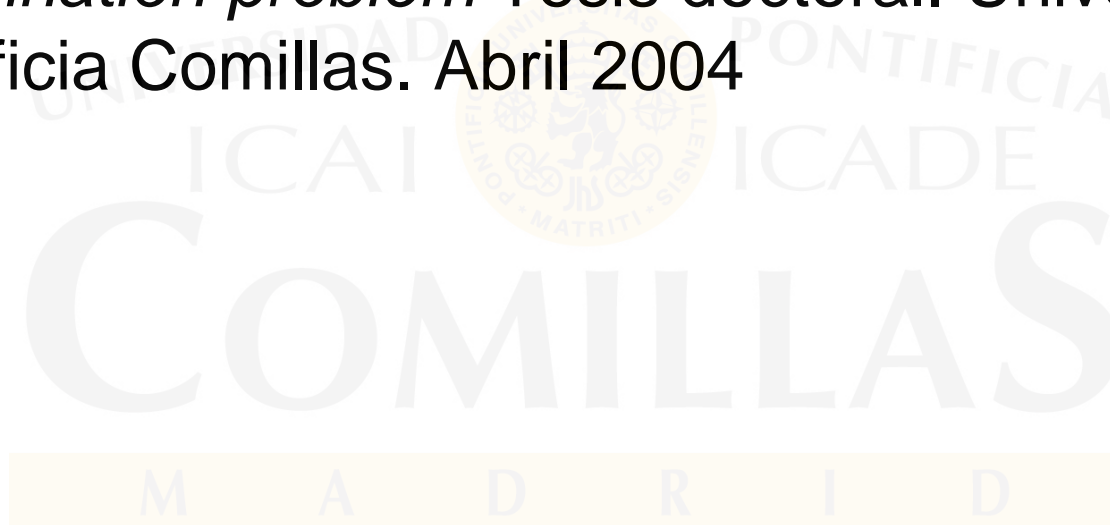


Escenarios completos



Descomposición para problemas con variables enteras en cualquier etapa

- S. Cerisola *Benders decomposition for mixed integer problems. Application to a medium term hydrothermal coordination problem* Tesis doctoral. Universidad Pontificia Comillas. Abril 2004



Descomposición en grid

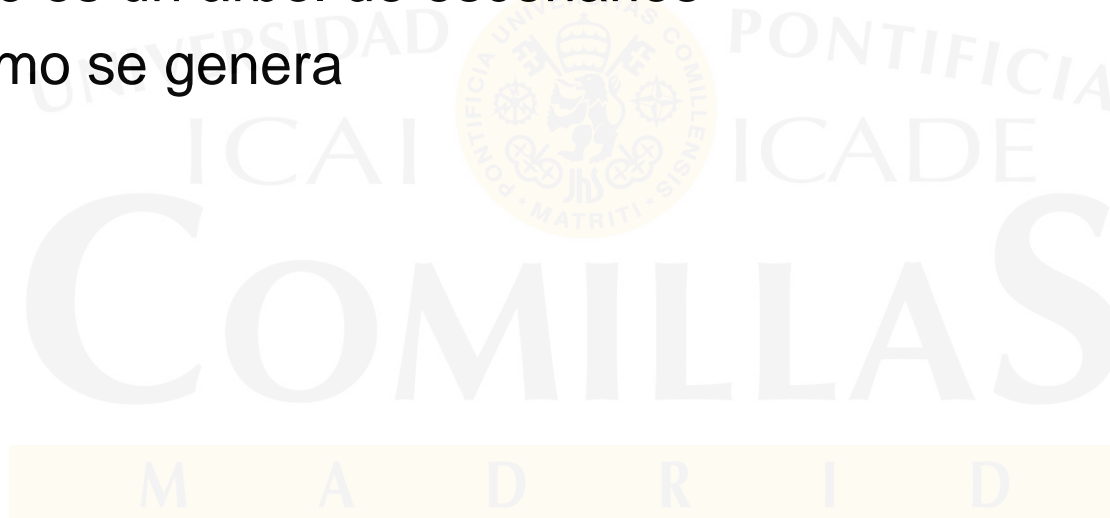
- Cálculo distribuido
 - J.M. Latorre *Resolución distribuida de problemas de optimización estocástica. Aplicación al problema de coordinación hidrotérmica* Tesis doctoral. Universidad Pontificia Comillas. Noviembre 2007
- GAMS grid
 - Uso de múltiples núcleos de un ordenador

Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- **Árbol de escenarios**
- Simulación en optimización estocástica
- Programación dinámica dual estocástica

Objetivos

- Entender
 - Cómo se representa la incertidumbre
 - Qué es un árbol de escenarios
 - Cómo se genera



Estocasticidad o incertidumbre

- Origen
 - Información futura (precios o demanda futura)
 - Carencia de datos fiables
 - Errores de medida
- En planificación de sistemas de energía eléctrica
 - Demanda (variación estacional o diaria, anual, crecimiento con el tiempo)
 - Aportaciones hidráulicas
 - Disponibilidad de elementos de generación y red
 - Precios de electricidad o combustibles
- Cada escala de tiempo tiene su estocasticidad

Métodos de predicción de la demanda (i)

- Largo plazo
 - Modelos de uso final
 - Explican el uso directo de la electricidad por los diferentes usuarios
 - Requieren muchos datos y son sensibles a su calidad
 - Modelos econométricos
 - Usan datos económicos para explicar la evolución de la demanda

M A D R I D

Métodos de predicción de la demanda (ii)

- Corto plazo
 - Modelos de **regresión**
 - Determinan la relación de la demanda con factores como la humedad, temperatura, día de la semana
 - Análisis de **series temporales**
 - Detectan la estructura intrínseca de la demanda: correlación, tendencia, variación estacional y diaria
 - **Redes neuronales artificiales**
 - Hacen un ajuste no lineal de la demanda como función de factores previos
 - **Lógica borrosa**
 - Introduce aspectos cualitativos mediante números borrosos

Incertidumbre en aportaciones

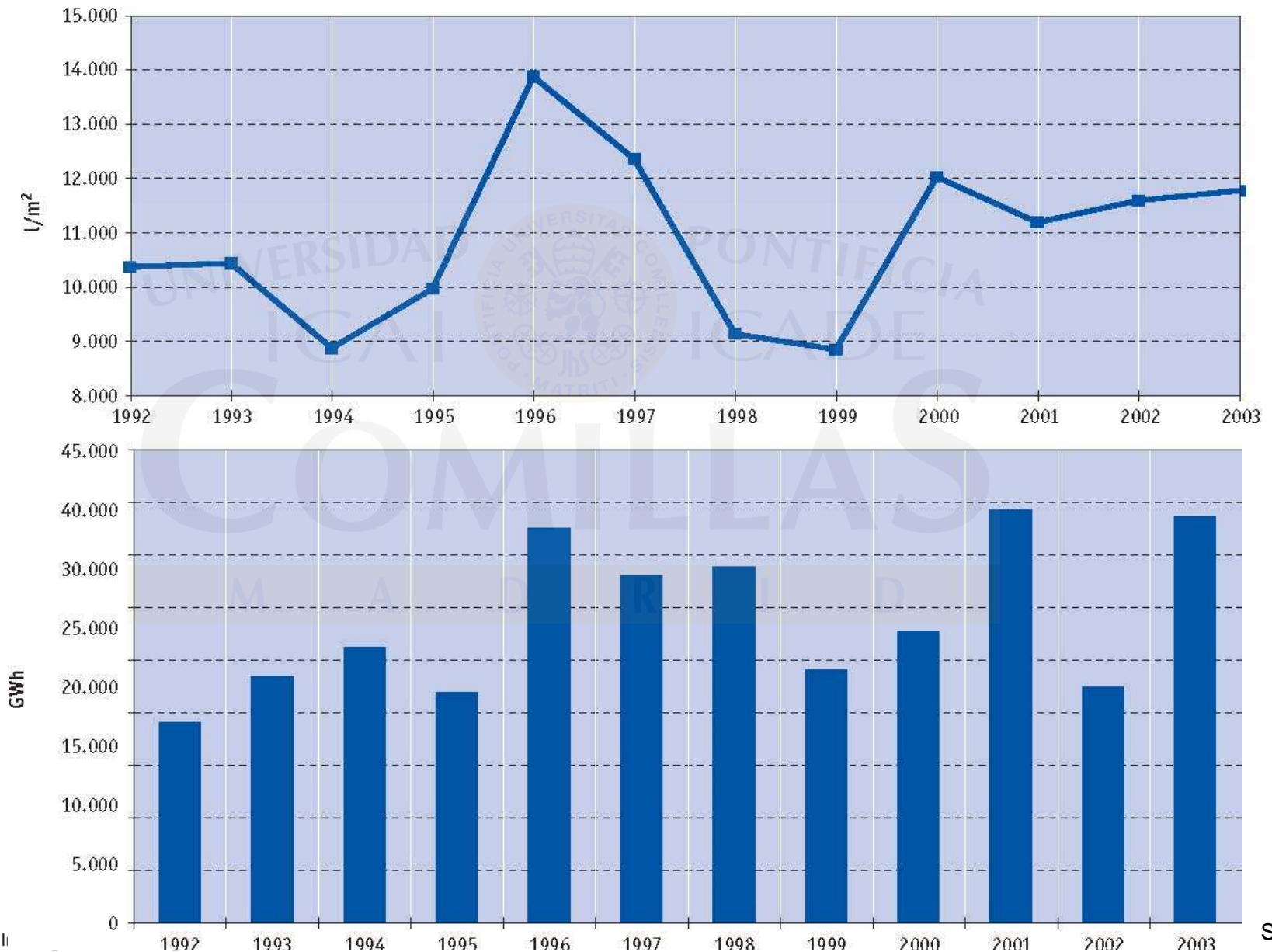
- Aportaciones naturales (claramente el factor más importante en el sistema eléctrico)

- Cambios en niveles de reservas son importantes por:
 - Estocasticidad en aportaciones hidráulicas
 - Patrón cronológico de las aportaciones
 - Capacidad del embalses con respecto a las aportaciones

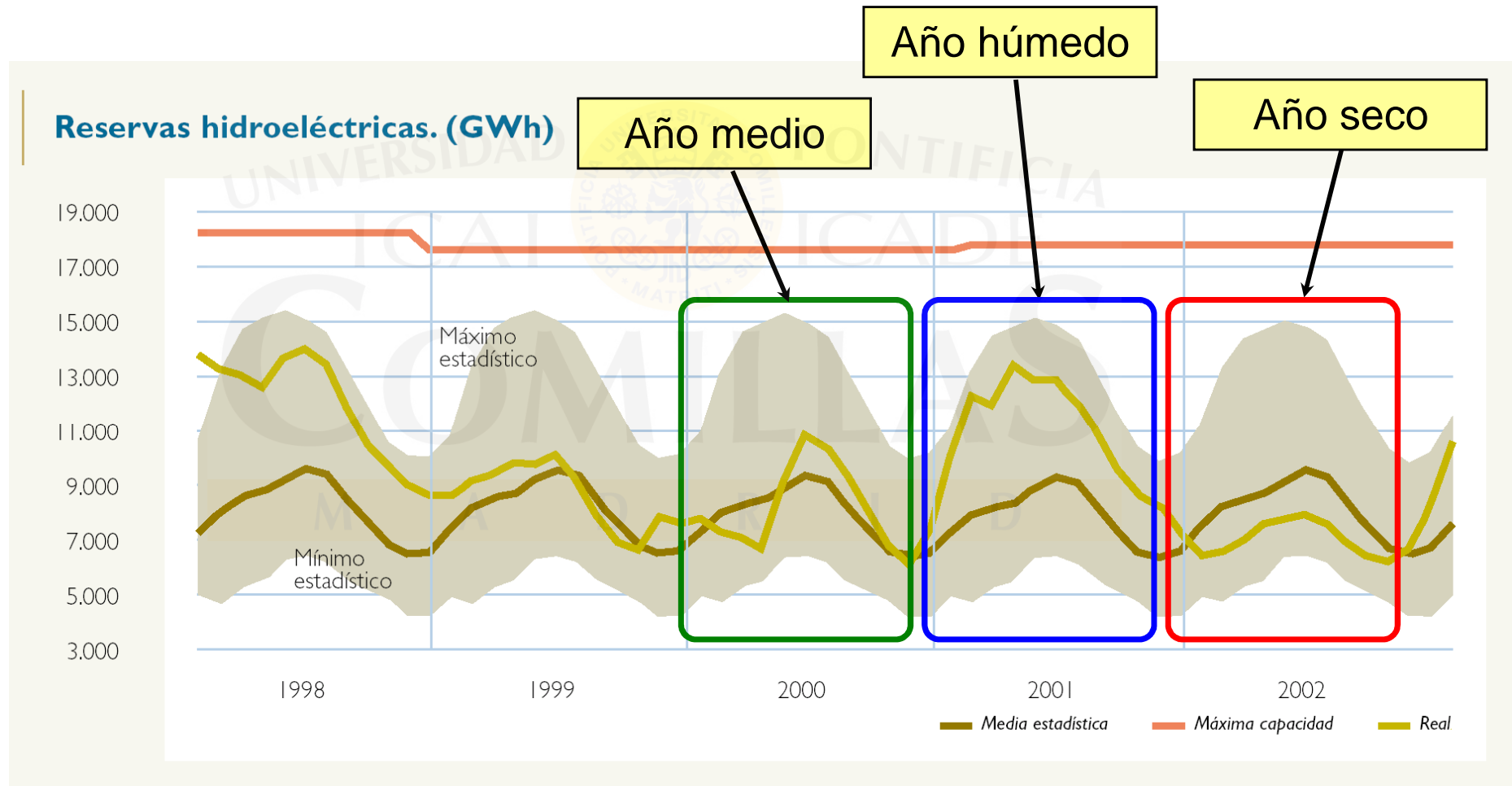
Year	Hydro energy TWh	Index	% of being exceeded
1990	20.3	0.57	98%
1991	25.4	0.84	76%
1992	19.5	0.64	95%
1993	22.8	0.75	85%
1994	21.7	0.72	88%
1995	21.7	0.72	88%
1996	39.4	1.30	17%
1997	35.6	1.19	27%
1998	27.1	0.90	64%
1999	19.8	0.67	92%
2000	26.2	0.90	64%
2001	32.9	1.13	32%
2002	20.9	0.72	87%
2003	33.2	1.15	30%
2004	22.7	0.79	80%
2005	12.9	0.45	100%
2006	23.3	0.82	74%
2007	18.4	0.65	92%
2008	18.9	0.67	90%
2009	22.3	0.79	76%
2010	36.2	1.29	16%
2011	22.5	0.81	74%
2012	10.3	0.42	100%

