



# Planificación y control de proyectos

José María Ferrer Caja  
Universidad Pontificia Comillas

# Introducción

---

- ❑ Un **proyecto** es un conjunto de actividades o tareas interrelacionadas
- ❑ Se conocen con antelación las **relaciones de precedencia** entre las distintas actividades
- ❑ La **duración** de las actividades puede ser **determinista** o **aleatoria**
- ❑ Cada actividad requiere unos **recursos**
- ❑ La **planificación de proyectos** pretende coordinar las actividades y asignar los recursos de forma que se alcancen una o varias metas:
  - ✓ **Menor tiempo** de realización del proyecto
  - ✓ **Menor coste**
  - ✓ Cumplimiento de **plazos de entrega**
  - ✓ Detección de **cuellos de botella**

# Representación del proyecto

---

- ❑ Un proyecto se representa mediante una **red de actividades**
- ❑ Pasos previos
  - ✓ Identificar las actividades individuales que forman el proyecto
  - ✓ Especificar sus relaciones de precedencia
  - ✓ Estimar sus duraciones
- ❑ Reglas para la **red de actividades**
  - ✓ Cada **arco** representa una **actividad**, y se especifica su duración
  - ✓ Cada **nodo** representa un **evento**, puede ser el final de algunas actividades y el principio de otras
  - ✓ Cada par de nodos puede estar unido a lo sumo por un arco
  - ✓ Si es necesario, se pueden utilizar **actividades ficticias** con duración nula. Se representan mediante arcos con línea discontinua

# Representación del proyecto. Ejemplo (1)

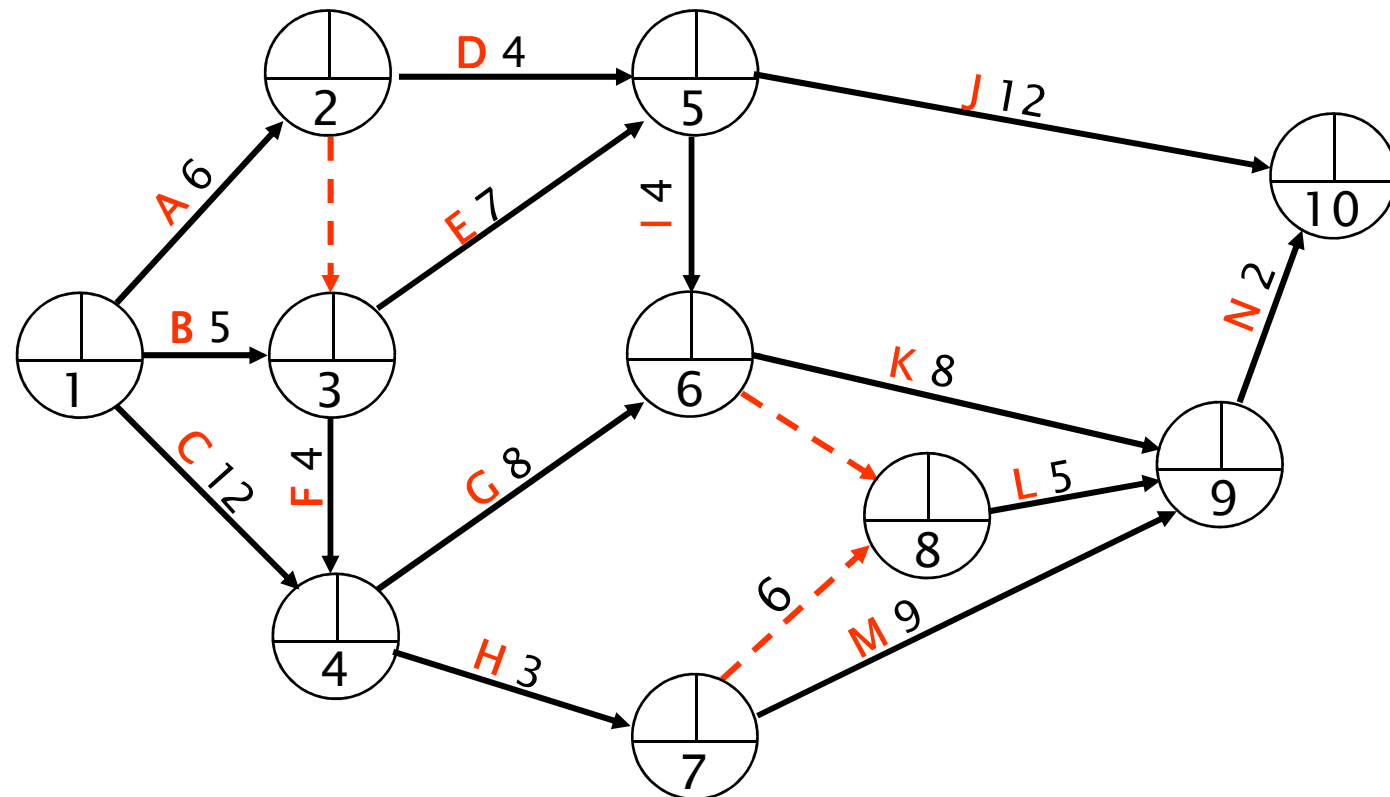
- En la tabla siguiente se muestra un conjunto de actividades, su duración y sus precedencias

Actividad	Duración	Sucesores
A	6	D, E, F
B	5	E, F
C	12	G, H
D	4	I, J
E	7	I, J
F	4	G, H
G	8	K, L
H	3	M
I	4	K, L
J	12	
K	8	N
L	5	N
M	9	N
N	2	

- Además, entre el final de H y el comienzo de L deben transcurrir al menos 6 unidades de tiempo

# Representación del proyecto. Ejemplo (2)

□ Red de actividades:



# Determinación del camino crítico (CPM)

- ❑ El objetivo es obtener la **duración mínima del proyecto** y determinar las actividades críticas
  - ✓ **Actividad crítica**: Actividad cuyo retraso supone un retraso en el proyecto
  - ✓ **Camino crítico**: Camino del nodo inicial al nodo final formado por actividades críticas
- ❑ Notación
  - ✓  $d_{ij}$  → duración de la actividad que va del nodo  $i$  al nodo  $j$
  - ✓  $t_i$  → instante más temprano en el que pueden empezar las actividades cuyo nodo inicial es  $i$
  - ✓  $T_i$  → instante más tardío en el que pueden acabar las actividades cuyo nodo final es  $i$  sin retrasar el proyecto
- ❑ Se realiza en dos fases:
  - ✓ Fase hacia **adelante**: Cálculo de los instantes más tempranos
  - ✓ Fase hacia **atrás**: Cálculo de los instantes más tardíos

