Técnicas de planificación y control de proyectos

Andrés Ramos
Universidad Pontificia Comillas
http://www.iit.comillas.edu/aramos/
Andres.Ramos@comillas.edu

Técnicas de planificación y control de proyectos (PERT *Program Evaluation and Review Technique*)

1. Camino crítico (CPM *Critical Path Method*)

2. Probabilidad de acabar un proyecto a tiempo

3. Nivelación de recursos

4. Asignación de recursos

Técnicas de planificación y control de proyectos (PERT)

Ayudan en la planificación de proyectos con muchas actividades

- Detección de cuellos de botella
- Probabilidad de cumplir plazos de entrega
- Evaluación de efectos de cambios de programa

Red de actividades de un proyecto:

Un proyecto se representa mediante una red que visualiza gráficamente las relaciones de precedencia en la realización de las actividades.

Actividad (tarea)	Arco
Duración de la actividad	Longitud del arco
Evento (fin de las tareas que llegan al nodo)	Nodo
Secuencia	Sentido del arco
Comienzo y fin de las actividades	Nodo inicial y final

Propiedades de la red de un proyecto:

1. Dos nodos no pueden estar conectados directamente por más de un arco
2. Cada actividad se representa por un solo arco

***Actividad ficticia*:**

- Se utiliza para establecer relación de precedencia
- No tiene duración
- Se utiliza para evitar violar las propiedades anteriores

UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Determinación del camino crítico

Procedimiento de determinación del camino crítico se hace en dos pasadas.

PASADA HACIA DELANTE:

Cálculo de los *instantes más tempranos* t_i para la ejecución de las actividades

1. Etiquetar el comienzo del proyecto con tiempo 0
2. Instante más temprano de cada nodo es el tiempo más temprano del nodo inmediatamente anterior (si sólo tiene uno) y la duración de la actividad (arco) que los une
3. Si existe más de una actividad que llega a un nodo el tiempo de dicho nodo es el máximo para cada actividad de la suma del tiempo del antecesor más la duración de la actividad
4. Realizar los pasos 2 y 3 hasta el final del proyecto

Determinación del camino crítico

PASADA HACIA ATRÁS:

Cálculo de los *instantes más tardíos* T_i para la ejecución de las actividades

1. El instante más temprano del final del proyecto = instante más tardío del final del proyecto
2. Instante más tardío de cada nodo es el tiempo más tardío del nodo inmediatamente posterior (si sólo tiene uno) menos la duración de la actividad (arco) que los une
3. Si existe más de un nodo posterior se toma el mínimo de las diferencias previas

UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Definiciones

Holgura de un evento (nodo)

Diferencia entre su instante más tardío y su instante más temprano

Holgura total de una actividad (arco) de i a j $TF_{ij} = T_j - t_i - d_{ij}$

Diferencia entre su instante más *tardío* de *j* y la suma de su instante más temprano de *i* y la duración de la actividad *i* a *j*. Se puede interpretar como máximo retraso en su punto de comienzo o máximo incremento en su duración sin retrasar el proyecto.

Holgura libre de una actividad (arco) de i a j $FF_{ij} = t_j - t_i - d_{ij}$

Diferencia entre su instante más *temprano* de *j* y la suma de su instante más temprano de *i* y la duración de la actividad *i* a *j*. Ídem pero sin retrasar el inicio de una actividad posterior.

La holgura libre es siempre menor que la holgura total $FF_{ij} \leq TF_{ij}$.

Propiedades de los caminos críticos

Camino crítico

Camino a través de la red donde todas las actividades son críticas (tienen holgura total 0)