Source: REE

Aportaciones y producción hidráulica

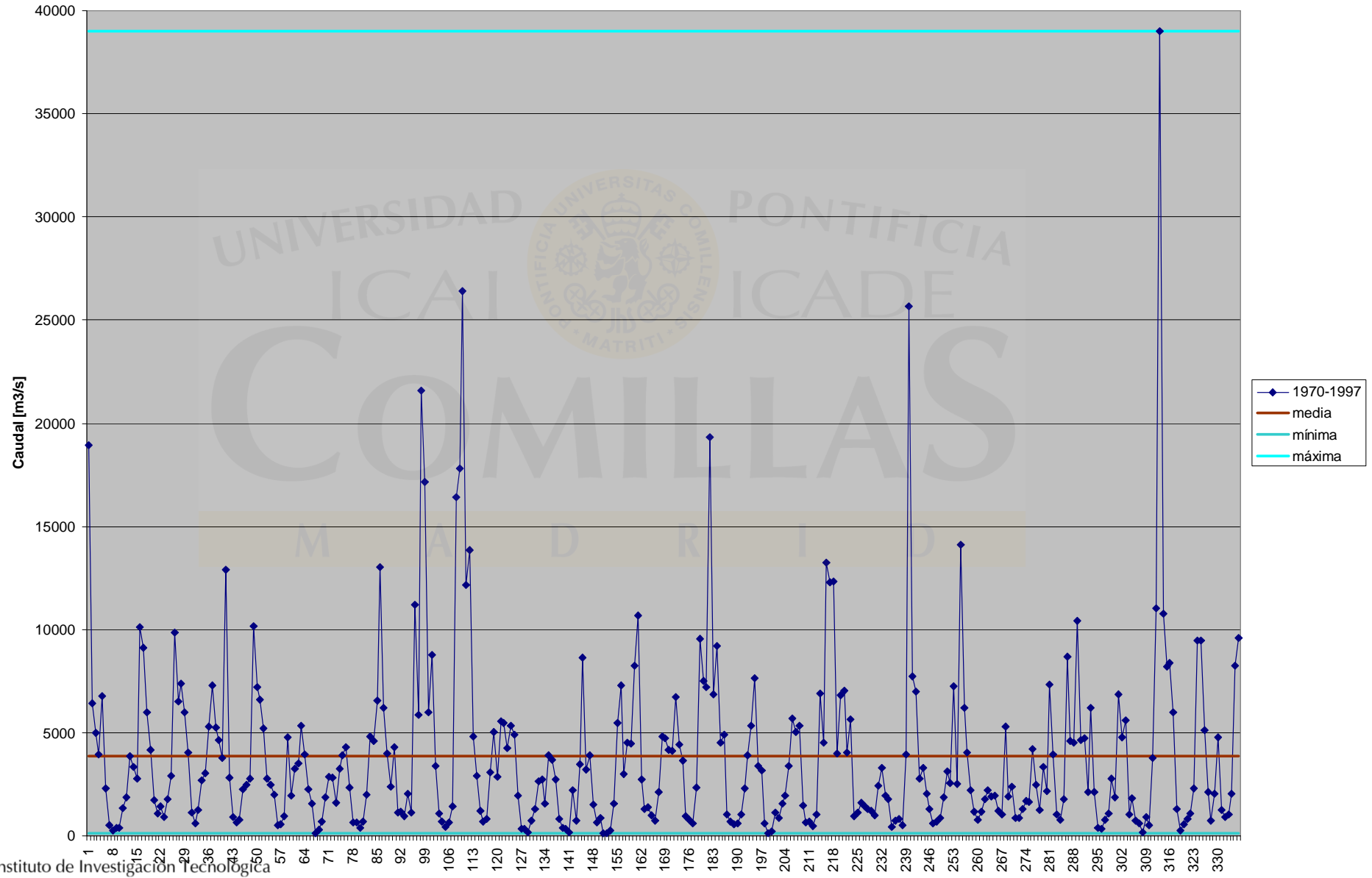


Reservas hidroeléctricas

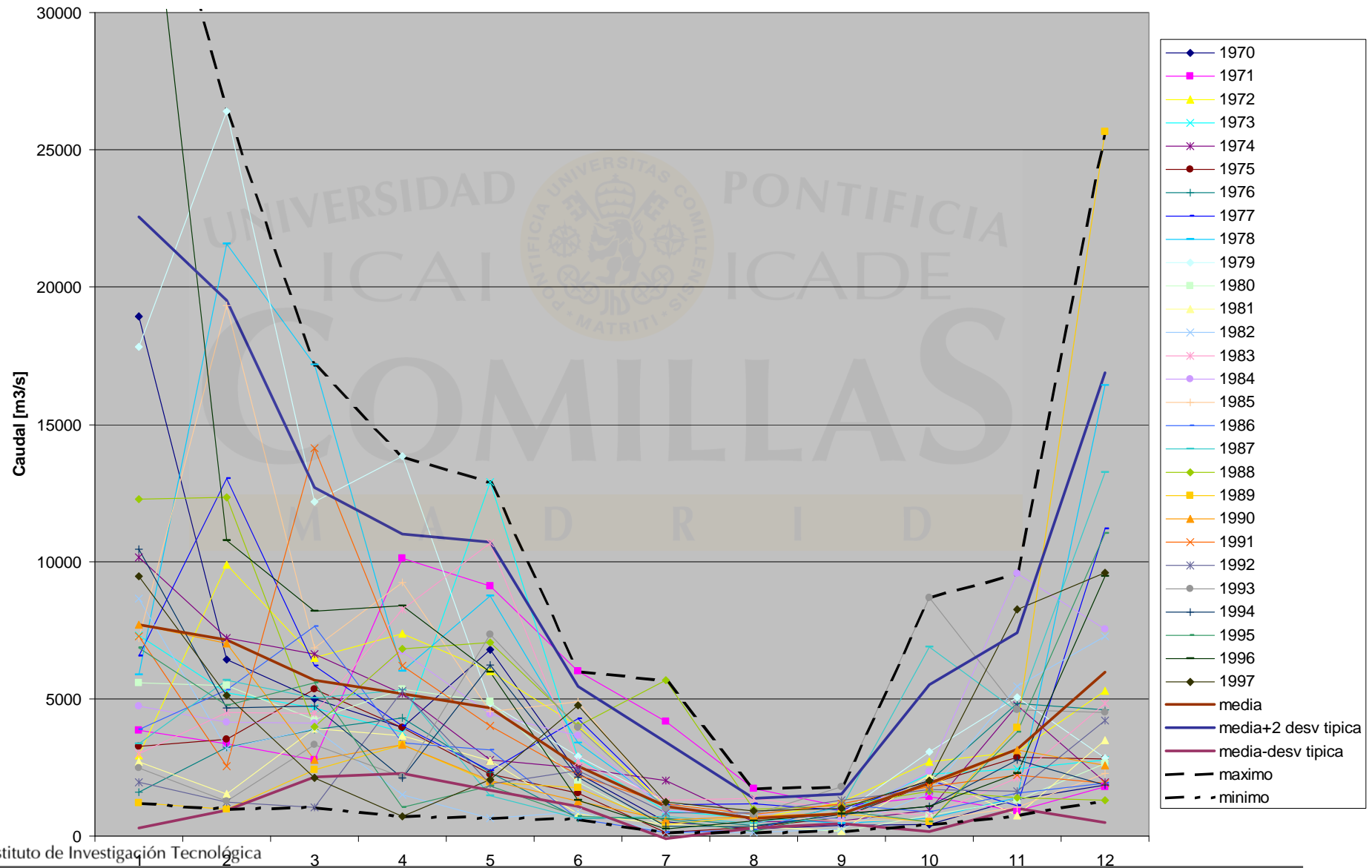


Fuente: REE

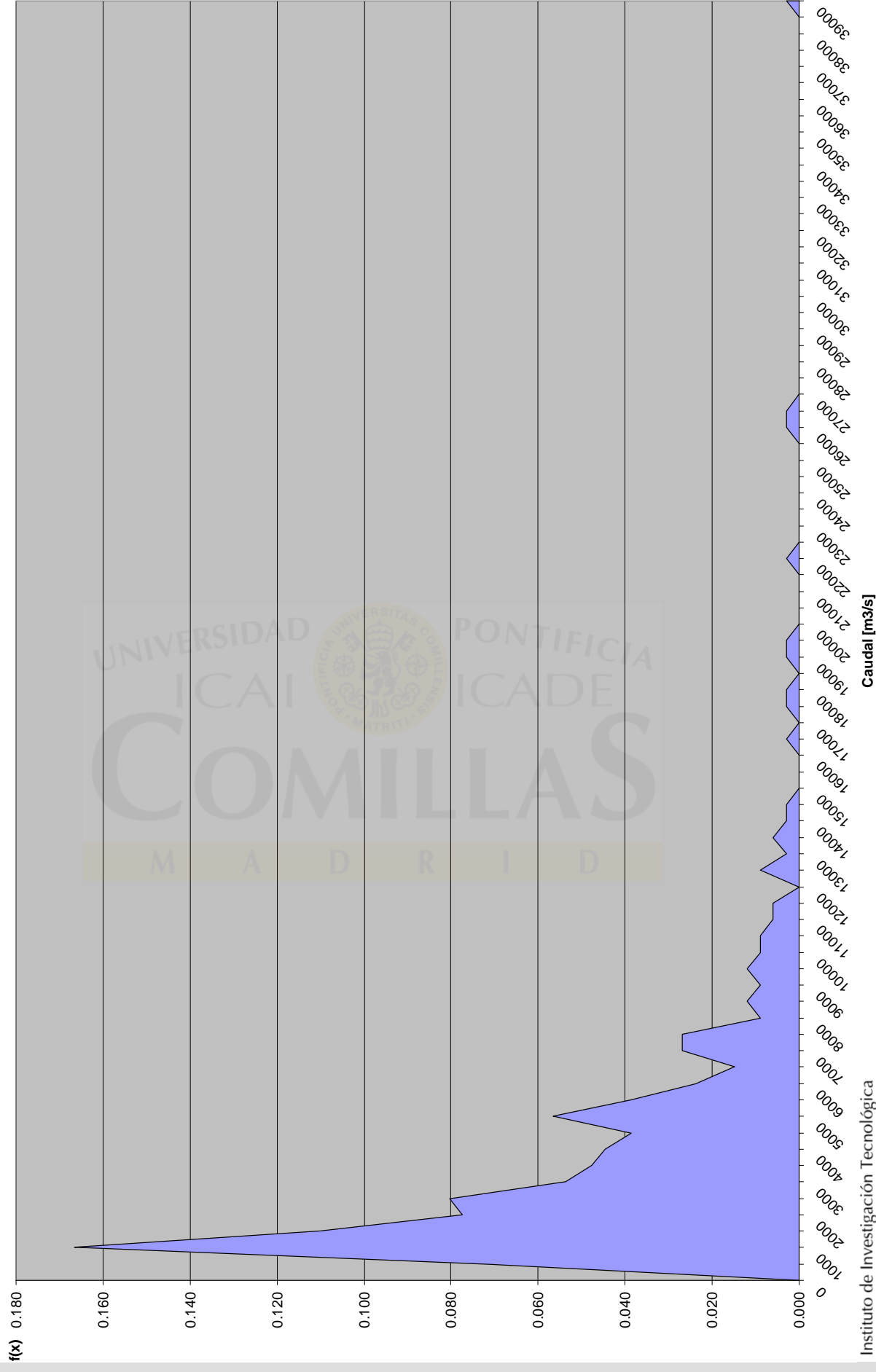
Aportaciones naturales: series históricas (mensuales)



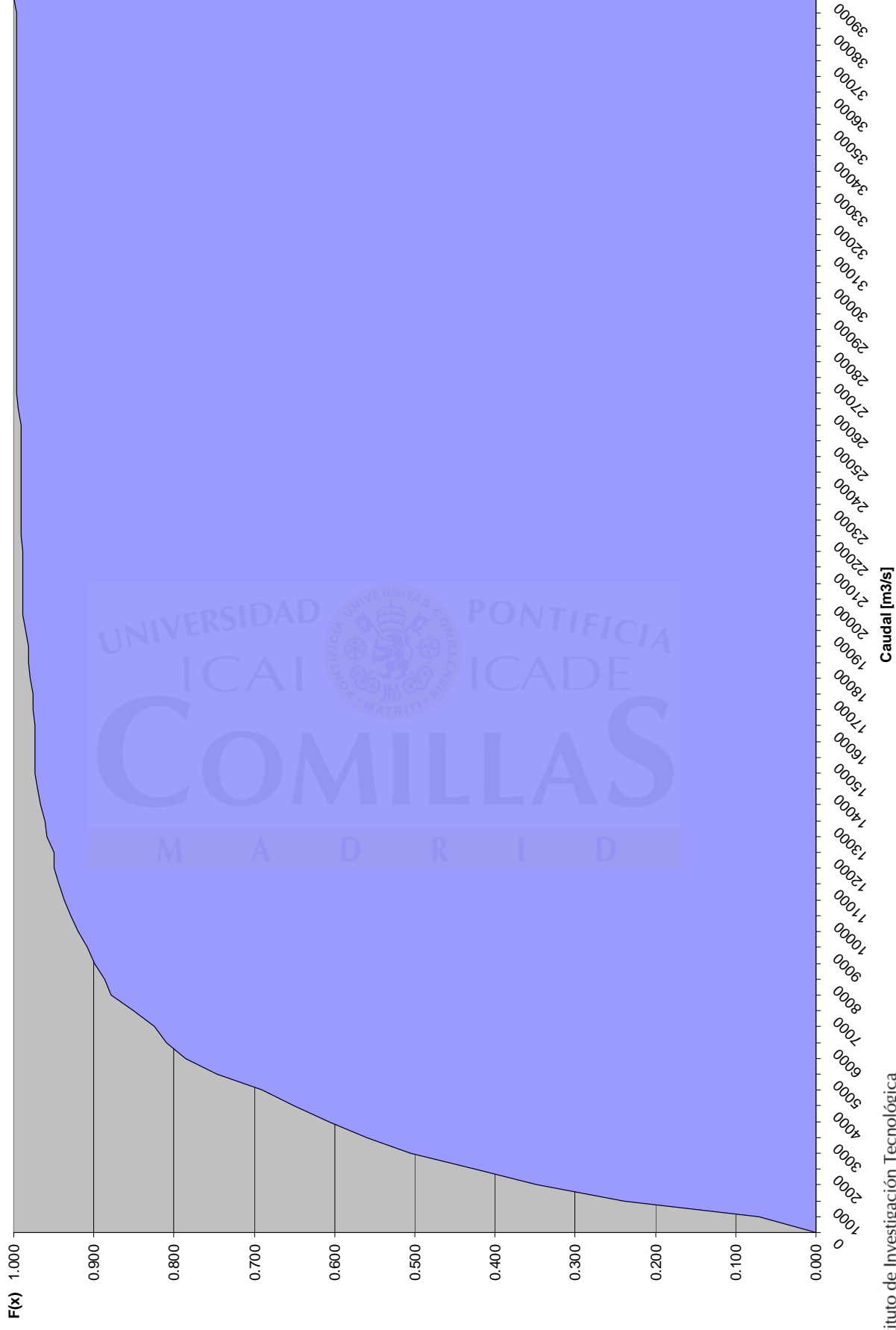
Aportaciones naturales: series históricas (mensuales)