# CPM. Algoritmo

## □ Fase hacia adelante

1. Etiquetar el nodo inicial con tiempo 0:  $t_1 = 0$
2. Elegir un nodo  $j$  tal que todos los nodos anteriores adyacentes a él ya hayan sido etiquetados. Etiquetar el nodo  $j$  con el máximo de las etiquetas de estos nodos más la longitud del arco que los une:

$$t_j = \max_i \{t_i + d_{ij} : (i, j) \in A\}$$

3. Repetir el paso 2 hasta que todos los nodos estén etiquetados

## □ Fase hacia atrás

1. Etiquetar el nodo final  $n$  con su instante más temprano:  $T_n = t_n$
2. Elegir un nodo  $j$  tal que todos los nodos posteriores adyacentes a él ya hayan sido etiquetados. Etiquetar el nodo  $j$  con el mínimo de las etiquetas de estos nodos menos la longitud del arco que los une:

$$T_j = \min_i \{T_i - d_{ji} : (j, i) \in A\}$$

3. Repetir el paso 2 hasta que todos los nodos estén etiquetados

# CPM. Holguras

- ❑ Holgura del evento  $j$ :  $T_j - t_j$ 
  - ✓ El primer evento y el último siempre tienen holgura 0
- ❑ Holgura total de la actividad  $(i, j)$ :  $TF_{ij} = T_j - t_i - d_{ij}$ 
  - ✓ Cantidad en que se puede retrasar unilateralmente el inicio de la actividad  $(i, j)$  más allá de su instante más temprano sin retrasar el proyecto
  - ✓ Máxima cantidad de tiempo en que puede incrementarse su duración sin retrasar el proyecto
  - ✓ No se considera la holgura de las actividades ficticias
- ❑ Holgura libre de la actividad  $(i, j)$ :  $FF_{ij} = t_j - t_i - d_{ij}$ 
  - ✓ Cantidad en que se puede retrasar unilateralmente el inicio de la actividad  $(i, j)$  más allá de su instante más temprano sin retrasar el comienzo de ninguna actividad posterior
  - ✓ Para cada actividad se cumple:  $FF_{ij} \leq TF_{ij}$



# CPM. Actividades críticas y camino crítico

---

- La actividad  $(i, j)$  es crítica si su holgura total es 0
- Existe al menos un camino crítico
- Los eventos y actividades de cualquier camino crítico tienen holgura 0
- Toda actividad crítica pertenece a algún camino crítico
- Todo evento con holgura 0 pertenece a algún camino crítico
- La duración del proyecto es  $t_n$

# CPM. Ejemplo (1)

- ❑ Aplicamos el método del camino crítico al ejemplo anterior
- ❑ Fase hacia delante:

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = t_1 + d_{12} = 0 + 6 = 6$$

$$t_3 = \max \{t_1 + d_{13}, t_2 + d_{23}\} = \max \{0 + 5, 6 + 0\} = 6$$

$$t_4 = \max \{t_1 + d_{14}, t_3 + d_{34}\} = \max \{0 + 12, 6 + 4\} = 12$$

$$t_5 = \max \{t_2 + d_{25}, t_3 + d_{35}\} = \max \{6 + 4, 6 + 7\} = 13$$

$$t_6 = \max \{t_4 + d_{46}, t_5 + d_{56}\} = \max \{12 + 8, 13 + 4\} = 20$$

$$t_7 = t_4 + d_{47} = 12 + 3 = 15$$

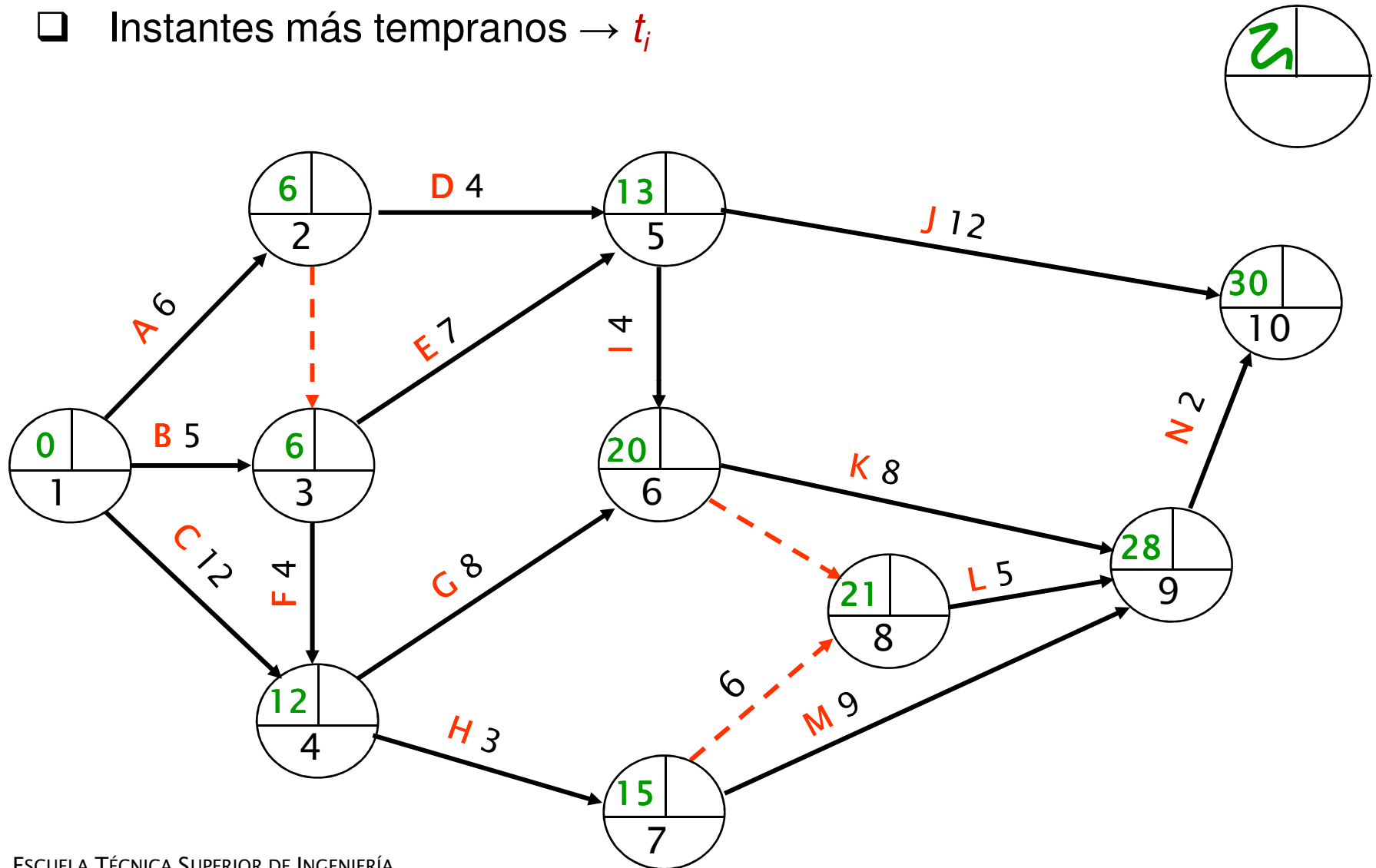
$$t_8 = \max \{t_6 + d_{68}, t_7 + d_{78}\} = \max \{20 + 0, 15 + 6\} = 21$$

$$t_9 = \max \{t_6 + d_{69}, t_7 + d_{79}, t_8 + d_{89}\} = \max \{20 + 8, 15 + 9, 21 + 5\} = 28$$

$$t_{10} = \max \{t_5 + d_{5,10}, t_9 + d_{9,10}\} = \max \{13 + 12, 28 + 2\} = 30$$

# CPM. Ejemplo (2)

□ Instantes más tempranos  $\rightarrow t_i$



## CPM. Ejemplo (3)

□ Fase hacia atrás:

$$T_{10} = t_{10} = 30$$

$$T_9 = T_{10} - d_{9,10} = 30 - 2 = 28$$

$$T_8 = T_9 - d_{8,9} = 28 - 5 = 23$$

$$T_7 = \min \{ T_8 - d_{7,8}, T_9 - d_{7,9} \} = \min \{ 23 - 6, 28 - 9 \} = 17$$

$$T_6 = \min \{ T_8 - d_{6,8}, T_9 - d_{6,9} \} = \min \{ 23 - 0, 28 - 8 \} = 20$$

$$T_5 = \min \{ T_6 - d_{5,6}, T_{10} - d_{5,10} \} = \min \{ 20 - 4, 30 - 12 \} = 16$$

$$T_4 = \min \{ T_6 - d_{4,6}, T_7 - d_{4,7} \} = \min \{ 20 - 8, 17 - 3 \} = 12$$