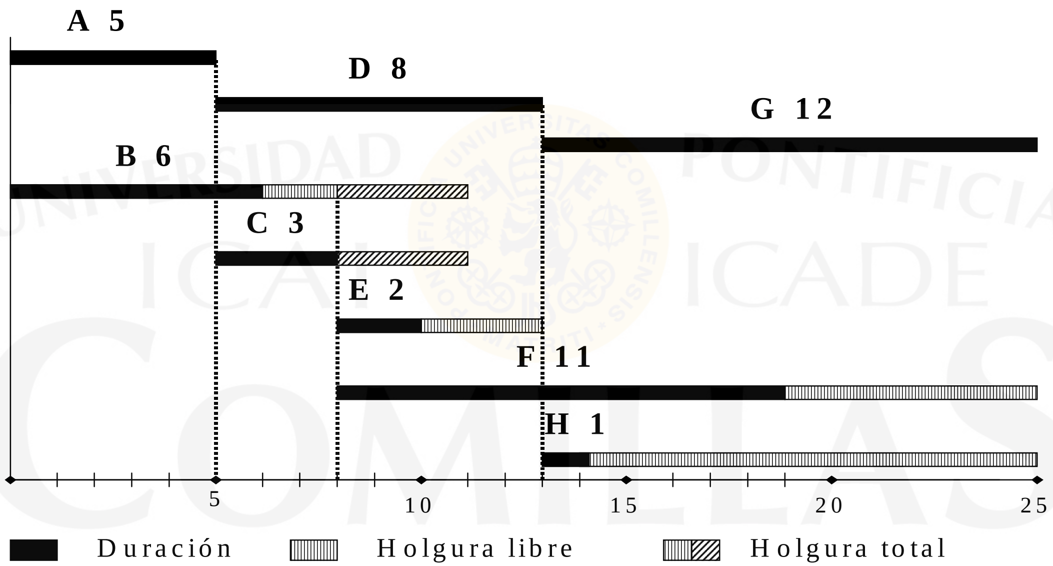
1. Una red de un proyecto siempre tiene al menos un camino crítico.

2. Toda actividad con holgura 0 tiene que estar en un camino crítico.
   Ninguna actividad con holgura > 0 puede estar en un camino crítico.

3. Todo evento con holgura 0 tiene que estar en un camino crítico.
   Ningún evento con holgura > 0 puede estar en un camino crítico.

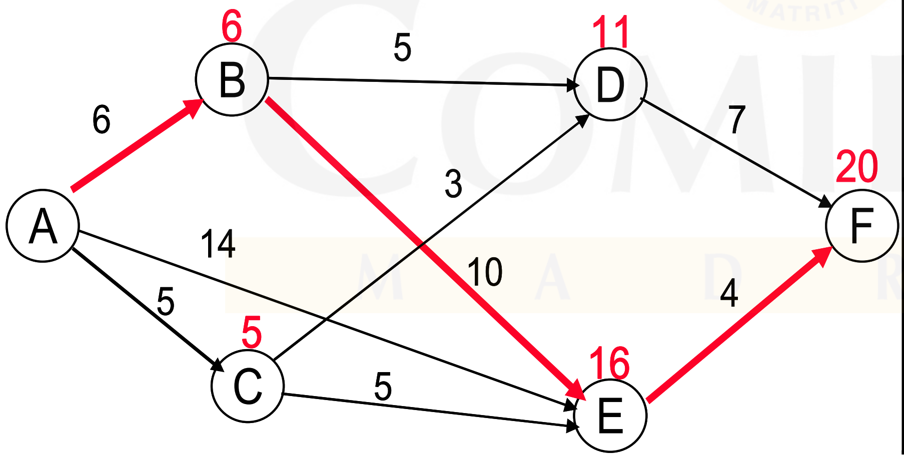
4. En un camino crítico todos sus eventos y sus actividades tienen holgura 0.

Diagrama de Gantt



CPM con costes resuelto con un algoritmo heurístico que obtiene optimalidad[1]

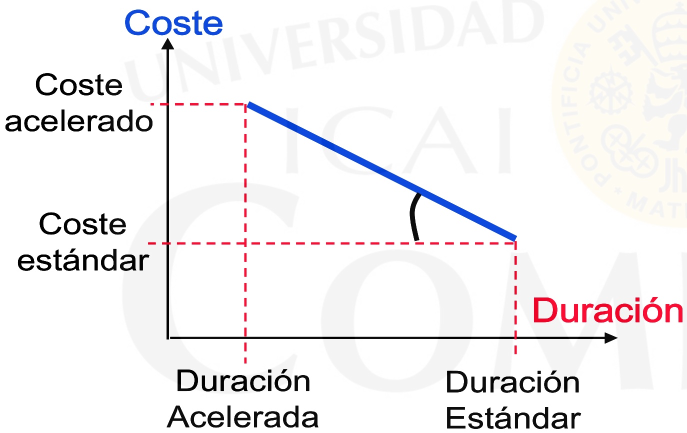
Supóngase que el camino crítico con las duraciones máximas $\overline{D}_{ij}$ es el que se muestra en el gráfico, siendo el valor de cada nodo el tiempo mínimo de comienzo de las actividades que parten del nodo (además $T = 20$). En la tabla se muestran las duraciones mínimas $\underline{D}_{ij}$ y los costes para las duraciones máximas $\overline{C}_{ij}$ y mínimas $\underline{C}_{ij}$. ¿Cuál es el tiempo mínimo de realización del proyecto de forma acelerada sin variar las actividades críticas?