Función de densidad $f(x)$

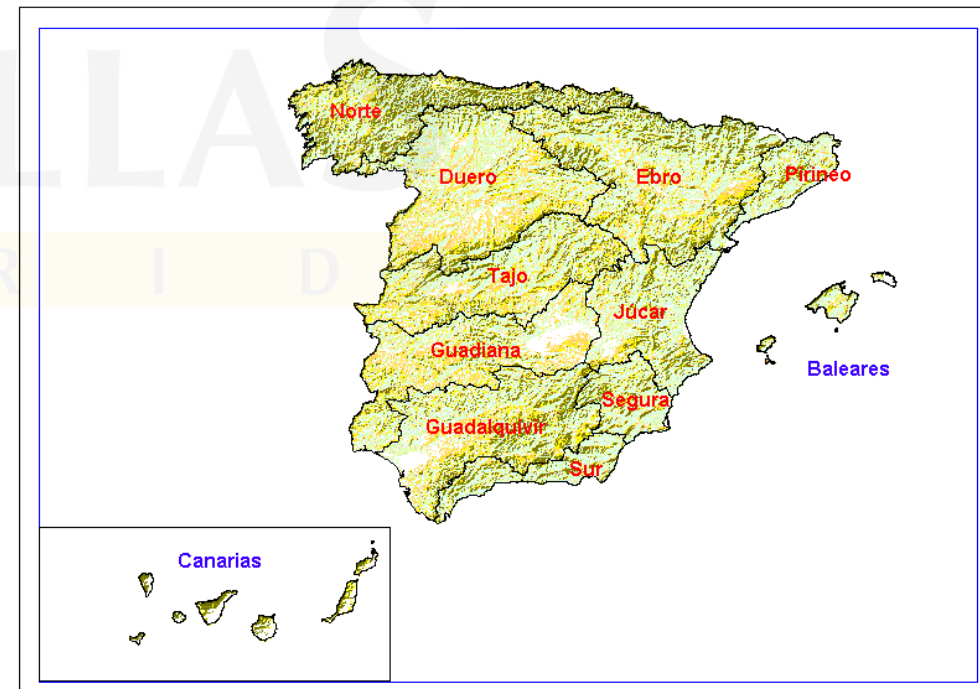


Función de distribución $F(x)$



Aportaciones

- Varios **puntos de aforo** en **las principales cuencas**
- **Correlación espacial parcial** entre ellas
- **Correlación temporal** en cada una



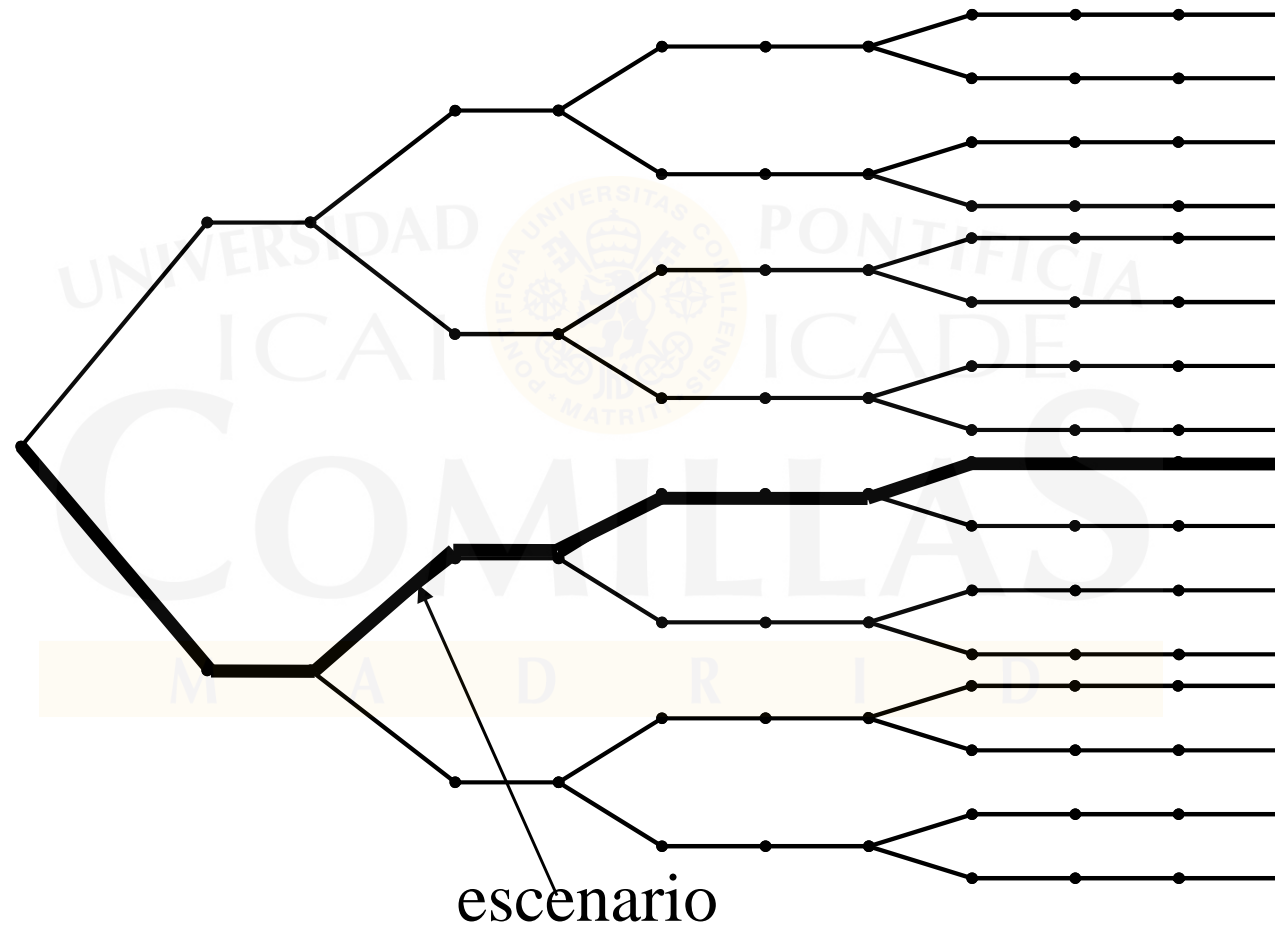
Alternativas de modelado de parámetros estocásticos

- Función de probabilidad discreta (i.e., árbol de escenarios)
- Función de probabilidad continua o histórica que genera el árbol por sorteo (simulando) en cada periodo de tiempo

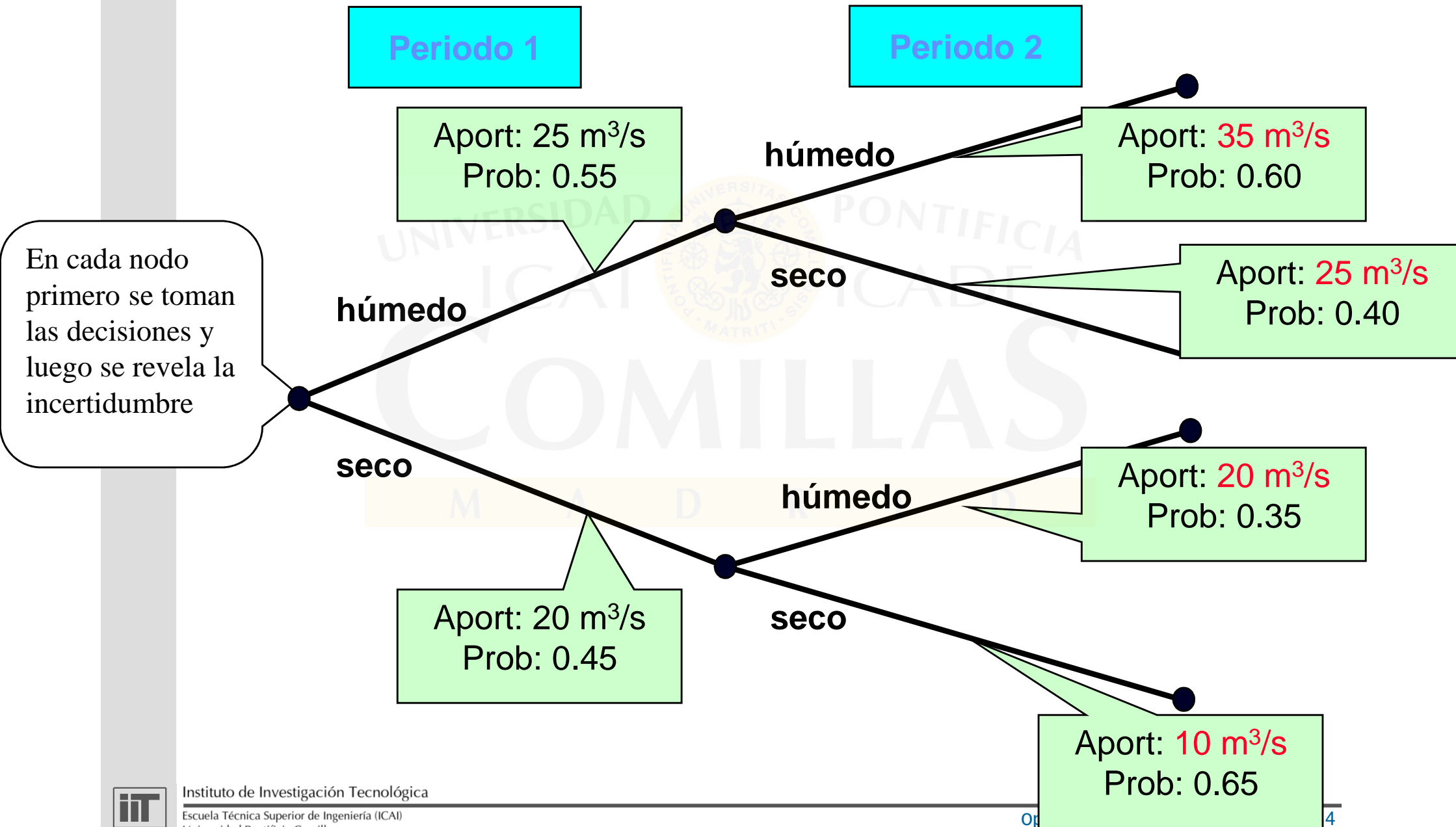
Árbol de probabilidad o de escenarios

- **Árbol**: representa cómo se resuelve la estocasticidad a lo largo del tiempo, i.e., los estados de los parámetros aleatorios y las decisiones de no anticipatividad. Hay que considerar **correlación** entre los parámetros
- **Escenario**: cualquier camino que va de la raíz a las hojas
- Los escenarios que comparten información hasta un instante hacen lo mismo en el árbol (decisiones no anticipativas)