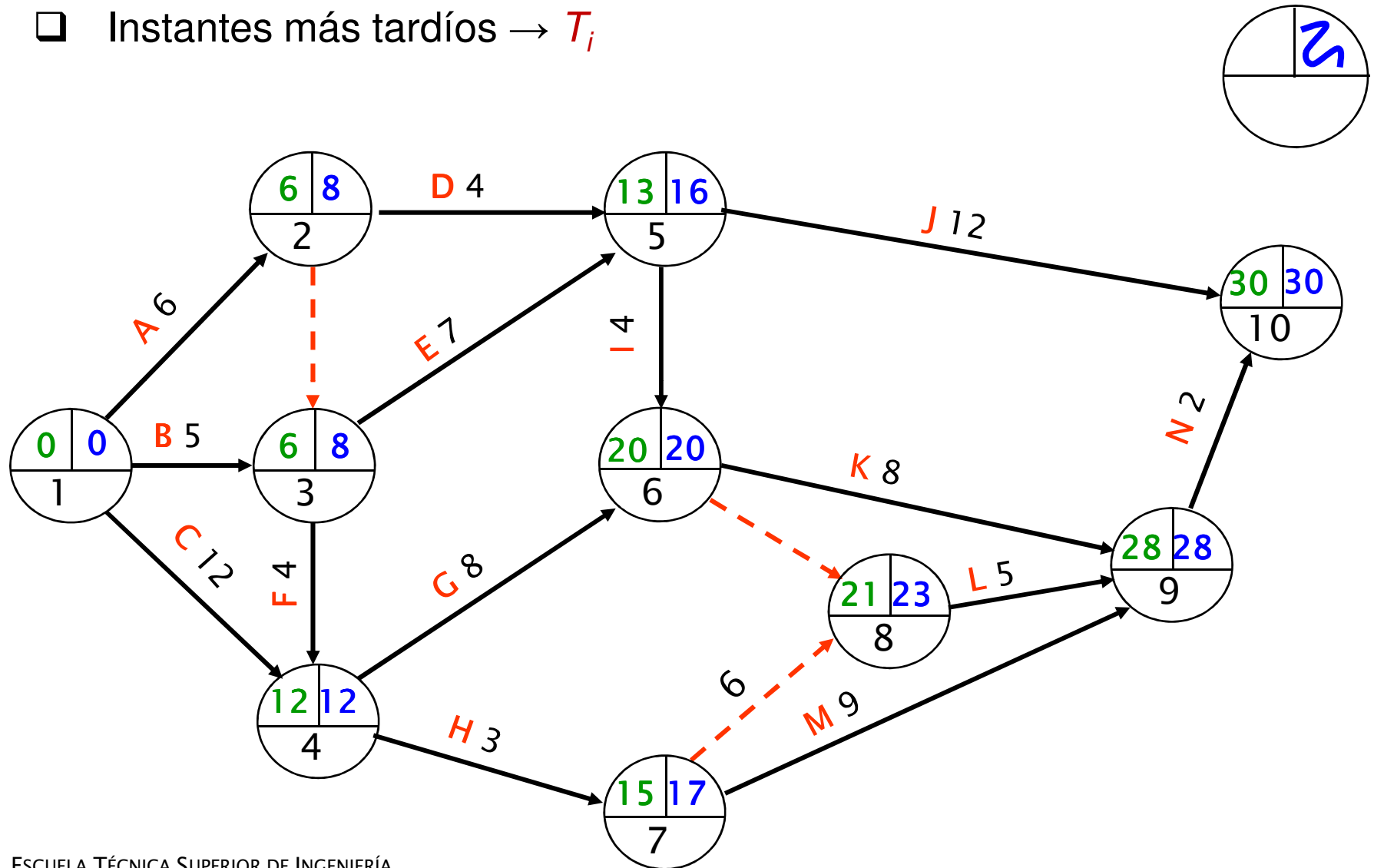
$$T_3 = \min \{ T_4 - d_{3,4}, T_5 - d_{3,5} \} = \min \{ 12 - 4, 16 - 7 \} = 8$$

$$T_2 = \min \{ T_3 - d_{2,3}, T_5 - d_{2,5} \} = \min \{ 8 - 0, 16 - 4 \} = 8$$

$$T_1 = \min \{ T_2 - d_{1,2}, T_3 - d_{1,3}, T_4 - d_{1,4} \} = \min \{ 8 - 6, 16 - 5, 12 - 12 \} = 0$$

# CPM. Ejemplo (4)

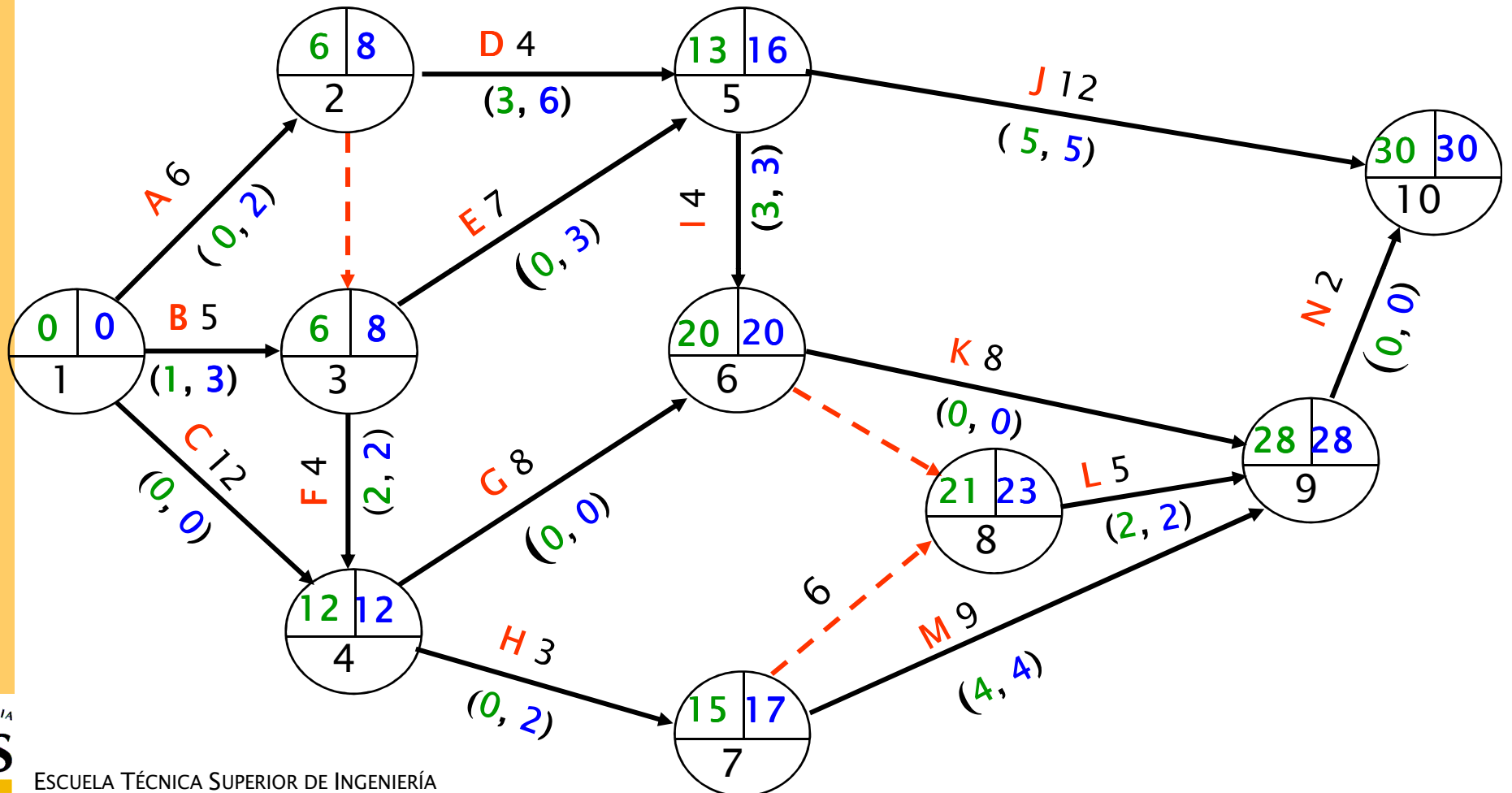
□ Instantes más tardíos  $\rightarrow T_i$