Acti vidad	Duración Estándar *semanas*	Coste Previsto M€	Duración Acelerada *semanas*	Coste Acelerado M€
AB	6	10	4	14
AC	5	8	3	14
AE	14	34	10	54
BD	5	6	3	14
BE	10	20	7	29
CD	3	10	2	14
CE	5	12	3	18
DF	7	16	6	23
EF	4	10	2	30

[1]Conviene haber comprendido antes el ejercicio de 7 máquinas de la biblioteca de problemas.

Se define el coste de aceleración de cada actividad como el incremento del coste de la actividad por una reducción unitaria de tiempo, es decir, $\left|A_{ij}\right| = \dfrac{\overline{C}_{ij} - \underline{C}_{ij}}{\overline{D}_{ij} - \underline{D}_{ij}}$. Se selecciona aquella actividad crítica con el mínimo valor del coste de aceleración.



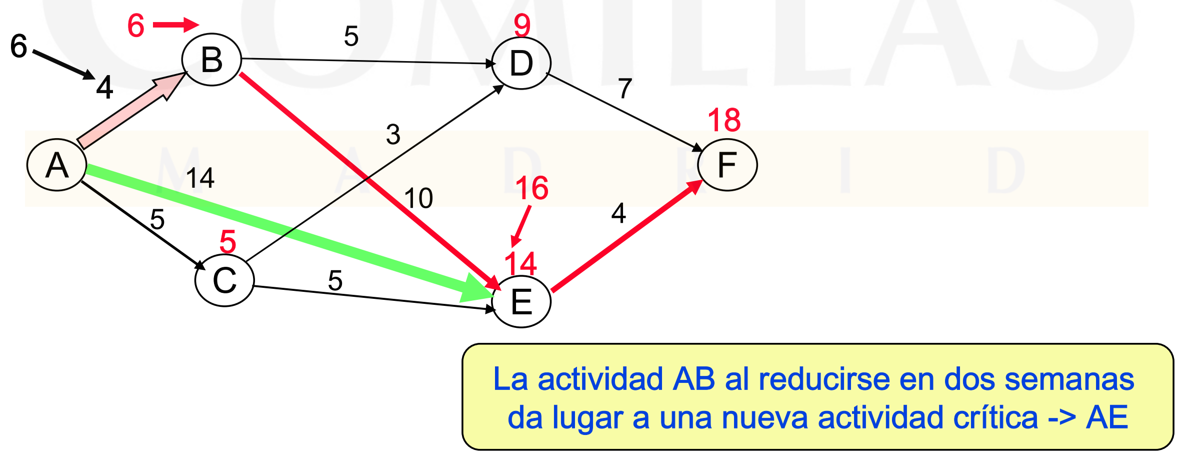
Se escogen aquellas actividades críticas con menor coste de aceleración

Actividad	Coste aceleración ***M€/Semana***
AB	(14-10)/(6-4)=**2**
AC	(14-8)/(5-3)=**3**
AE	(54-34)/(14-10)=**5**
BD	(14-6)/(5-3)=**4**
BE	(29-20)/(10-7)=**3**
CD	(14-10)/(3-2)=**4**
CE	(18-12)/(5-3)=**3**
DF	(23-16)/(7-6)=**7**
EF	(30-10)/(4-2)=**10**

Se reduce la duración de la actividad seleccionada hasta que uno de los siguientes eventos ocurra:

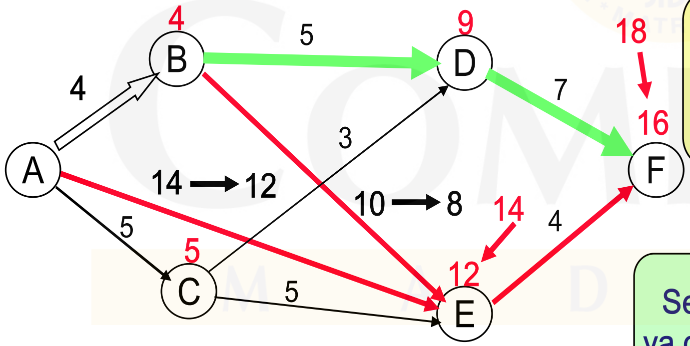
- Que aparezcan nuevas actividades críticas (múltiples caminos críticos).
- Que no se pueda reducir más su duración.
- Que se consuma un presupuesto económico para la aceleración o que se consuma una duración máxima total a reducir (en este ejemplo ambas infinito)

La actividad AB puede reducirse en 2 semanas (con una reducción de 1 semana ninguno de los eventos anteriores ocurre). En ese momento aparece una nueva actividad crítica, la AE (con flecha gruesa aparecerán actividades críticas cuya duración ya no puede reducirse, y en verde las nuevas actividades críticas que aparecen en la iteración).