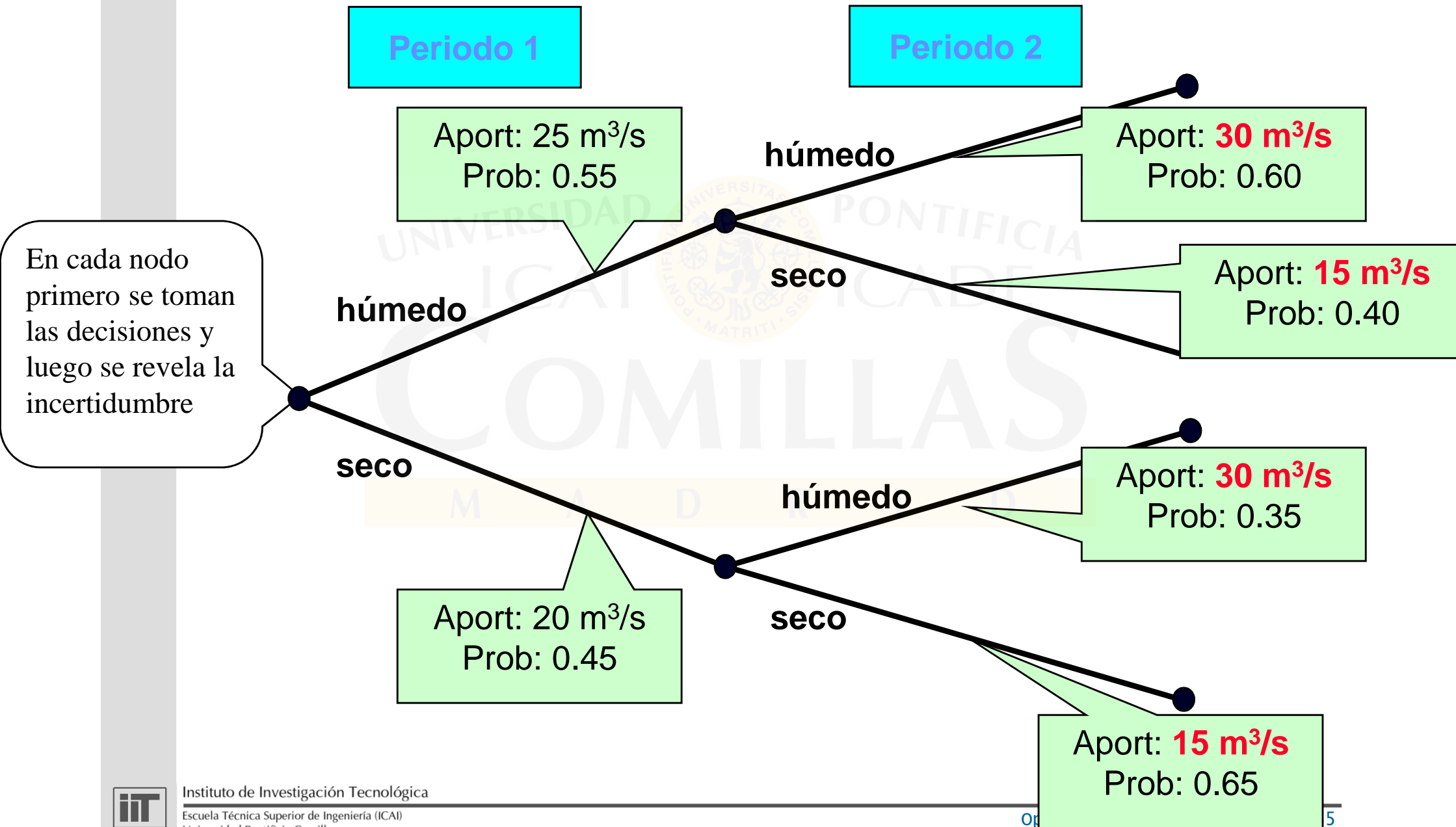
Árbol de escenarios



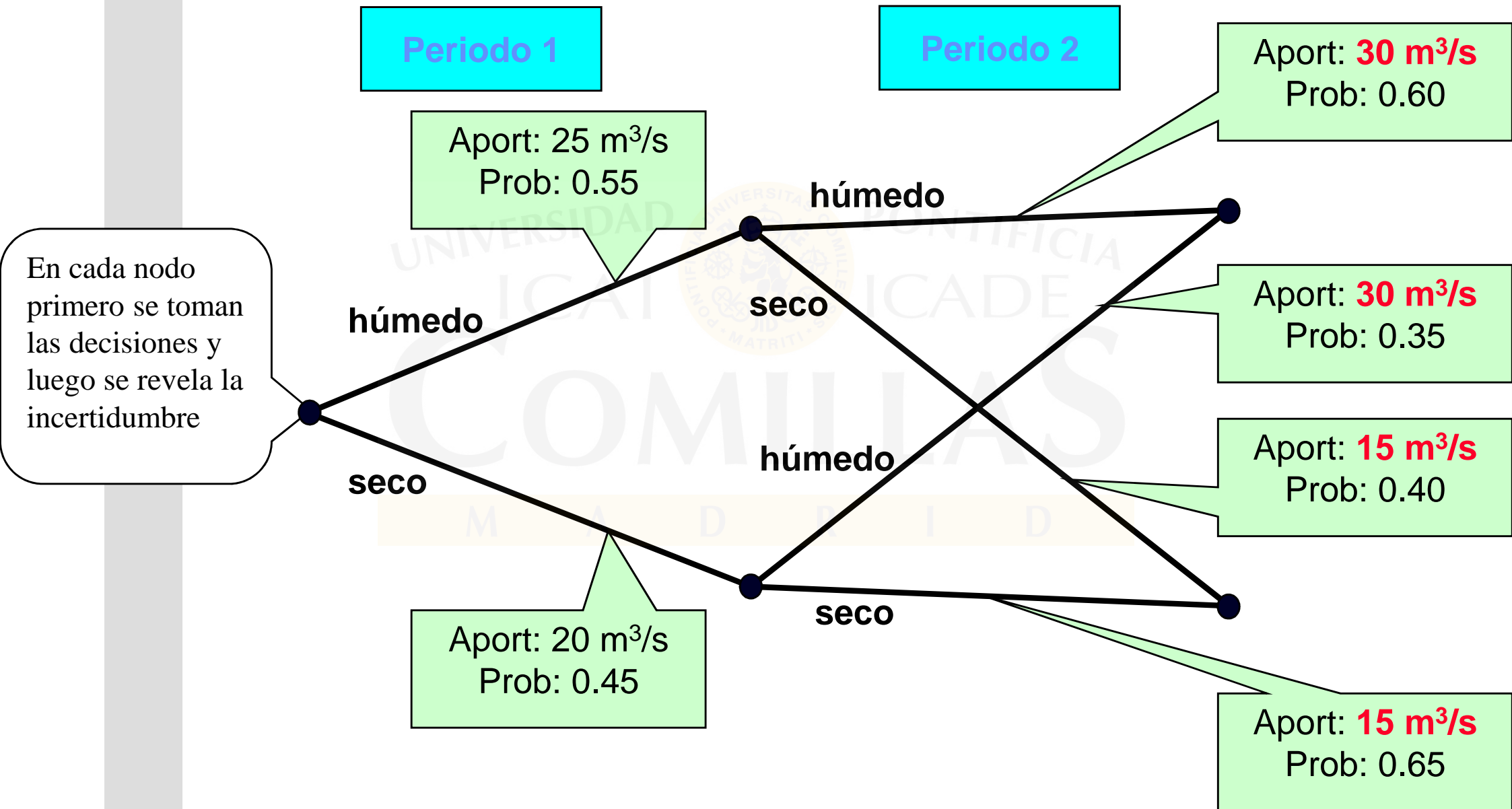
Ejemplo de árbol de escenarios



Ejemplo de árbol de escenarios recombinante



Ejemplo de árbol de escenarios recombinante



Efecto de la representación de la incertidumbre

- **Árbol basado en**
 - Series históricas (normalmente en número reducido)
 - Series sintéticas
- **Árbol**
 - Recombinante
 - No recombinante
- **Comparación**
 - Propiedades estadísticas (momentos, distancias) de series y/o árboles
 - Resultados de la optimización estocástica de la primera etapa robustos frente al árbol
 - Evitar sobreajustar o sobreentrenar las series con el árbol
 - Parsimonia es la preferencia por la explicación menos compleja de una observación

Equilibrio en el modelado de árbol de escenarios

- **Árbol de escenarios grande y modelo de explotación simplificado**
 - ¿Dónde ramificamos el árbol?
- **Árbol de escenarios pequeño y modelo de explotación realista**

¿Dónde es más conveniente ramificar?

- Donde hay una gran variedad de valores estocásticos
 - Invierno y primavera en el caso de las aportaciones hidráulicas
- El futuro cercano afecta más que el futuro lejano
 - Si se están tomando decisiones desde enero a diciembre ramificar en invierno y primavera es mejor que ramificar en otoño

Generación de árbol de escenarios

- Series **univariantes** (**una** aportación)
 - Distancia del centroide del cluster a las series desde el primer periodo al último
- Series **multivariantes** (**varias** aportaciones)
 - Distancia del centroide multidimensional del cluster a las series de cada aportación desde el primer periodo al último

Generación de árbol de escenarios

- No hay método establecido para obtener un único árbol de escenarios
- **Árbol de escenarios multivariante** obtenido mediante la técnica **neural gas clustering** que tiene en cuenta simultáneamente las series estocásticas y sus **dependencias espaciales y temporales**.
- **Escenarios extremos** se puede introducir artificialmente con probabilidad muy baja
- Generar suficientes escenarios para la planificación anual de la operación

Técnica habitual para la generación del árbol

- Se divide el proceso en **dos fases**:
 - **Generación** del árbol.
Método Neural gas.
 - **Reducción** del árbol.
Utilizando distancias probabilistas.

Generación de árbol de escenarios

- Idea
 - Minimizar la distancia del árbol de escenarios a las series originales
 - Estructura máxima del árbol predefinida (2x2x2x2x1x1x1x1x1x1x1)
- J.M. Latorre, S. Cerisola, A. Ramos Clustering Algorithms for Scenario Tree Generation. Application to Natural Hydro Inflows European Journal of Operational Research 181 (3): 1339-1353 Sep 2007

Algoritmo Neural gas (I)

- **Soft competitive learning method**
 - Todos los escenarios se adaptan al introducir nuevas series
 - Tasa de adaptación **decreciente**
- Adaptación iterativa del centroide como función de la cercanía a las nuevas series elegidas aleatoriamente
- **Modificaciones** al método:
 - Inicialización: considera la estructura de árbol de los centroides
 - Adaptación: la modificación de cada nodo es la media de la correspondiente por pertenecer a cada escenario

Algoritmo Neural gas (II)

1. Initialize the tree $\{\omega^k\}$ with randomly chosen series.
2. Choose randomly a new series ω .
3. Compute the distances of each tree scenario to the series:

$$d^k = \|\omega - \omega^k\| \text{ for } k = 1, 2, \dots, K$$

4. Sort by increasing order these distances and store in o^k the order of each scenario in this sequence

Algoritmo Neural gas (III)

5. Calcula la modificación de cada nodo:

$$\Delta \omega_t^n = \varepsilon(j) \cdot \frac{\sum_{k=1, \dots, K / \omega_t^n \in \omega^k} h_\lambda(o^k) \cdot (\omega - \omega^k)}{\sum_{k=1, \dots, K / \omega_t^n \in \omega^k} 1}$$

6. Si no se ha alcanzado el número máximo de iteraciones ir a 2.

Aportaciones naturales

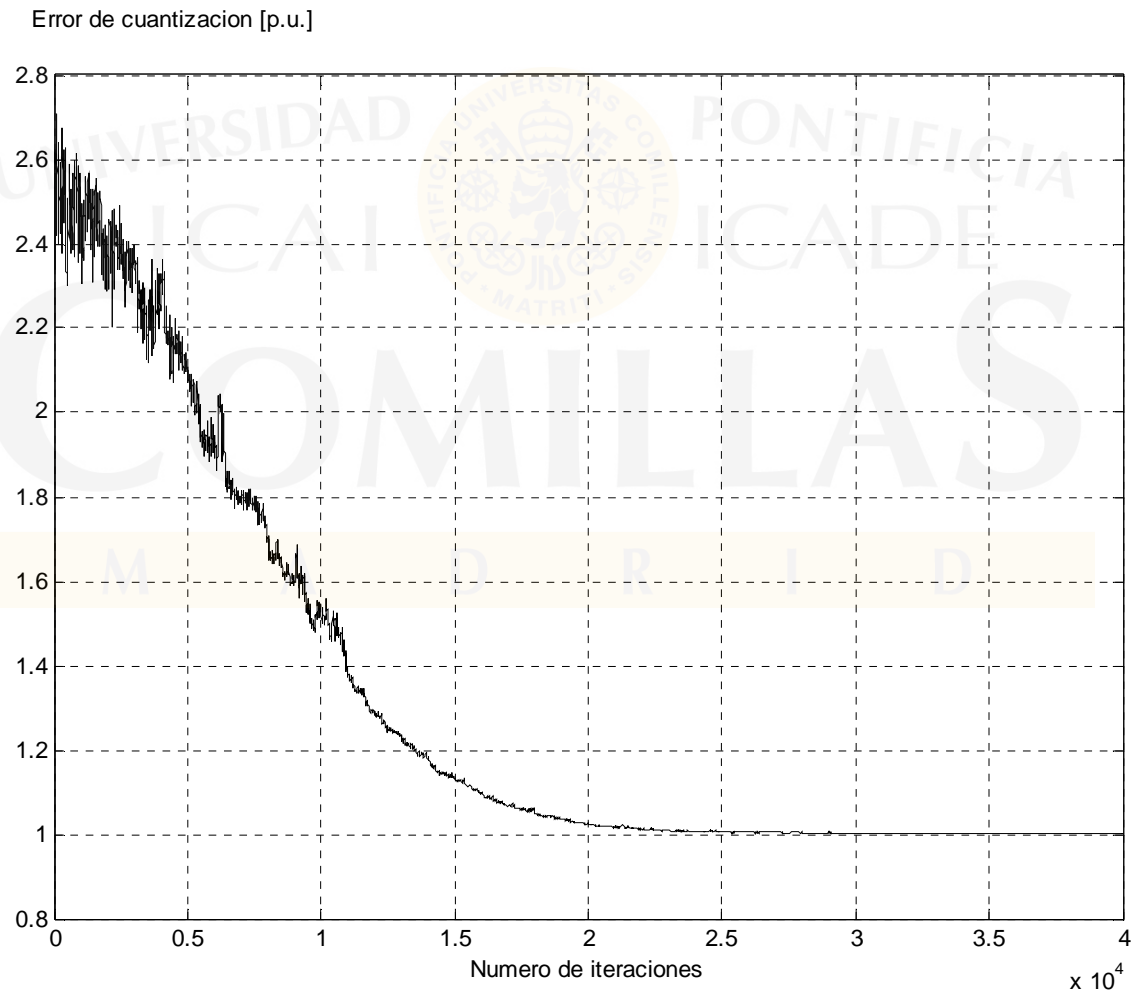
- Series de datos de 30 años.
- **Datos semanales** en m^3/s .
- Correspondientes a **8 puntos de aforo** en **3 cuencas**.
- Organizados en **años hidrológicos naturales**, de Septiembre a Agosto.

Estructura máxima del árbol:

- 16 escenarios
- Ramas en etapas 5, 9, 13 y 17

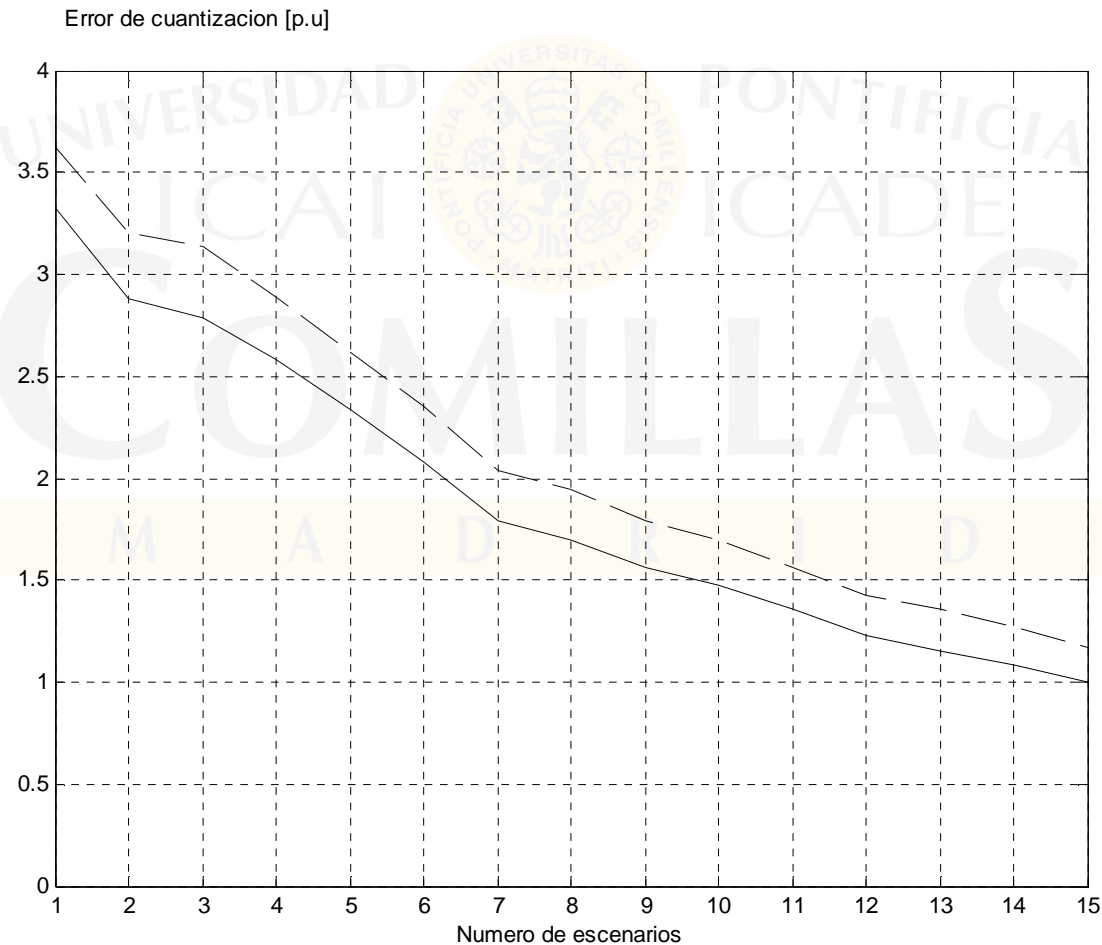
Aportaciones naturales

- Error de cuantización



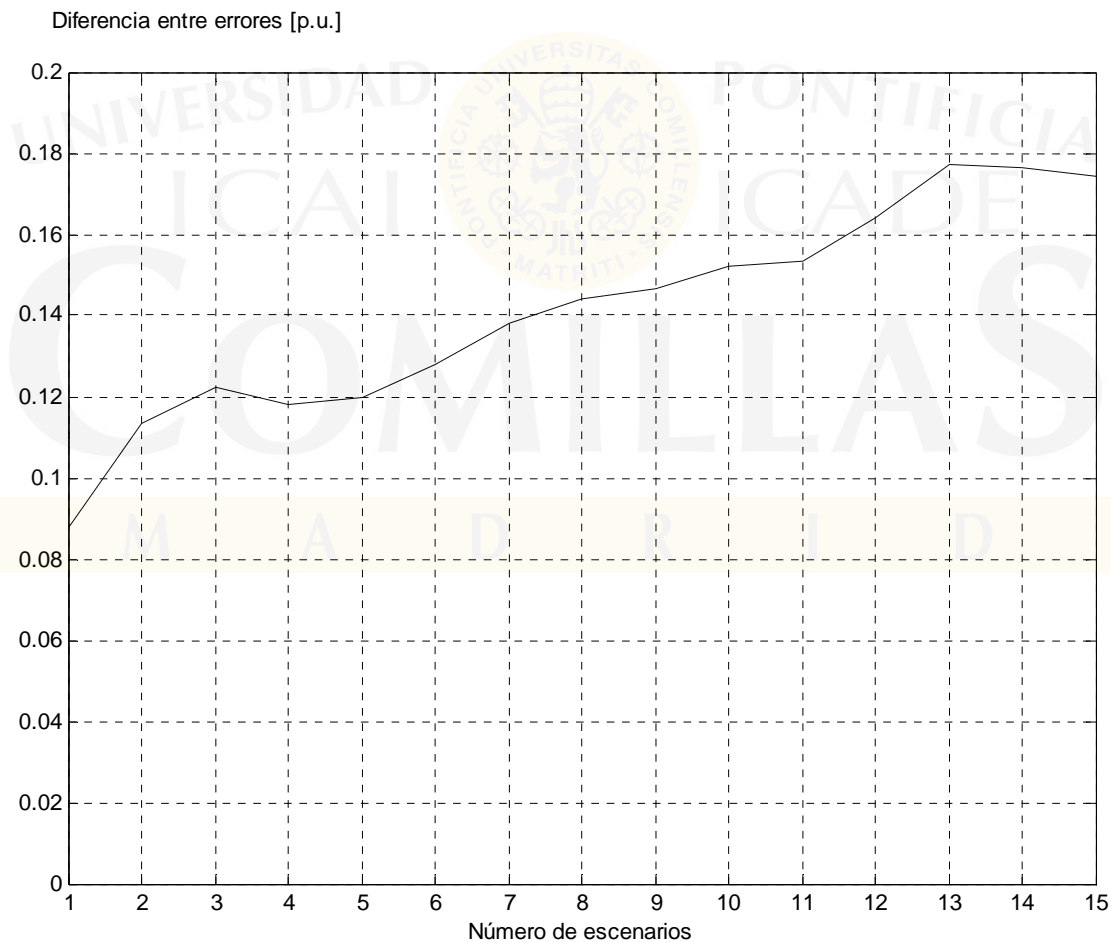
Aportaciones naturales

- Error de cuantización relativo



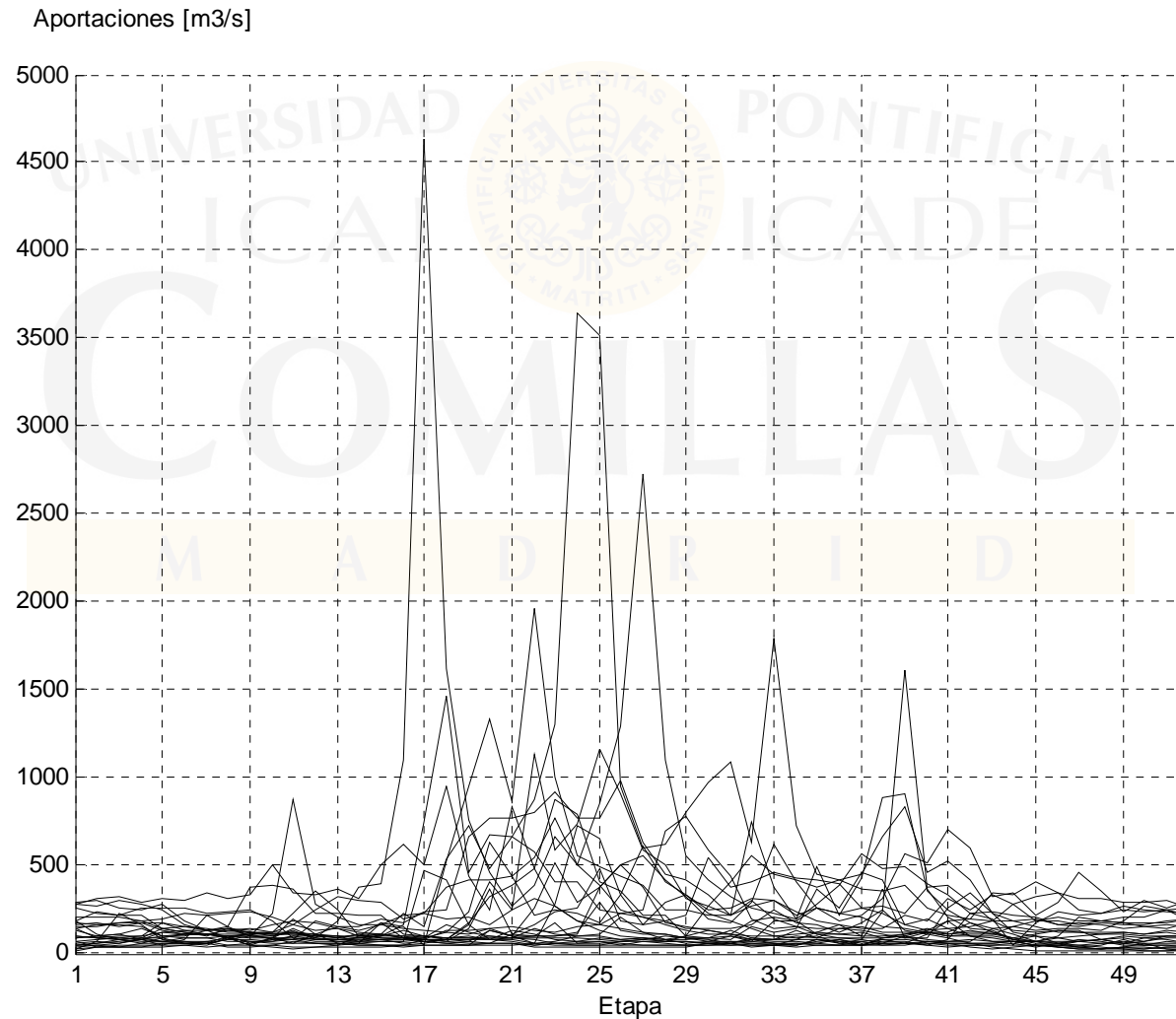
Aportaciones naturales

- Diferencia entre errores de cuantización relativos



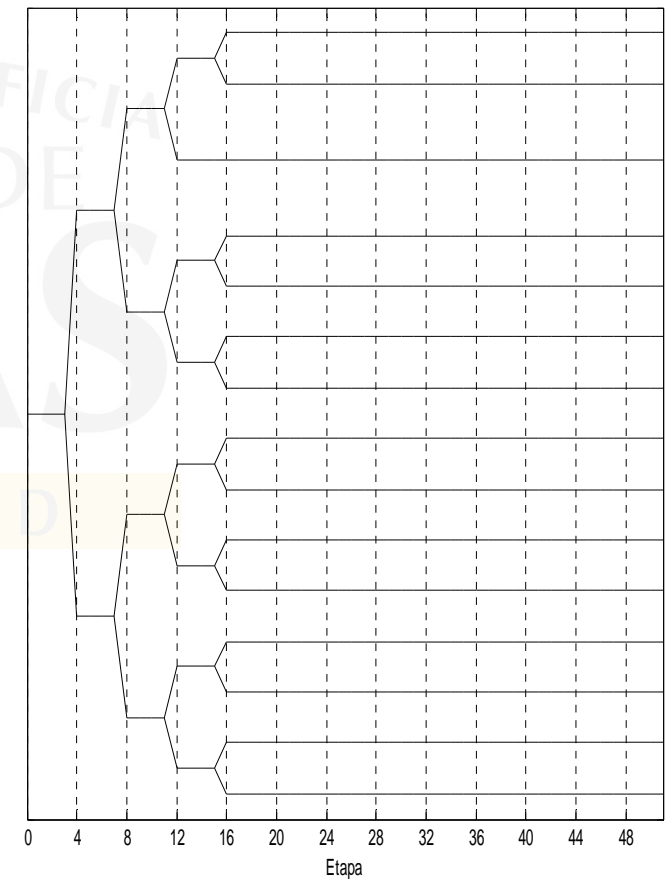
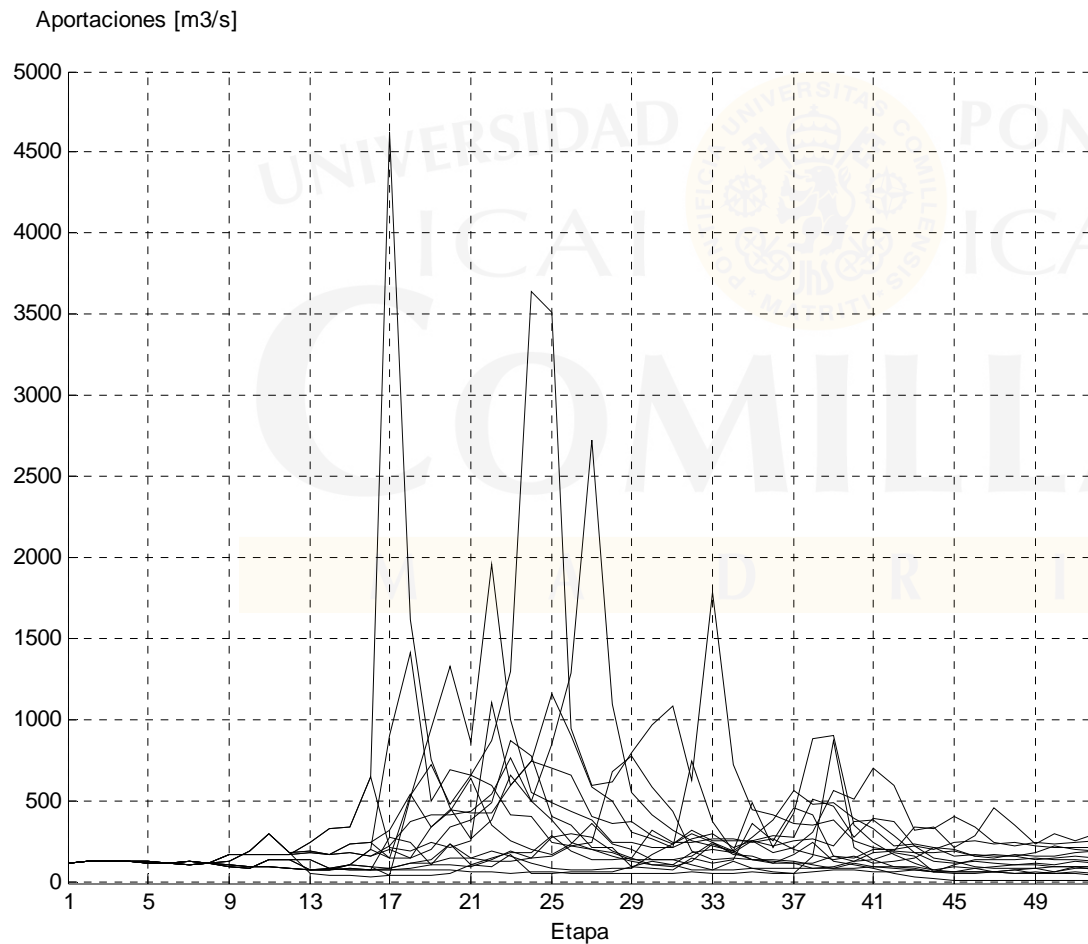
Aportaciones naturales