# CPM. Ejemplo (5)

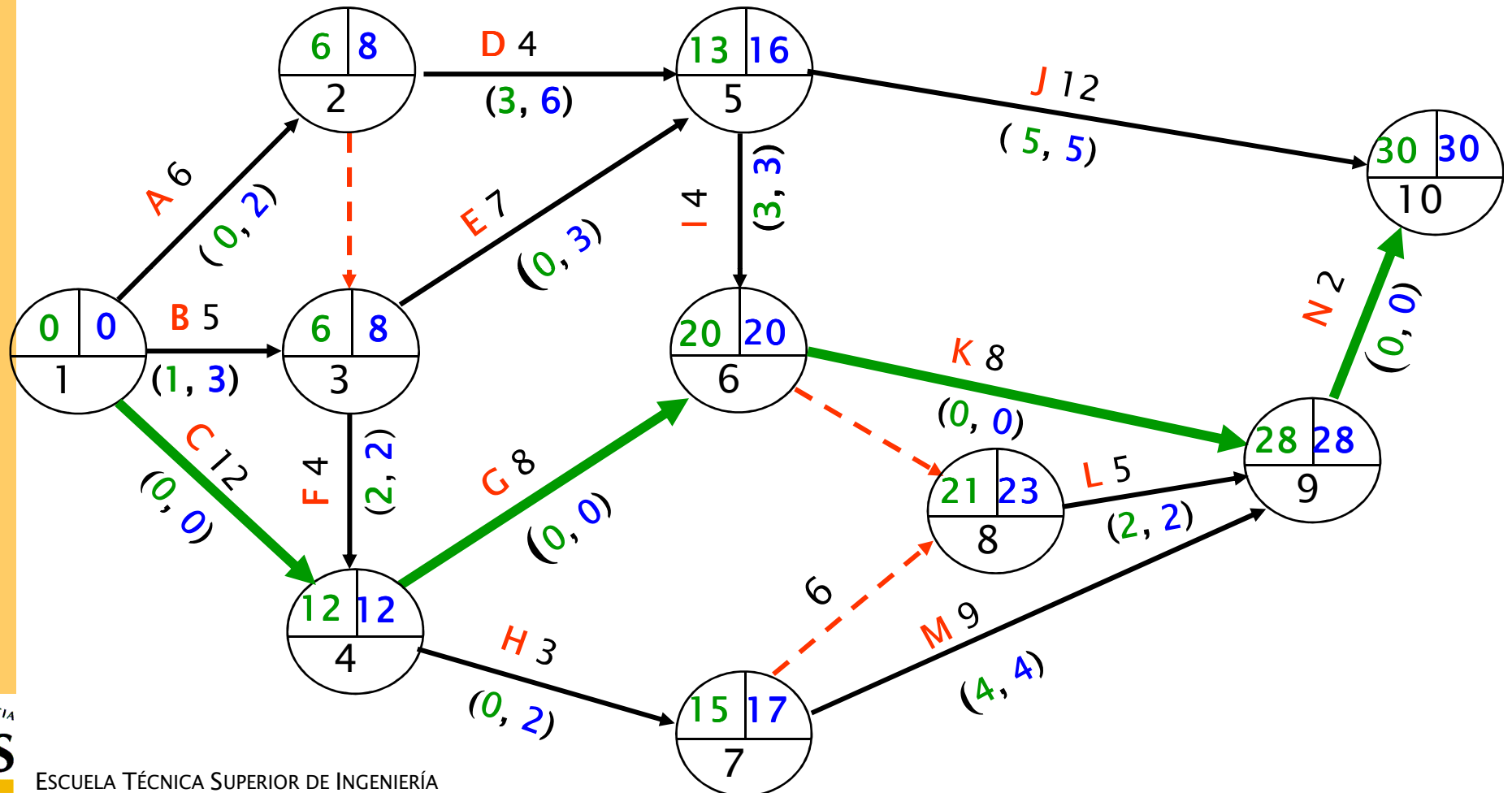
□ Holguras de las actividades  $\rightarrow (FF_{ij}, Tf_{ij})$