Con varios caminos críticos la reducción de duraciones se ha de aplicar simultáneamente a todos los caminos (así no desaparecen caminos críticos previos). Para ello se ha de elegir el coste de aceleración que minimiza el coste total de aceleración al reducir una actividad crítica por camino (obviamente si se elige una actividad común a varios caminos, ésta servirá como candidata a actividad crítica a reducir en sendos caminos)

La duración a reducir se deduce con el mismo criterio que antes.



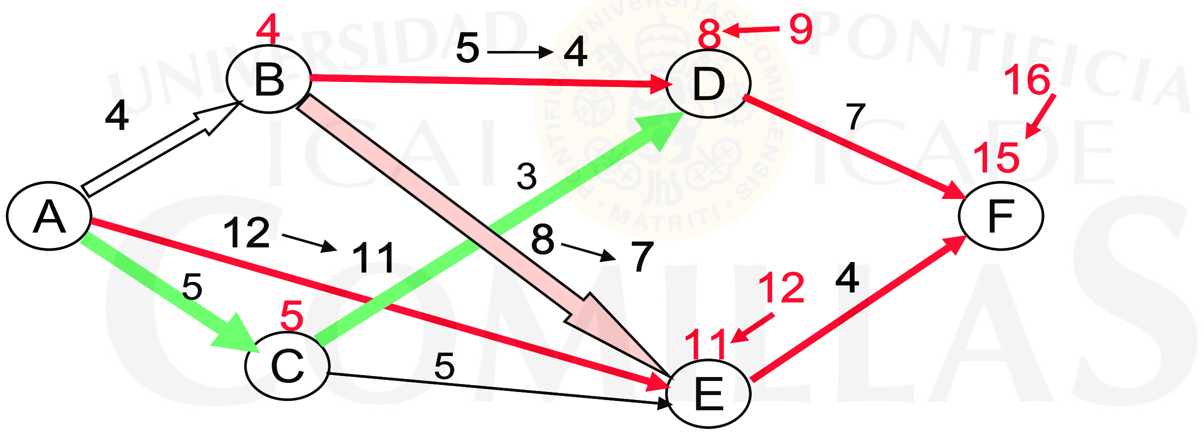
Se elige entre :

- EF (10 M€/semana)
- BE (3 M€/semana)+AE (5 M€/semana)

Se reducen BE y AE sólo en <u>dos</u> semanas ya que la actividad <u>BD</u> y <u>DF</u> se hacen críticas

UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

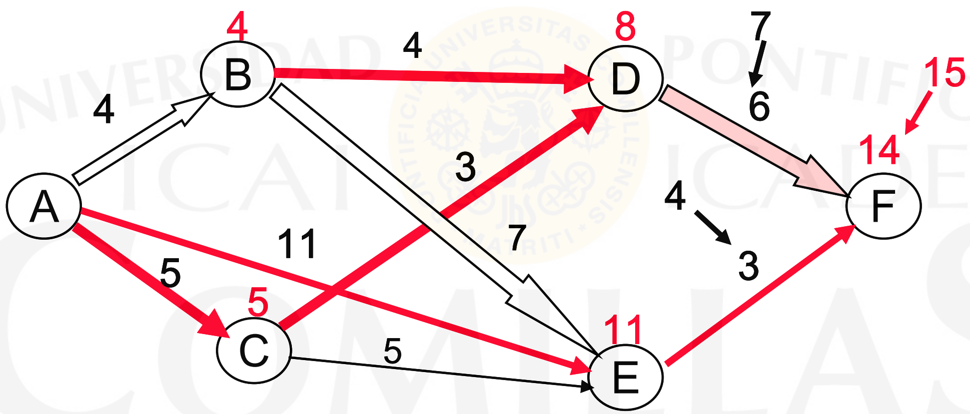
Se elige entre :
- EF(10 M€/semana) + BD (4 M€/semana)
- EF(10 M€/semana) + DF (7 M€/semana)
- BE(4 M€/semana) + AE (5 M€/semana) + DF(7 M€/semana)
- BE (3 M€/semana) + AE (5 M€/semana) + BD (4 M€/semana)