- Series de datos para una aportación



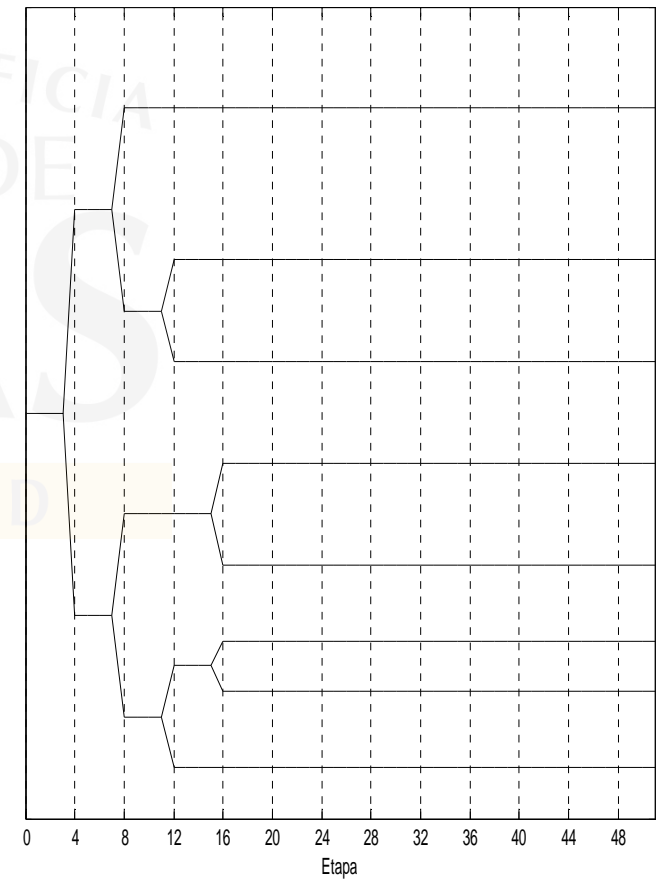
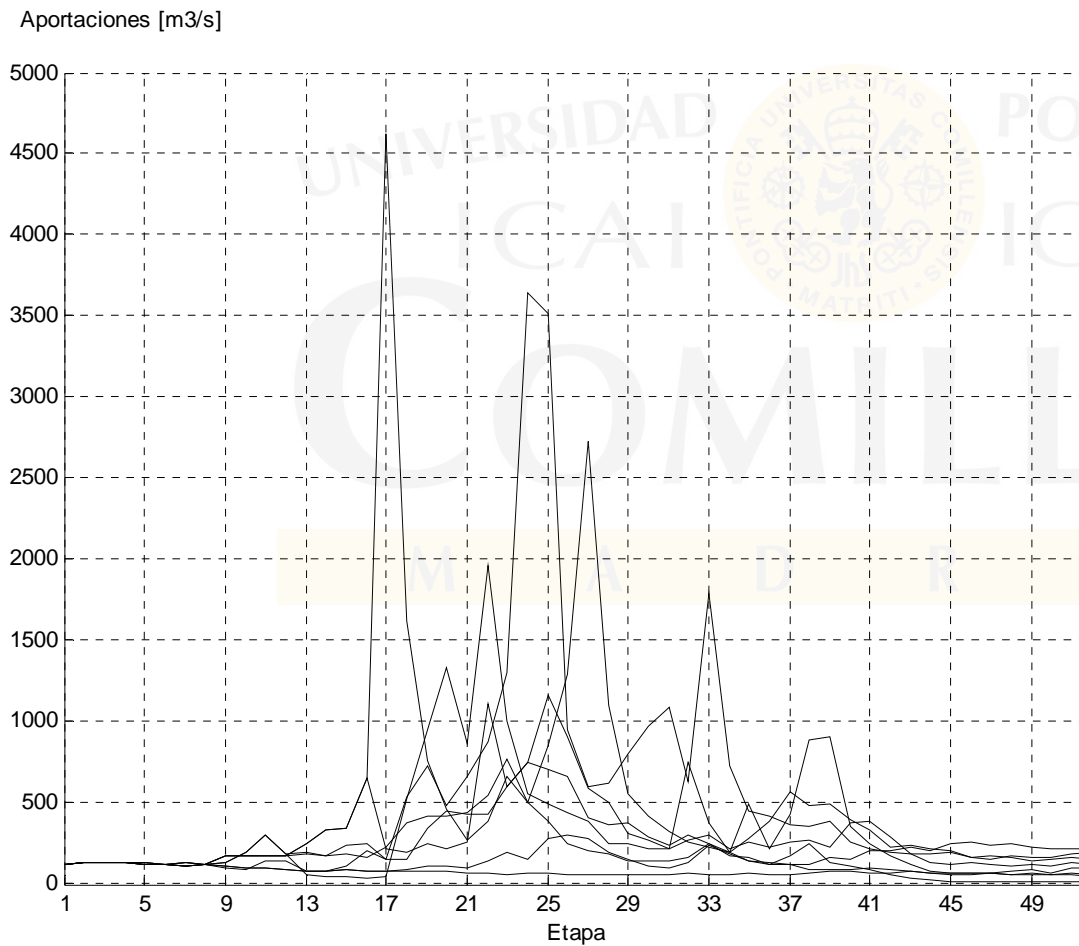
Aportaciones naturales

- **Árbol de escenarios inicial** para una aportación

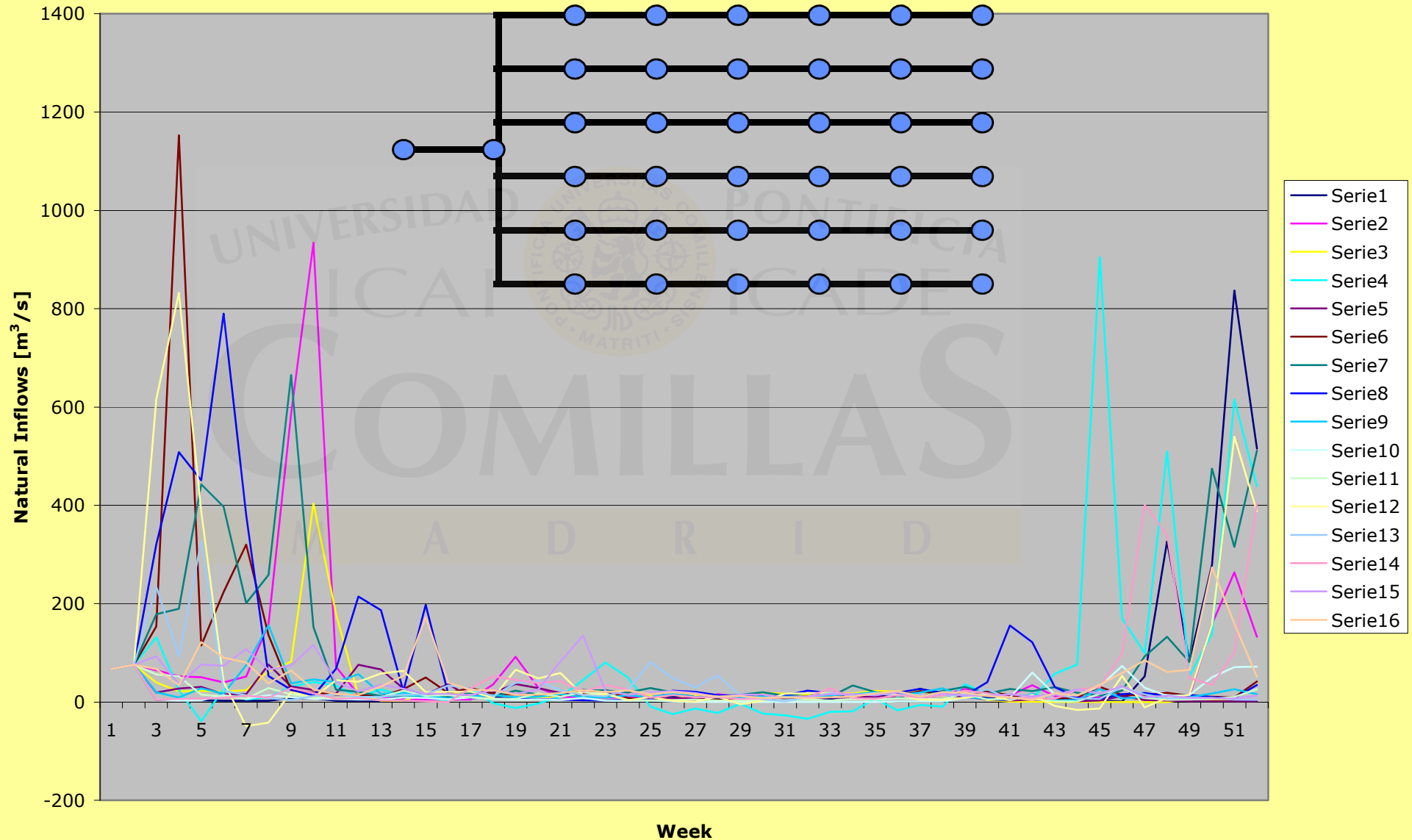


Aportaciones naturales

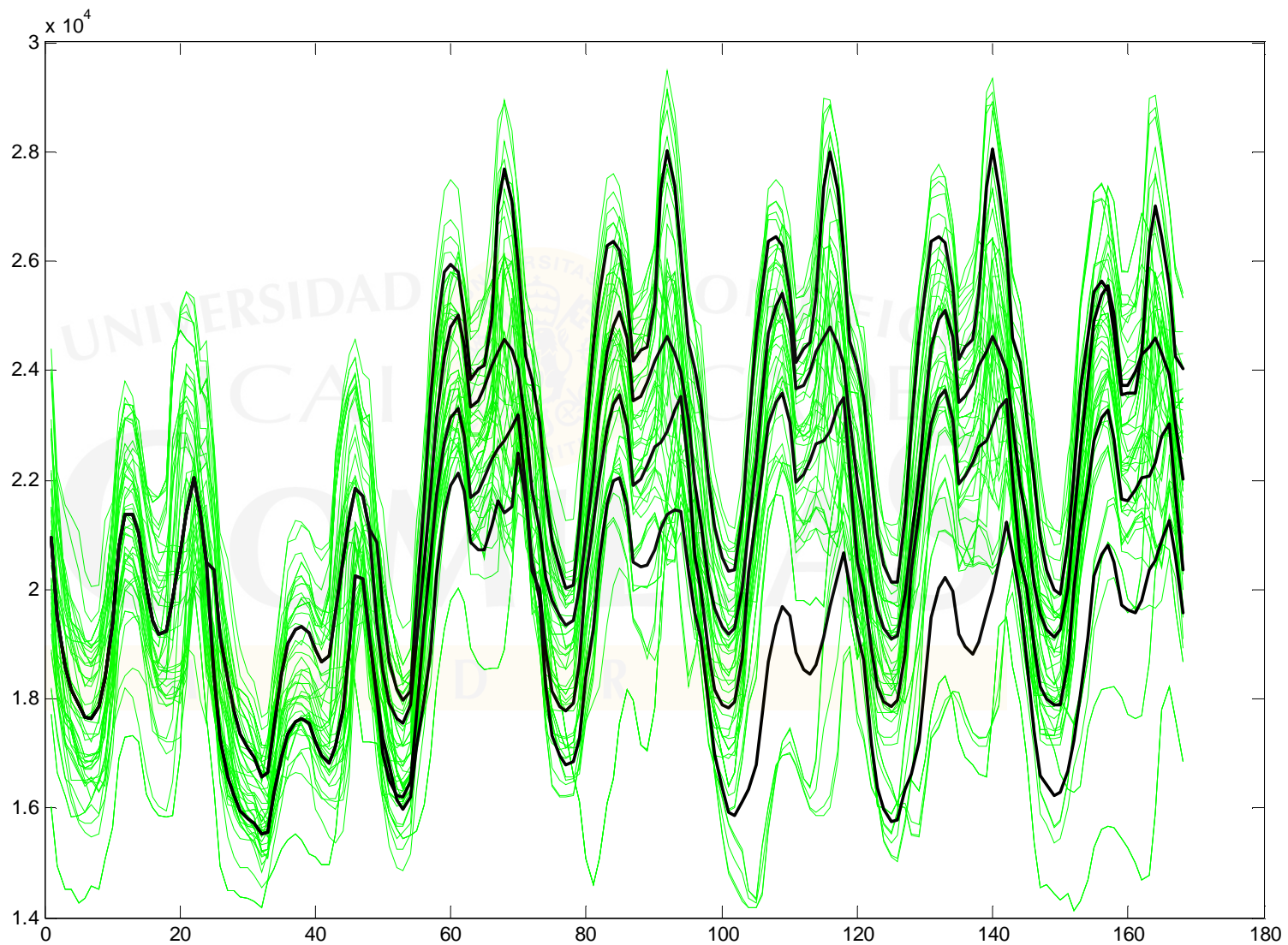
- Árbol de escenarios para una aportación reducido



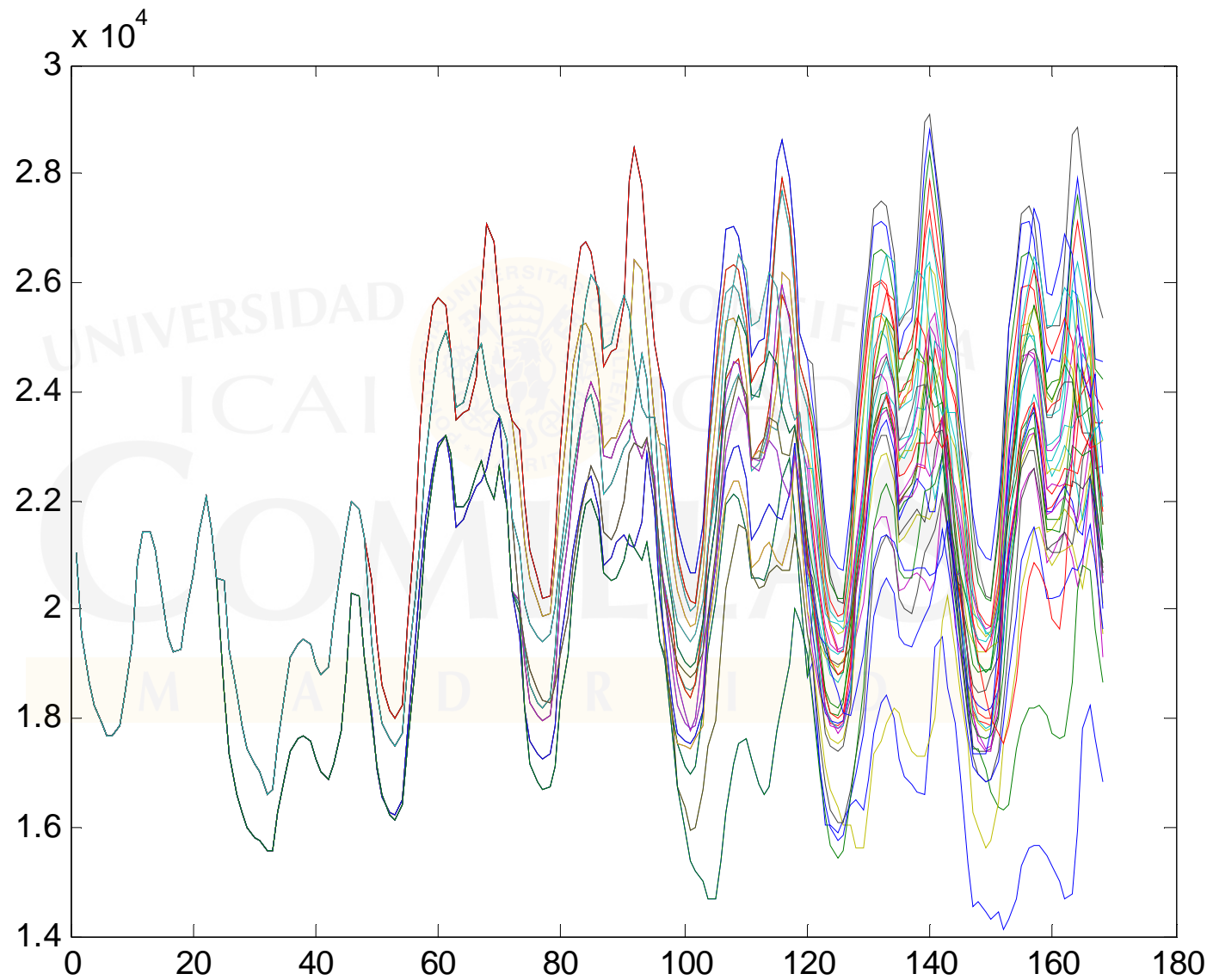
Aportaciones naturales: árbol de escenarios



Demanda semanal. Árbol de 4 escenarios



Demanda semanal. Árbol de 32 escenarios



Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- **Simulación en optimización estocástica**
- Programación dinámica dual estocástica

Necesidad de la simulación

- Número de estados de parámetros aleatorios muy elevado
- Calcular la esperanza de la función de recursos (multicorte) o esperanza de términos de los cortes (monocorte)
- Equivalente a integrar o muestrear en el hiperespacio de los parámetros aleatorios con función de densidad conocida. Una muestra es una combinación de valores de parámetros aleatorios
- Cada muestra es computacionalmente costosa (resolver un problema LP)

Técnicas de simulación y reducción de varianza

- Simulación de Monte Carlo
- Técnicas de reducción de varianza (VRT)
 - números aleatorios comunes
 - variables antitéticas
 - variables de control
 - muestreo estratificado
 - muestreo por importancia

Tipos de muestreo

- *Muestreo externo*
 - Se toman las muestras para reducir el tamaño del problema y luego se aplica el método de optimización correspondiente para resolverlo.
 - En SDDP se muestrea en la pasada hacia adelante
- *Muestreo interno*
 - Se toman las muestras al mismo tiempo que se aplica el método de optimización que lo resuelve.
 - En un problema de planificación bietapa donde la esperanza de la segunda etapa es sustituida por la media muestral de la segunda etapa

Simulación de Monte Carlo

- Si los parámetros son independientes: función de cuantía conjunta es producto de funciones de cuantía
- Cálculo de **media muestral**, **varianza de la media**, **intervalo de confianza**.
- Fin de muestreo cuando **intervalo de confianza** de la media de la función objetivo de la segunda etapa sea **inferior a cierta tolerancia**.