$\xrightarrow{(FF, TF)}$

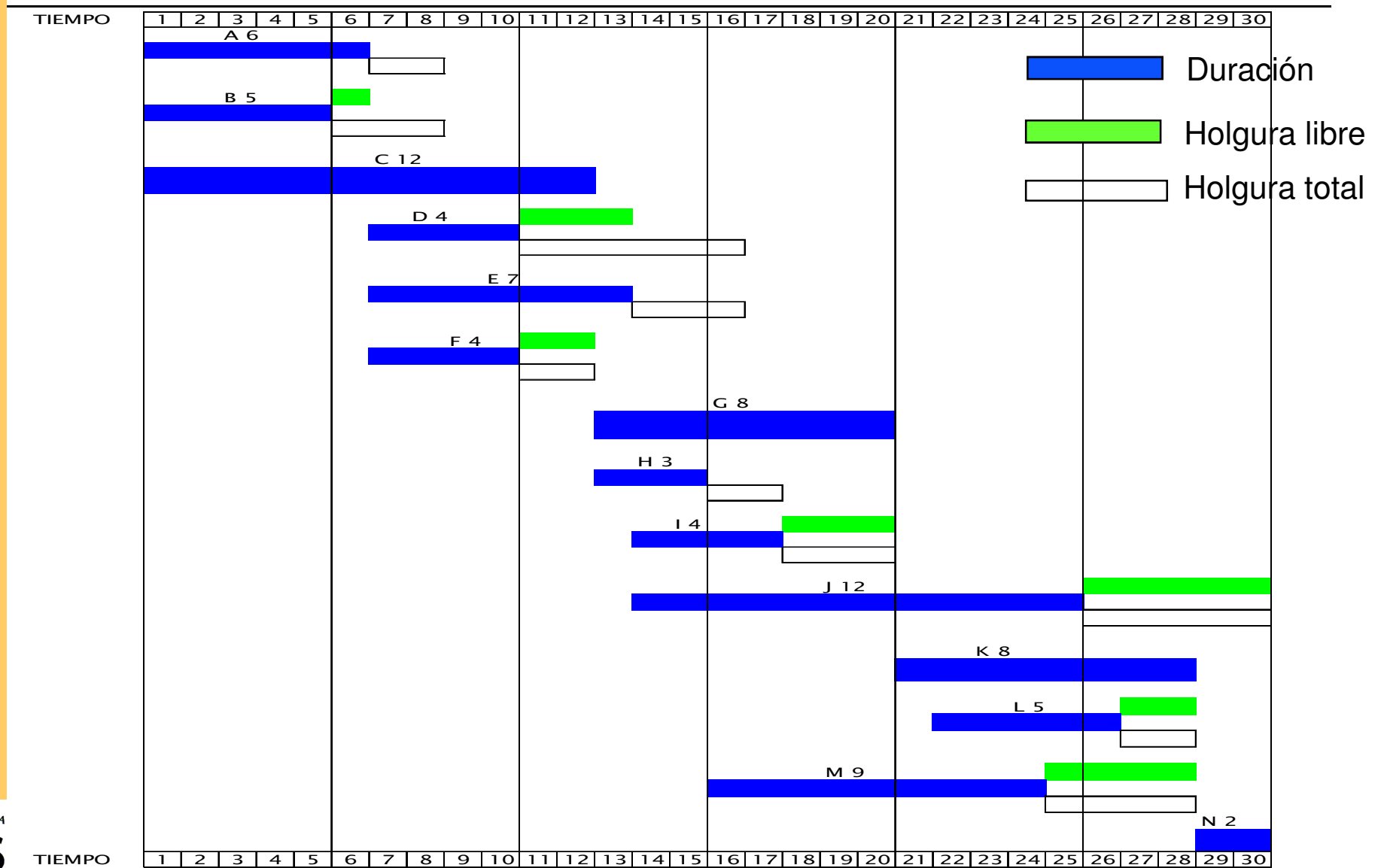


# CPM. Ejemplo (6)

□ Camino crítico →



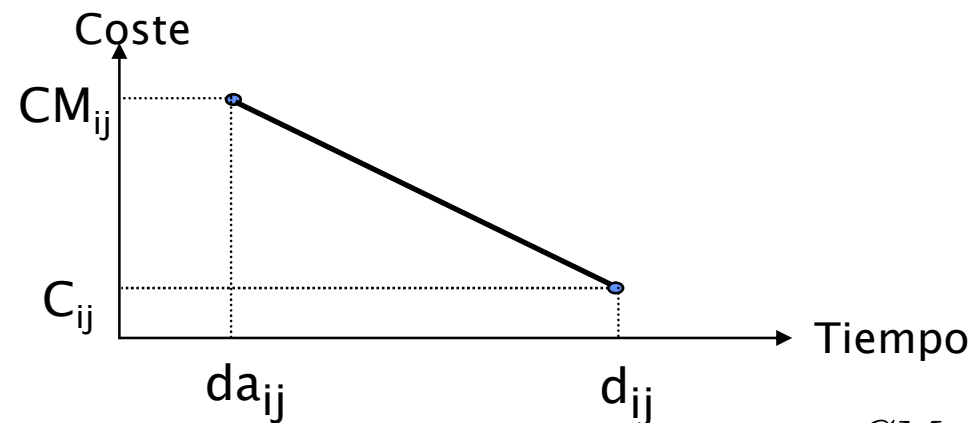
# Diagrama de Gantt





# Aceleración de proyectos. Planteamiento

- ❑ La duración de las actividades puede ser acortada asignando recursos adicionales
- ❑ La duración de cada actividad puede variar entre  $da_{ij}$  y  $d_{ij}$ 
  - ✓  $d_{ij}$  → duración estándar. El coste es  $C_{ij}$
  - ✓  $da_{ij}$  → duración acelerada. El coste es máximo →  $CM_{ij}$
  - ✓ El coste es función lineal de la duración (se obtiene por interpolación lineal)



✓ Coste de aceleración de la actividad → 
$$\frac{CM_{ij} - C_{ij}}{d_{ij} - da_{ij}}$$

# Aceleración de proyectos. Algoritmo

---

1. Determinar el (los) camino crítico(s) para las duraciones normales
2. Obtener todos los cortes en la red formada por las actividades críticas que se pueden acelerar
  - ✓ En un corte con más de un arco, cada actividad debe pertenecer a un camino crítico distinto
  - ✓ Si no existe ningún corte con estas características → PARAR

Evaluar cada corte mediante la suma de los costes de aceleración de sus arcos y elegir el corte de mínimo coste global de aceleración
3. Acelerar todos los arcos del corte hasta que
  - ✓ Alguna actividad deje de ser crítica
  - ✓ Aparezcan nuevas actividades críticas
  - ✓ Alguna actividad no pueda acelerarse más
  - ✓ Se consuma el presupuesto

Determinar los nuevos caminos críticos y volver al paso 2

# Aceleración de proyectos. Ejemplo (1)

- ❑ En la tabla siguiente se muestra un conjunto de actividades, su duración normal y acelerada y sus respectivos costes

<b>Actividad</b>	Duración Estándar <i>semanas</i>	Coste Previsto <b>M€</b>	Duración Acelerada <i>semanas</i>	Coste Acelerado <b>M€</b>
<b>AB</b>	6	10	4	14
<b>AC</b>	5	8	3	14
<b>AE</b>	14	34	10	54
<b>BD</b>	5	6	3	14
<b>BE</b>	10	20	7	29
<b>CD</b>	3	10	2	14
<b>CE</b>	5	12	3	18
<b>DF</b>	7	16	6	23
<b>EF</b>	4	10	2	30

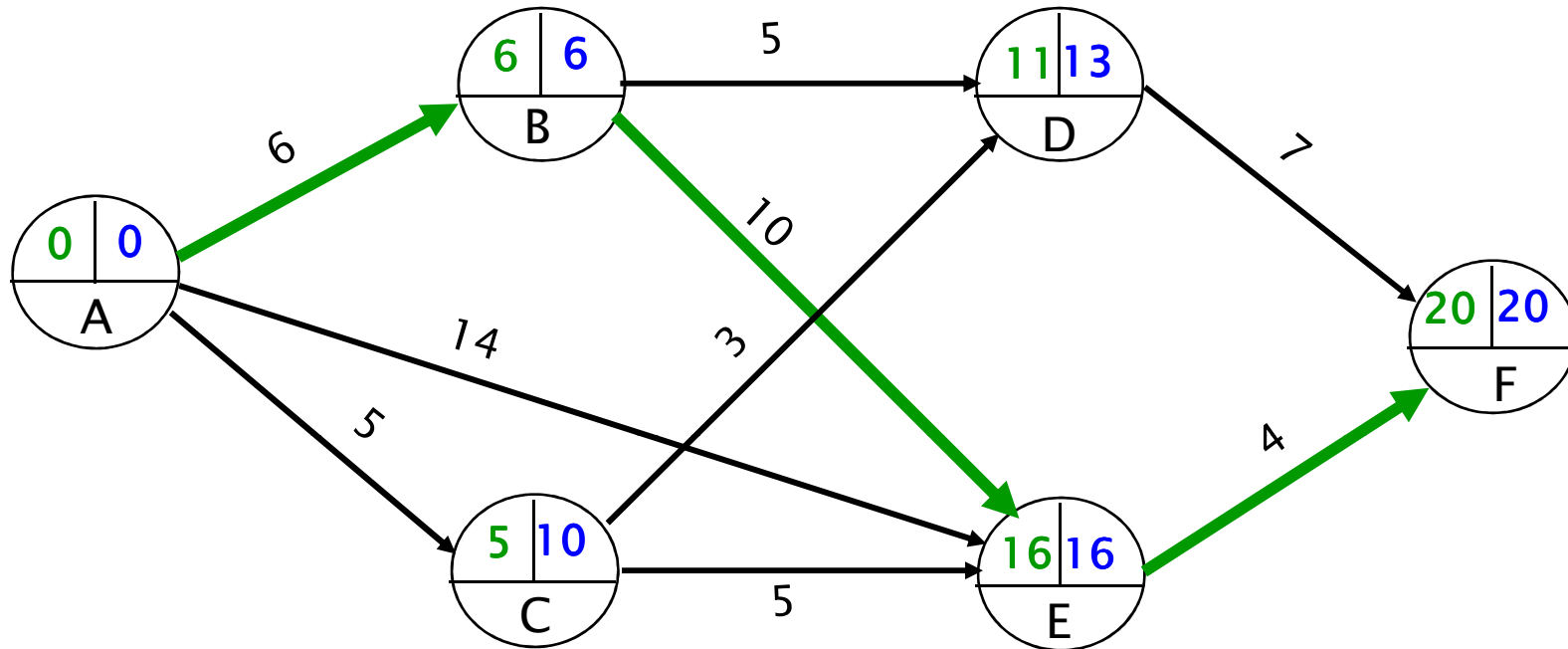
## Aceleración de proyectos. Ejemplo (2)