M A D R I D

Hipótesis de la simulación

- Cortes esperados dejan de ser planos soporte de la función de recursos convexa, pueden intersecar
- Supuestos en el muestreo
 - Error en los cortes está en las cotas, no en gradientes, y su varianza es la misma que para la función objetivo
 - El maestro mantiene la base independientemente de las cotas de los cortes
 - Cortes entre iteraciones son estadísticamente independientes

Criterio de convergencia sencillo

- Cota superior e inferior son parámetros aleatorios
 - Menor cota superior es la cota superior de menor media en todas las iteraciones
 - Mayor cota inferior es la cota inferior última
 - Varianza de cada cota asociada a la varianza de la función objetivo de los subproblemas
- Criterio de convergencia para número de muestras dado: intervalo de confianza de la diferencia de cotas contiene el 0.
- Intervalo de confianza de la solución óptima definido por límite inferior de intervalo de cota inferior y límite superior de intervalo de cota superior. Ha de ser inferior a una cierta tolerancia. Si el intervalo es superior aumentar el número de muestras.

Simulación de Monte Carlo

- Comportamiento cuadrático (multiplicar por 4 número de muestras para dividir por 2 el intervalo de confianza)
- Sucesos de poca probabilidad con valores altos de función objetivo ocasionan varianzas elevadas. Por tanto, muchas muestras
- Técnicas de reducción de varianza: números aleatorios comunes, variables antitéticas, variable de control, muestro por importancia, muestreo estratificado
- Permiten reducir el tamaño del intervalo de confianza de una media de una variable sin perturbar el valor de ésta para un mismo número de muestras n , alternativamente, conseguir la precisión deseada con menor esfuerzo de muestreo.

Técnicas de Reducción de Varianza VRT (I)

- Habitualmente, es imposible conocer de antemano cuál va a ser la reducción de varianza conseguida o incluso si ésta se va a producir. Debe experimentarse considerando el sistema real a analizar.
- Se debe conocer en detalle el modelo que reproduce el comportamiento del sistema.
- La utilización de VRT se puede entender como una forma de aprovechar información sobre el sistema en cuestión.
- Implican un sobrecoste computacional para realizar ciertos muestreos preliminares o cálculos complementarios al proceso mismo de simulación.

Técnicas de reducción de varianza VRT (II)

- Números aleatorios comunes o muestreo correlacionado o simulación comparativa o cadenas (parejas) sincronizadas
 - Se realizan muestreos para configuraciones diferentes del sistema con el mismo conjunto de números aleatorios siendo utilizado cada uno para la misma función en los diferentes muestreos.
- Variables antitéticas
 - Se basa en la idea de introducir correlación negativa entre dos muestras consecutivas. Consiste en la utilización de números aleatorios complementarios en dos simulaciones sucesivas.

Técnicas de reducción de varianza VRT (III)

- Variable de control
 - La idea básica es utilizar los resultados de un modelo más sencillo para predecir o explicar parte de la varianza del valor a estimar. Se necesita un cálculo previo del valor esperado de la variable de control. Este cálculo debe ser muy rápido frente al de la variable a estimar.
- Muestreo por importancia
 - Se reemplaza la variable aleatoria a estimar por otra con la misma media pero menor varianza. Se modifica la función de densidad utilizada en el muestreo de manera que esté centrada en la zona de interés. Se evita el muestrear sucesos probables pero no interesantes.

Técnicas de reducción de varianza VRT (IV)

- Muestreo estratificado

- La idea intuitiva de esta técnica es similar a la anterior pero en versión discreta. Consiste en tomar más muestras de la variable aleatoria en las zonas de mayor interés. La varianza se reduce al concentrar el esfuerzo de simulación en los estratos más relevantes.

Números aleatorios comunes (I)

- La idea básica de esta técnica es la comparación de alternativas de un sistema bajo las mismas condiciones experimentales y, por consiguiente, las diferencias en los atributos del sistema se deben a las diversas configuraciones y no a las condiciones experimentales. Es la única técnica que se emplea para este propósito.
- Esta técnica trata de inducir una correlación positiva entre los muestreos hechos para las dos configuraciones utilizando los mismos números aleatorios.

Números aleatorios comunes (II)

- Esto es posible por la característica de reproducibilidad de las cadenas de números pseudoaleatorios. Dicho de otra forma, el uso de una cadena cuya semilla inicial es incontrolablemente aleatoria en general impide el uso de esta técnica.
- No existe garantía de reducción de varianza ni de su posible impacto. Su eficacia depende del sistema.
- Es conveniente la realización de un estudio piloto para probar su eficacia.

Números aleatorios comunes (III)

- La implantación correcta de esta técnica requiere la sincronización de los números aleatorios para las diferentes configuraciones. Es decir, un número aleatorio utilizado con un fin en una configuración deberá ser utilizado exactamente para el mismo fin en otras configuraciones.
- No es suficiente el comenzar ambos muestreos con la misma semilla. Soluciones:
 - desperdiciar números aleatorios en ciertos puntos
 - utilizar una cadena de números aleatorios para cada parámetro aleatorio teniendo especial cuidado en evitar los solapes entre cadenas de números

Variables antitéticas (I)

- La idea básica es realizar muestreos por parejas de manera que una observación inferior a la media tienda a ser corregida por otra superior a la media en la siguiente observación. Si se toma la media de las dos observaciones como una muestra, se tenderá a estar más cercano a la media que queremos estimar que si se tomaran individualmente las dos observaciones. Trata de inducir correlación negativa entre muestreos separados.

Variables antitéticas (II)

- La implantación de esta técnica se hace mediante el uso de números aleatorios complementarios. Es decir, si un número se utiliza para un fin en una observación se toma el complementario para el mismo fin en la siguiente observación, están sincronizados.
- No existe garantía de reducción de varianza ni de su impacto. El comportamiento del sistema ha de ser monótono con respecto a la variación de un número aleatorio.
- La combinación de esta técnica con la de números aleatorios comunes no tiene por qué ser eficaz.

Variable de control (I)

- La idea básica es similar a la de las anteriores técnicas, aprovechar la correlación entre la variable de control y la controlada para obtener una reducción de la varianza. La variable de control explica cierta parte de la varianza de la variable controlada.
- Implícitamente se supone que la evaluación de una muestra de la variable de control cuesta mucho menos tiempo que la evaluación de la variable controlada.

Variable de control (II)

- X es la variable controlada cuya media desea estimarse $E(X)=\mu$. Y es la variable de control, correlacionada con X positiva o negativamente, cuyo valor esperado con $E(Y)=\nu$ conocida.
- Se define Z como la variable aleatoria $Z=X-a(Y-\nu)$. Tanto Z como X tienen la misma media $E(Z)=E(X)=\mu$. Por consiguiente, Z es un estimador centrado de μ que es el valor a estimar. La constante a tiene el mismo signo que la correlación entre X e Y, se utiliza para ampliar la desviación $Y-\nu$ para ajustar X. La varianza de Z se calcula como $\text{var}(Z) = \text{var}(X) + a^2 \text{var}(Y) - 2a\text{cov}(X,Y)$
- El valor óptimo de a, a^* , que minimiza la varianza de Z es $a^* = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}$. Como no se puede obtener se puede reemplazar por un estimador del mismo con n muestras $\hat{a}^*(n) = \frac{\hat{\text{cov}}_{XY}(n)}{S^2_Y(n)}$
- Se puede decir que una buena variable de control debe estar fuertemente correlacionada con la variable controlada para proporcionar mucha información sobre ésta y hacer un buen ajuste. Además sería deseable que la variable de control tuviera poca varianza

Variable de control (III)

- Pueden clasificarse en:
 - Internas
 - Son parámetros del modelo o funciones de los mismos, como la media. Sus valores medios son habitualmente conocidos. No añaden esfuerzo de simulación.
 - Externas
 - Son aquellas variables aleatorias de salida derivadas de introducir simplificaciones en el modelo que lo hacen inadecuado como tal pero permiten utilizarlas como variable de control. En este caso se necesita un muestreo adicional con números aleatorios comunes para la variable de control. La correlación entre variable de control y controlada deberá ser ahora mayor para que merezca la pena el esfuerzo adicional de simulación.
- Un ejemplo de variables de control externas son las medidas de fiabilidad sólo de generación o sólo de red para el cálculo de medidas de fiabilidad compuesta (debida a fallos de generación y/o de red).

Muestreo por importancia

- Aumentar la frecuencia de aparición de sucesos con mayor impacto en la función objetivo
- Muestrear una nueva función con función de cuantía deformada
- Ambas funciones tienen la misma media pero mucho menor varianza
- Paso de una integral multidimensional a muchas (tantas como parámetros) unidimensionales
- Función de cuantía nueva muestrea con probabilidad original en todas coordenadas excepto en una y en esa en función del impacto con respecto al caso base

Muestreo estratificado

- En la técnica de muestreo estratificado se divide la región donde se va a muestrear en estratos disjuntos. La idea intuitiva de esta técnica es similar a la de muestreo por importancia pero en versión discreta. Consiste en tomar más muestras de la variable aleatoria en las zonas de mayor interés. El tamaño de cada estrato es proporcional al valor de la variable a estimar. La varianza se reduce al concentrar el esfuerzo de simulación en los estratos más relevantes.
- Para obtener la mínima varianza en la estimación se reparte el número total de muestras a realizar de forma proporcional al producto del tamaño de cada estrato por la desviación típica de la variable a estimar. Como ésta no es conocida se efectúa un estudio piloto que determine la desviación estándar de la variable en cada estrato.
- Incluso tomando un número de muestras en cada estrato proporcional a su tamaño se garantiza que la varianza obtenida por muestreo estratificado es menor o igual que la que se obtendría por Monte Carlo puro.

Muestreo por importancia y estratificado conjunto

- Fase de **preparación**
 - Se estiman los **incrementos de la f.o.** en cada coordenada
 - Se calculan las **funciones de cuantía de importancia**
- Fase de **cálculo**
 - Muestreo **estratificado en cada coordenada** (muestras proporcionales a incremento medio de la f.o.)
 - Muestreo **por importancia según función de cuantía conjunta**
 - Evaluación de **media y varianza**
- En un caso concreto se necesitaron 100 muestras para intervalo del 02.% con aceptabilidad del 95 %

Índice

- Planteamiento general
- Planificación lineal bietapa y multietapa determinista y estocástica
- Técnicas de descomposición
- Descomposición de Benders
- Descomposición de Dantzig-Wolfe
- Relajación lagrangiana
- Descomposición anidada
- Descomposición en planificación lineal estocástica bietapa y multietapa
- Mejoras en las técnicas de descomposición
- Árbol de escenarios
- Simulación en optimización estocástica
- **Programación dinámica dual estocástica**

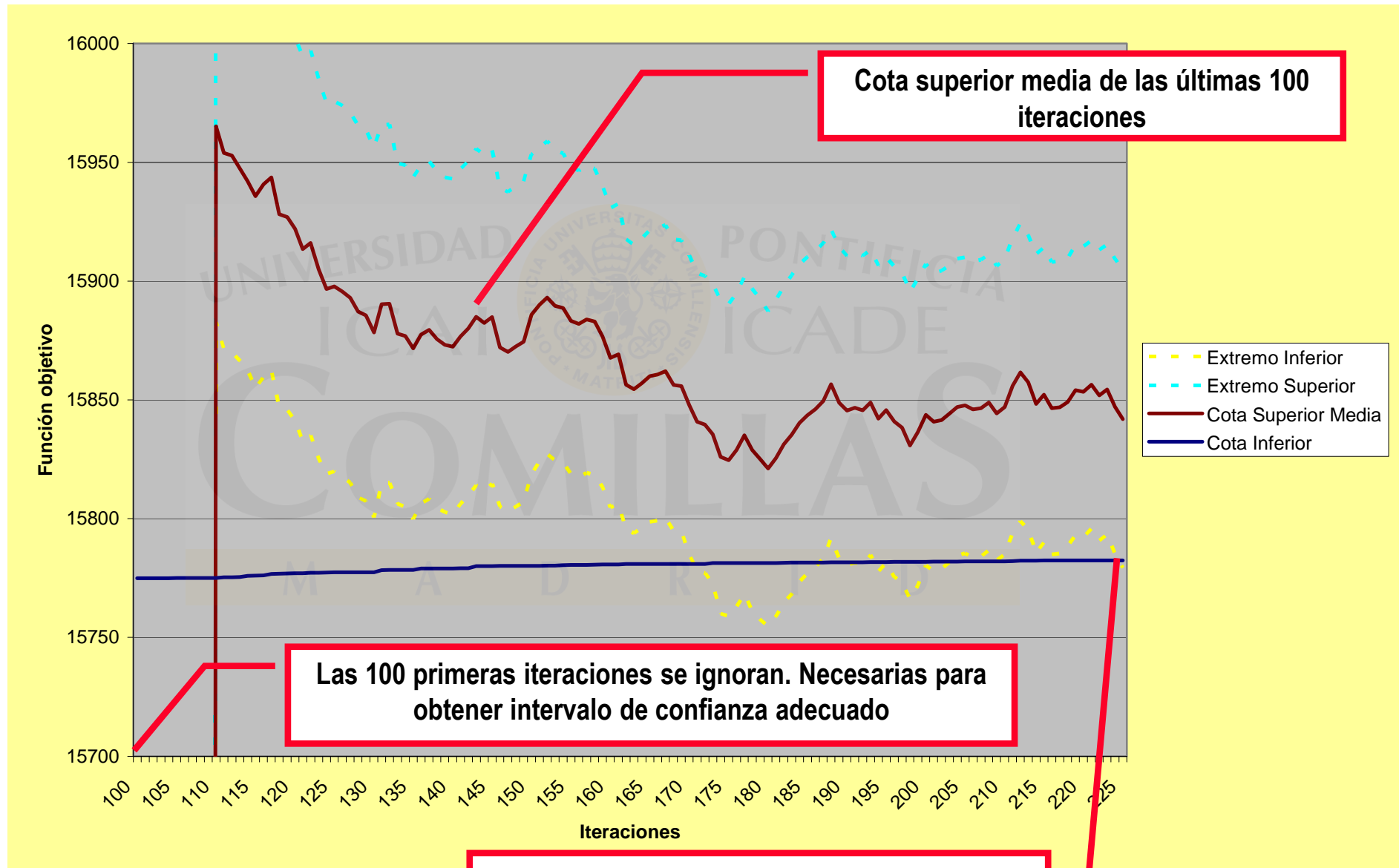
Stochastic Dual Dynamic Programming SDDP