- ❑ Calculamos los costes de aceleración

<b>Actividad</b>	Duración Estándar <i>semanas</i>	Coste Previsto <b>M€</b>	Duración Acelerada <i>semanas</i>	Coste Acelerado <b>M€</b>	Coste aceleración <b>M€/Semana</b>
<b>AB</b>	6	10	4	14	$(14-10)/(6-4)=2$
<b>AC</b>	5	8	3	14	$(14-8)/(5-3)=3$
<b>AE</b>	14	34	10	54	$(54-34)/(14-10)=5$
<b>BD</b>	5	6	3	14	$(14-6)/(5-3)=4$
<b>BE</b>	10	20	7	29	$(29-20)/(10-7)=3$
<b>CD</b>	3	10	2	14	$(14-10)/(3-2)=4$
<b>CE</b>	5	12	3	18	$(18-12)/(5-3)=3$
<b>DF</b>	7	16	6	23	$(23-16)/(7-6)=7$
<b>EF</b>	4	10	2	30	$(30-10)/(4-2)=10$

## Aceleración de proyectos. Ejemplo (3)

Paso 1. Representamos la red de actividades y aplicamos el método CPM



Paso 2. Existen tres cortes, cada uno con una actividad:

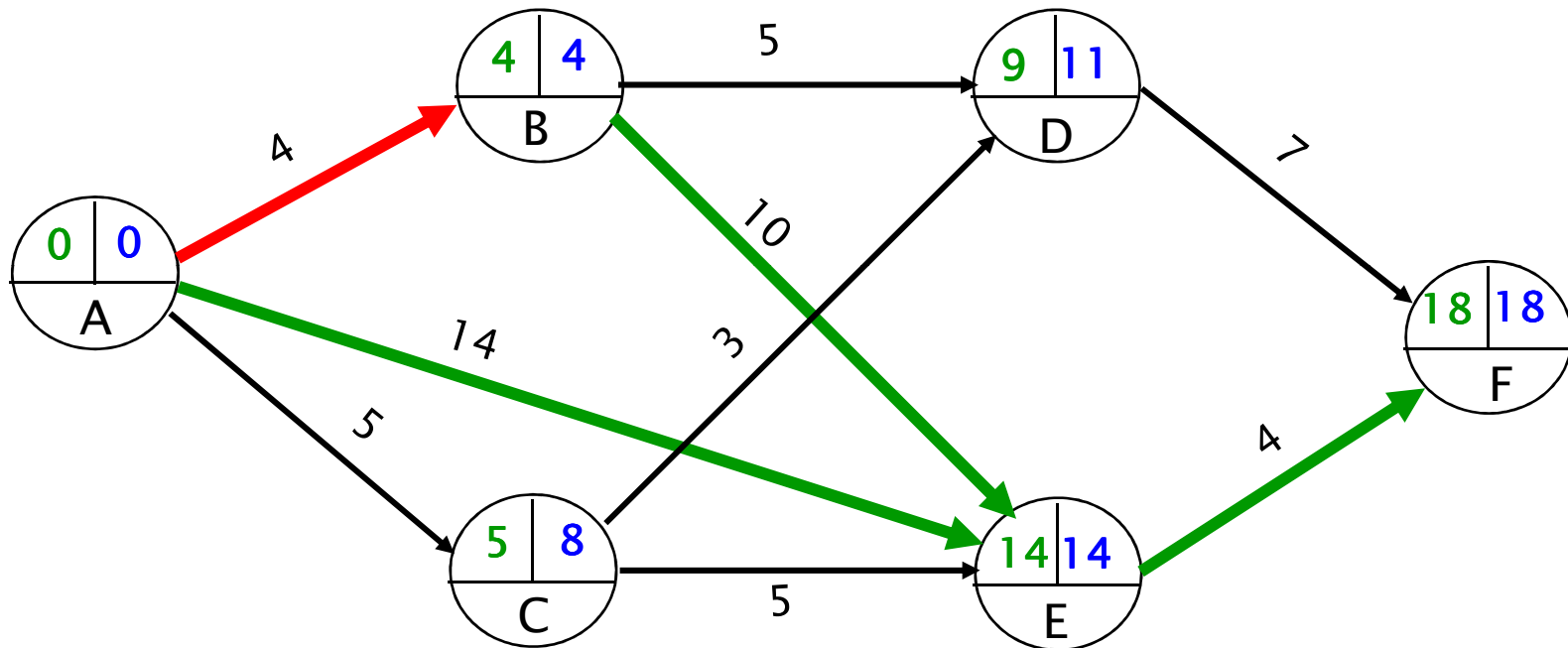
- {AB} con coste de aceleración 2
- {BE} con coste de aceleración 3
- {EF} con coste de aceleración 10

Se elige el corte {AB}

## Aceleración de proyectos. Ejemplo (4)

Paso 3. Se acelera 2 semanas la actividad AB, alcanzando su duración mínima 4. Además la actividad AE se hace crítica

La nueva red es



Ahora se tienen dos caminos críticos

## Aceleración de proyectos. Ejemplo (5)

Paso 2. Existen dos cortes:

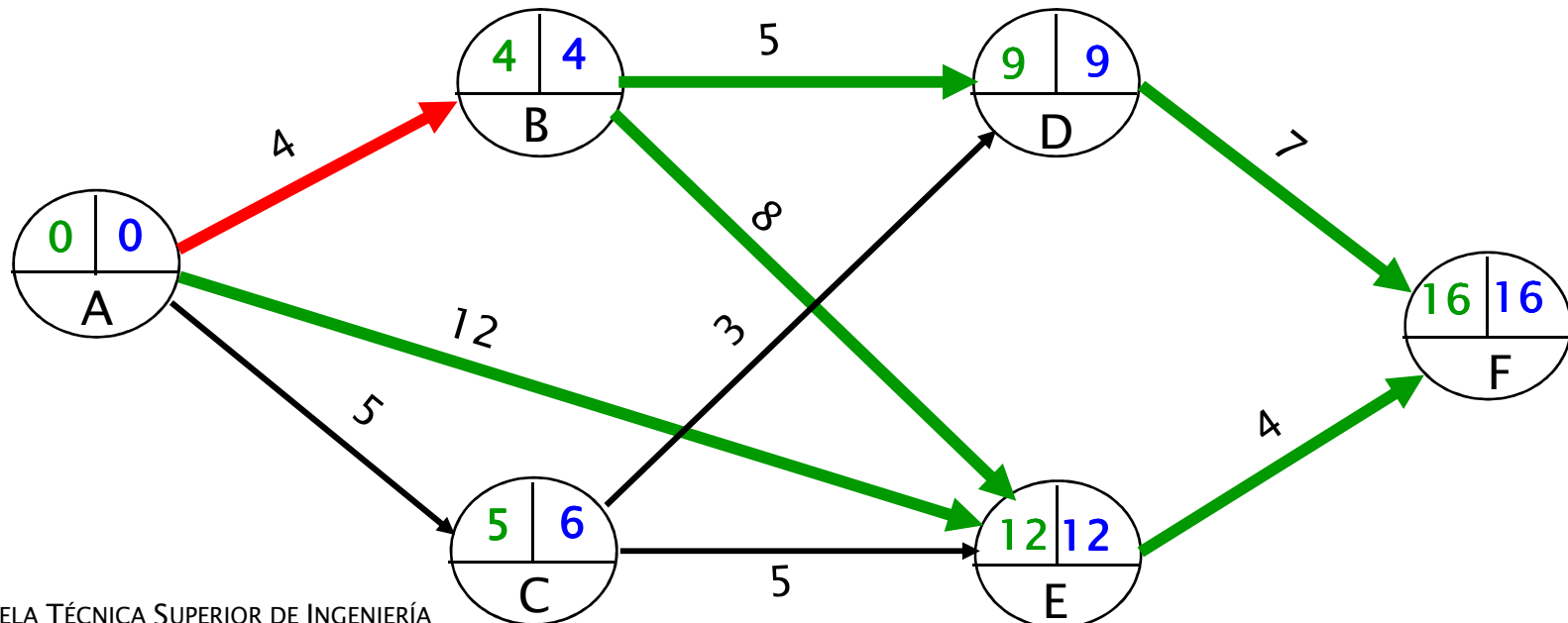
{AE, BE} con coste global de aceleración  $5 + 3 = 8$