- Descomposición anidada de Benders con
 - Sorteo de los escenarios a evaluar en lugar de enumerar todos los escenarios en la pasada hacia delante
 - Resolución de **todos los nodos hijos** del árbol recombinante de cada padre en la pasada hacia atrás
- Como se hace un sorteo la **convergencia es estocástica**
 - Cota inferior es determinista. Cota superior es estocástica
 - **Criterio de parada:** cota inferior dentro del intervalo de confianza de la cota superior
 - Si el criterio de convergencia es del 1% para un nivel de confianza del 95%. El algoritmo se detiene cuando estamos seguros con un nivel de confianza del 95% de que la diferencia relativa entre la cota superior y la cota inferior es menor que el 1%

Programación dinámica dual estocástica

Step 0	Set $I_t^{\xi_t} = J_t^{\xi_t} = 0$. Set $\theta_t^{\xi_t} \equiv 0$ at the initial iteration
Step 1	<p>Simulate N scenarios $(h_t^{\xi_t})^n, n : 1, \dots, N, t = 1, \dots, T$</p> <p>Forward pass:</p> <p>Repeat for $n : 1, \dots, N$</p> <p> Repeat for $t = 1, \dots, T$</p> <p> Solve $(RP_t^{\xi_t})$ with r. hand side value $(h_t^{\xi_t})^n$ and obtain solution $(x_t^{\xi_t})^n$</p> <p> If $t = 1$ obtain lower bound $\underline{z} = v(RP_1^{\xi_{s_1}})$</p> <p> If infeasible: stop forward pass for simulation n</p>
Step 2	<p>Upper bound computation:</p> <p>Evaluate objective function of the complete (deterministic) problem for each of the primal solutions so far obtained. $\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T c_t (x_t^{\xi_t})^n$</p>
Step 3	<p>(stopping rule)</p> <p>If $\bar{z} - \underline{z} < tol$ stop, $x_1^{\xi_{s_1}}$ is optimal solution, else go to Step 4</p>
Step 4	<p>Backward pass</p> <p>Repeat for $t = T, \dots, 1$</p> <p> Repeat for each node ξ_t of stage t</p> <p> Repeat for each proposal obtained in forward pass, modifying the right hand side value of subproblem $(RP_t^{\xi_t})$</p> <p> Solve $(RP_t^{\xi_t})$</p> <p> If feasible: obtain objective $\theta_t^{\xi_t, i} = v(RP_t^{\xi_t})$ and dual values $\pi_t^{\xi_t, i}$</p> <p> Augment $I_t^{\xi_t} = I_t^{\xi_t} + 1$</p> <p> If infeasible: obtain sum of infeasibilities $\tilde{\theta}_t^{\xi_t, j}$ and dual values $\tilde{\pi}_t^{\xi_t, j}$</p> <p> Augment $J_t^{\xi_t} = J_t^{\xi_t} + 1$</p> <p> Go to step 1</p>

Convergencia estocástica en SDDP (i)



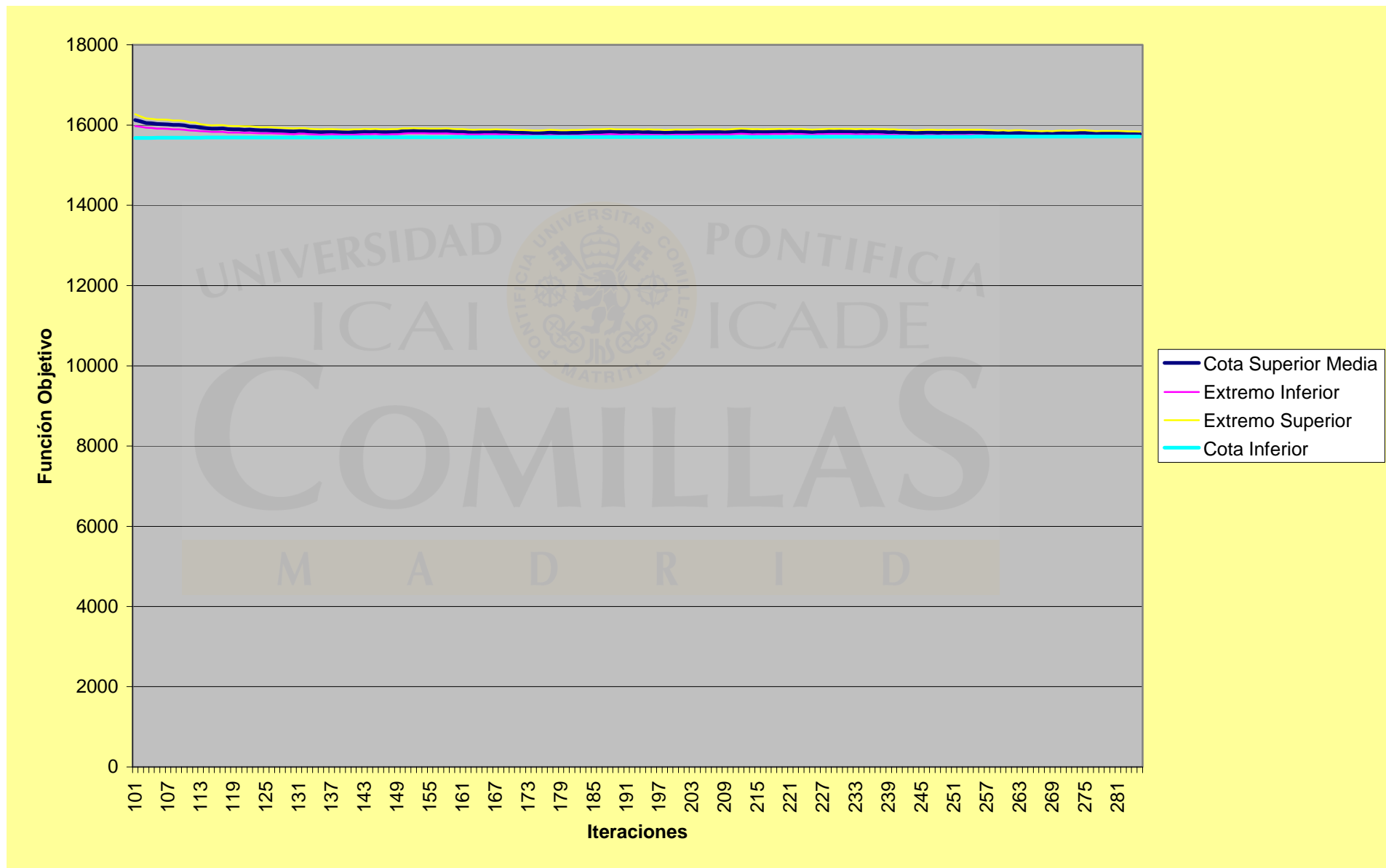
Las 100 primeras iteraciones se ignoran. Necesarias para obtener intervalo de confianza adecuado

Cota superior media de las últimas 100 iteraciones

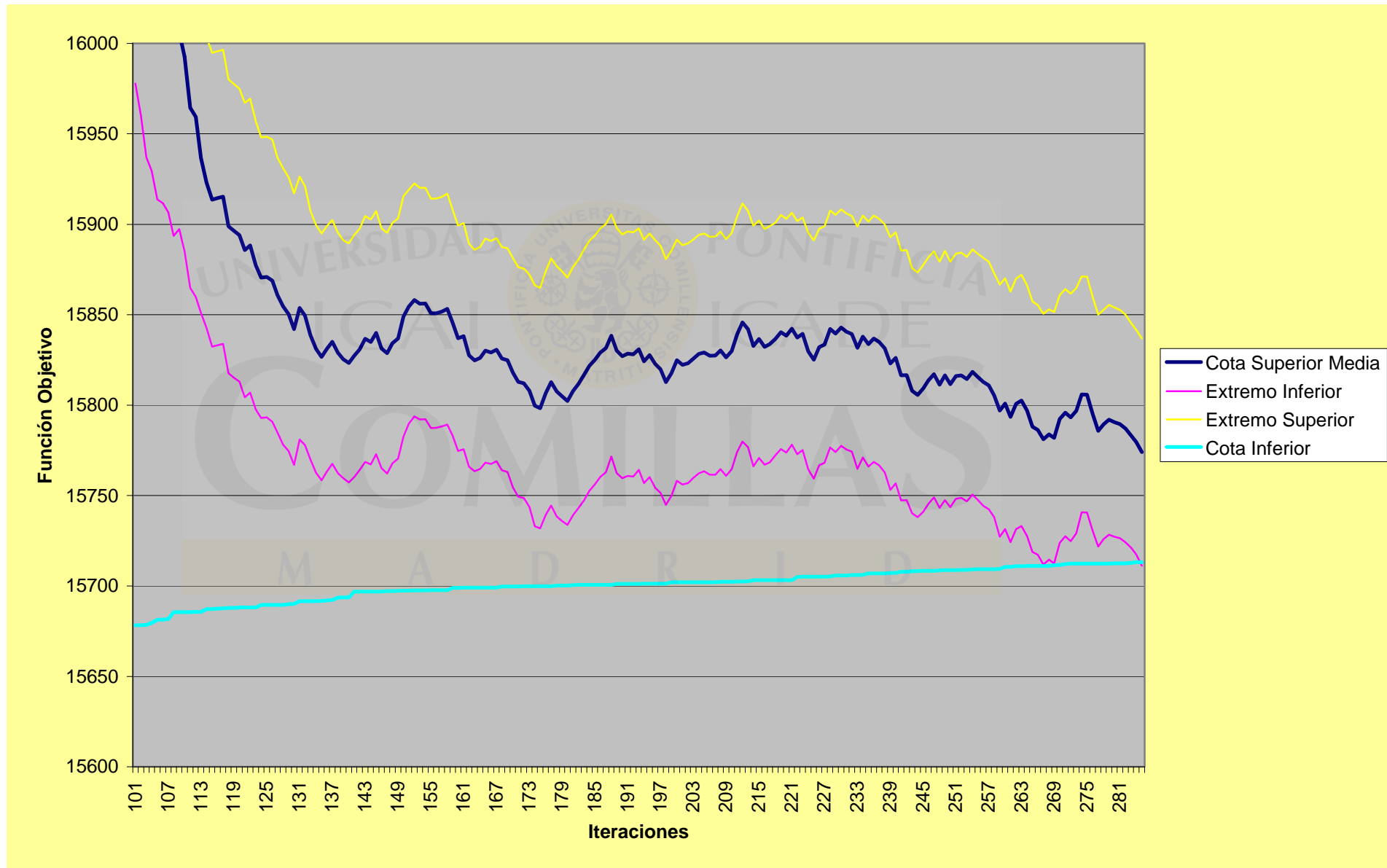
Si la cota inferior entra dentro del intervalo de confianza de la cota superior con un nivel de confianza del 95 %, el proceso se detiene



Convergencia estocástica en SDDP (ii)



Convergencia estocástica en SDDP (ii) (detalle)



Descomposición SDDP

- Adecuada para problemas estocásticos en los que la estocasticidad se introduce de modo independiente por escenarios. La dependencia de un escenario con respecto a otro se modela mediante probabilidades de transición
- Este modelado da lugar a un problema estocástico modelado sobre un árbol recombinante
- El gran número de escenarios imposibilita la resolución del problema determinista equivalente
- El algoritmo simula en la pasada hacia delante un escenario de aportaciones y lo resuelve. En la pasada hacia atrás aproxima para cada escenario de aportaciones la función de recurso en los valores de reservas obtenidos en la iteración hacia delante
- Uso de multicorte
- Troceado es más rígido porque está condicionado por los periodos de ramificación
- La cota inferior que obtiene el algoritmo es determinista. Por el contrario, la cota superior es estocástica. Criterio de parada utiliza intervalo de confianza para la cota superior. El algoritmo se detiene cuando la cota inferior pertenece a dicho intervalo de confianza

Descomposición de Benders

- Adecuada para estructuras de problemas estocásticos modelados en forma de árbol. Dicho árbol puede presentar cualquier tipo de estructura, simétrica o no simétrica
- Uso de multicorte para reducir tiempos de ejecución
- Agregación de nodos para reducir tiempos de ejecución
- Posibilidad de indicar los periodos en los que se quiere trocear el problema
- Algoritmo evoluciona obteniendo una cota inferior y una cota superior hasta que la diferencia relativa entre ambas es menor que una tolerancia

Comparaciones métodos de descomposición

Benders	SDDP
Árboles de escenarios sin estructura fija	Árboles de escenarios recombinantes
Resolución del Modelo Determinista Equivalente	Imposibilidad de resolver el Modelo Determinista Equivalente
Multicorte	Multicorte
Troceado flexible	Troceado rígido
En cada pasada hacia delante se resuelven todos los escenarios	En cada pasada hacia delante sólo se resuelve un escenario
Criterio de parada determinista	Criterio de parada estocástico
Crecimiento exponencial del tiempo con el número de escenarios	Crecimiento lineal del tiempo con el número de escenarios



Andrés Ramos

Universidad Pontificia Comillas

<http://www.iit.comillas.edu/aramos/>

Andres.Ramos@comillas.edu