{EF} con coste de aceleración 10

Se elige el corte {AE, BE}

Paso 3. Se aceleran 2 semanas las actividades AE y BE, puesto que se hacen críticas las actividades BD y DF

En la nueva red hay tres caminos críticos



## Aceleración de proyectos. Ejemplo (6)

Paso 2. Existen cuatro cortes:

{AE, BE, BD} con coste global de aceleración  $5 + 3 + 4 = 12$

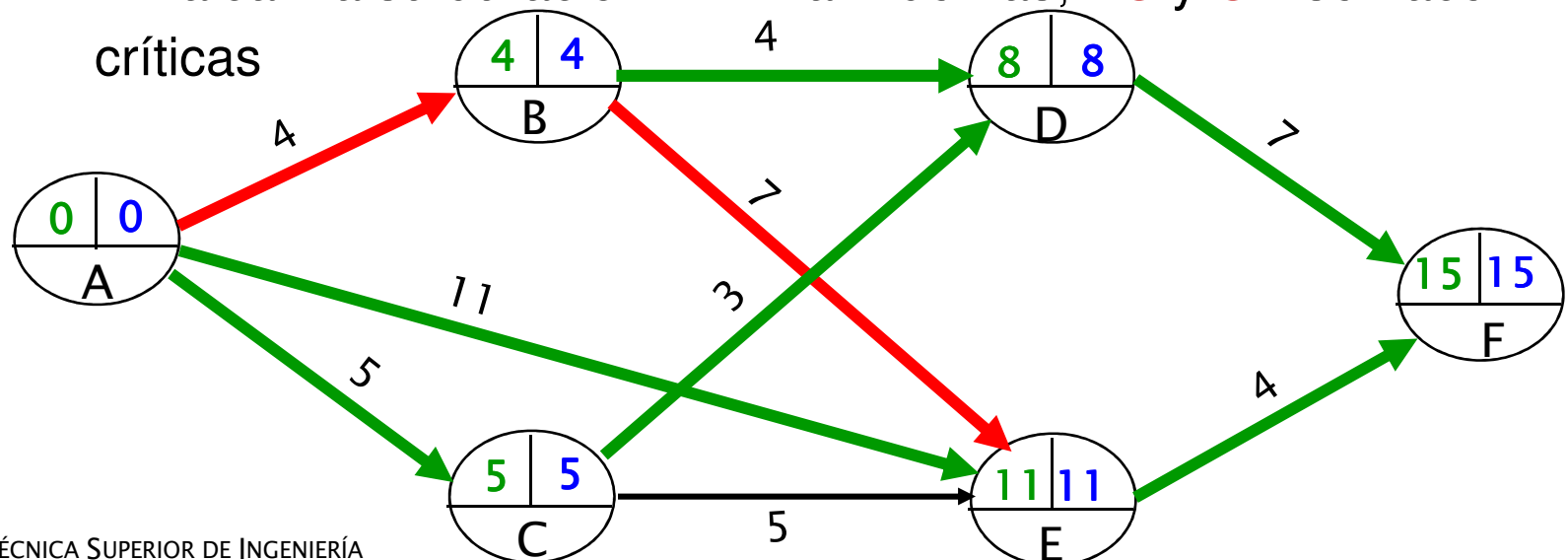
{AE, BE, DF} con coste global de aceleración  $5 + 3 + 7 = 15$

{BD, EF} con coste global de aceleración  $4 + 10 = 14$

{DF, EF} con coste global de aceleración  $7 + 10 = 17$

Se elige el corte {AE, BE, BD}

Paso 3. Se aceleran 1 semana las actividades AE, BD y BE, puesto que BE alcanza su duración mínima. Además, AC y CD se hacen críticas





# Aceleración de proyectos. Ejemplo (7)

Paso 2. Existen tres cortes:

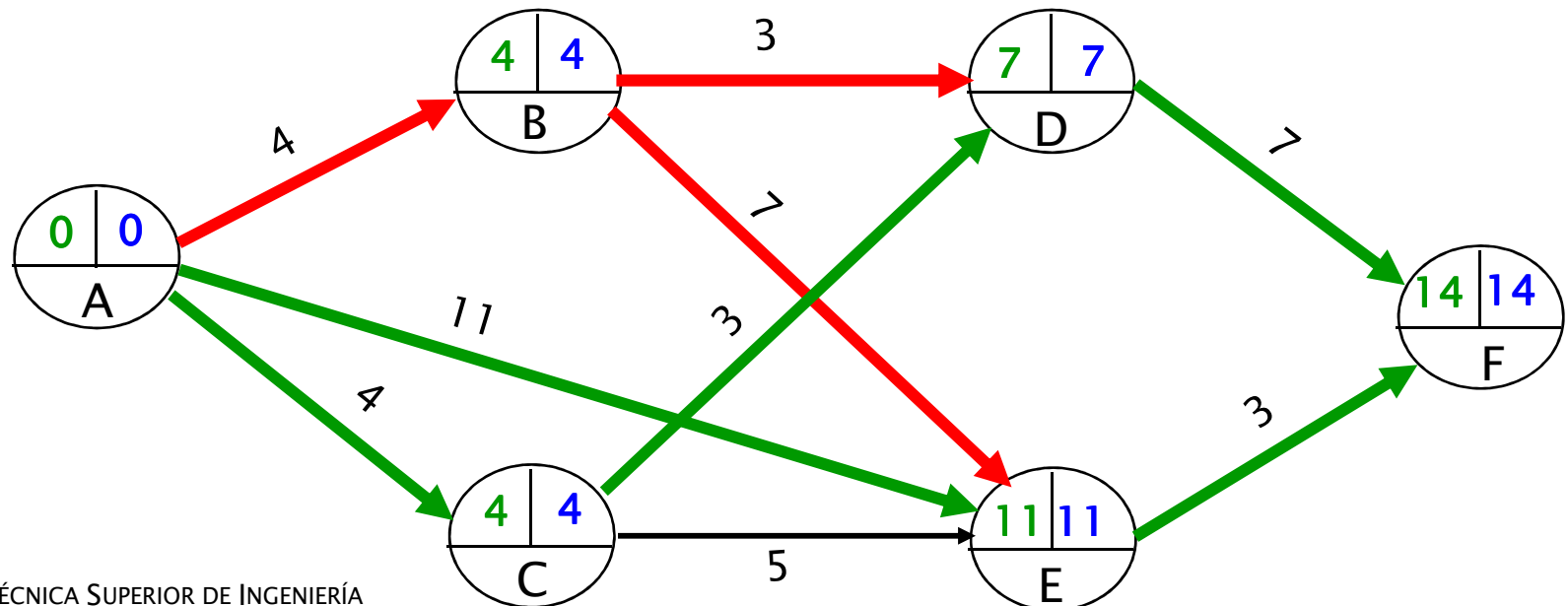
{AC, BD, EF} con coste global de aceleración  $3 + 4 + 10 = 17$

{BD, CD, EF} con coste global de aceleración  $4 + 4 + 10 = 18$

{DF, EF} con coste global de aceleración  $7 + 10 = 17$

Se elige (por ejemplo) el corte {AC, BD, EF}

Paso 3. Se aceleran 1 semana las actividades AC, BD y EF, puesto que BD alcanza su duración mínima



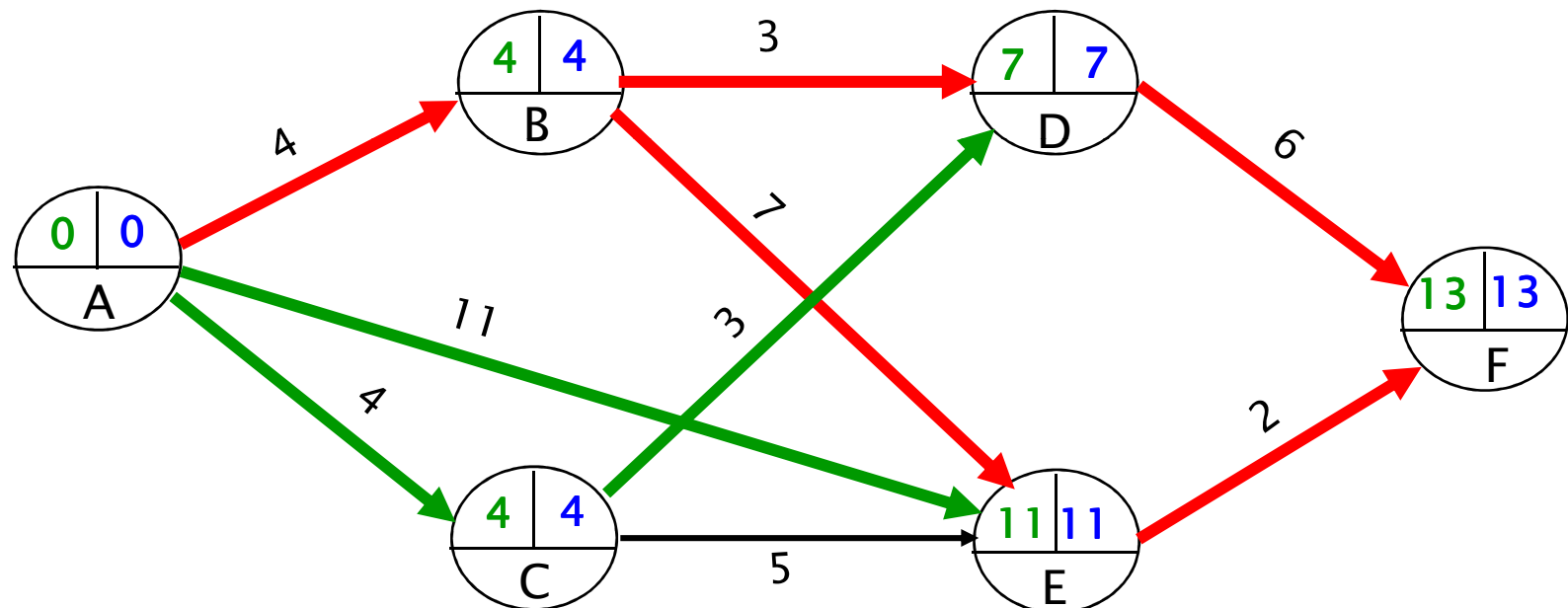
## Aceleración de proyectos. Ejemplo (8)

Paso 2. Existe un corte:

{DF, EF} con coste global de aceleración  $7 + 10 = 17$

Se elige el corte {DF, EF}

Paso 3. Se aceleran 1 semana las actividades DF y EF, puesto que alcanzan su duración mínima



Paso 2. No existen cortes. FIN.

La duración final del proyecto es 13

# Aceleración de proyectos. Ejemplo (9)

- ❑ Evolución de las duraciones, las actividades críticas y los costes globales del proyecto

Duración total	Duración de las operaciones [semanas]									Coste [ M€ ]
	AB	AC	AE	BD	BE	CD	CE	DF	EF	
20	6	5	14	5	10	3	5	7	4	126
19	5	5	14	5	10	3	5	7	4	128
18	4	5	14	5	10	3	5	7	4	130
17	4	5	13	5	9	3	5	7	4	138
16	4	5	12	5	8	3	5	7	4	146
15	4	5	11	4	7	3	5	7	4	158
14	4	4	11	3	7	3	5	7	3	175
13	4	4	11	3	7	3	5	6	2	192

# Método PERT

- ❑ Se aplica cuando la duración de las actividades se considera **aleatoria**
- ❑ Notación
  - ✓  $D_{ij}$  → duración (aleatoria) de la actividad que va del nodo  $i$  al nodo  $j$
  - ✓  $E[D_{ij}]$  → duración esperada de la actividad
  - ✓  $V[D_{ij}]$  → varianza de la duración de la actividad
  - ✓  $CP$  → duración (aleatoria) del proyecto
  - ✓  $E[CP]$  → duración esperada del proyecto
  - ✓  $V[CP]$  → varianza de la duración del proyecto
- ❑ Objetivos
  - ✓ Obtener la **distribución de la duración del proyecto**
  - ✓ Calcular la **probabilidad de acabar el proyecto a tiempo**

# Método PERT. Hipótesis

1. Las duraciones de las actividades son independientes
  - ✓ No siempre es cierta
  - ✓ La esperanza (varianza) de la duración de cualquier camino del nodo inicial al final es la suma de las esperanzas (varianzas) de las duraciones de las actividades que forman el camino
2. El camino crítico es el de mayor duración esperada
  - ✓ No tiene por qué ser cierta para casos optimistas o pesimistas
  - ✓ Si hay empate, el camino crítico es el de mayor varianza
3. La duración del proyecto sigue una distribución normal
  - ✓ Cierta si las duraciones de todas las actividades son normales
  - ✓ Cierta para proyectos con muchas actividades (Teorema central del límite)

# Método PERT. Ejemplo

- ❑ Suponemos ahora que en el ejemplo del CPM las duraciones son aleatorias, y las duraciones medias son las especificadas en el enunciado → el camino crítico sigue siendo el mismo
- ❑ Sean 50, 20, 29 y 1 las varianzas de las actividades C, G, K y N del camino crítico
- ❑ ¿Cuál es la probabilidad de terminar el proyecto en 40 unidades de tiempo?

$$\left. \begin{array}{l} E[CP] = 12 + 8 + 8 + 2 = 30 \\ V[CP] = 50 + 20 + 29 + 1 = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow CP \sim N(30, 10)$$

$$\begin{aligned} P(CP \leq 40) &= P\left(\frac{CP - 30}{10} \leq \frac{40 - 30}{10}\right) = \\ &= P(Z \leq 1) = 1 - P(Z > 1) = 1 - 0.1587 = 0.8413 \end{aligned}$$

# Método PERT. Hipótesis adicional

## 4. La duración de cada actividad sigue una distribución beta

- ✓ Se asume para obtener la media y la varianza de forma sencilla cuando no son conocidas
- ✓ Si la duración mínima es  $a$ , la duración máxima es  $b$  y la duración más “probable” es  $m$

$$E[D_{ij}] = \frac{a + b + 4m}{6}$$
$$V[D_{ij}] = \frac{(b - a)^2}{36}$$