Se reducen BE, AE y BD en una semana ya que la actividad BE no puede bajar más y las actividades AC y CD se hacen críticas

Se elige entre :

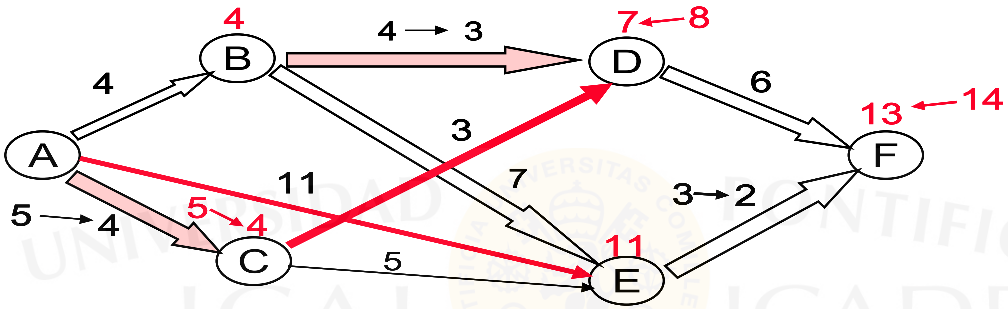
• EF (10 M€/semana) + DF (7 M€/semana)
• EF (10 M€/semana) + BD (4 M€/semana) + CD (4 M€/semana)
• EF (10 M€/semana) + BD (4 M€/semana) + AC (3 M€/semana)



Se reducen EF y DF en una semana
ya que la actividad DF no puede bajar más.
(Se podría reducir también EF+BD+AC)

Se elige entre las combinaciones :

- EF(10 M€/semana) +CD (4 M€/semana) + BD (4 M€/semana)
- EF(10 M€/semana) +AC (3 M€/semana) + BD (4 M€/semana)

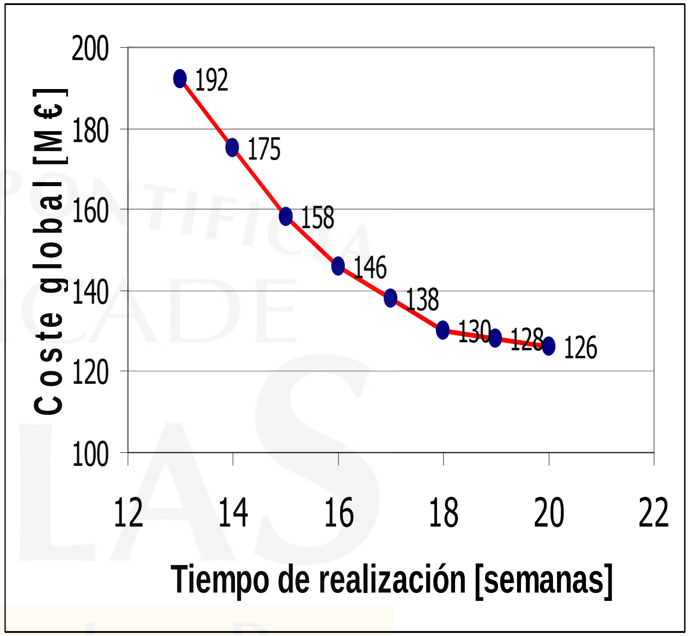


Se reducen EF, AC y BD en <u>una</u> semana
ya que las actividades no pueden bajar más.

Se alcanzan situaciones donde no existe posibilidad técnica de seguir disminuyendo los tiempos de las actividades de cualquier camino crítico (actividades D, E y F que conforman un camino crítico, no pueden reducirse). 13 es el tiempo mínimo de realización del proyecto de forma acelerada (considerando un presupuesto infinito para la reducción, si existiese un presupuesto el algoritmo parará cuando se llegue a consumir el presupuesto).

Representación gráfica del coste y tiempo de realización.

Duración total	Duración de las operaciones [semanas]									Coste [M€]
	AB	AC	AE	BD	BE	CD	CE	DF	EF	
20	6	5	14	5	10	3	5	7	4	126
19	5	5	14	5	10	3	5	7	4	128
18	4	5	14	5	10	3	5	7	4	130
17	4	5	13	5	9	3	5	7	4	138
16	4	5	12	5	8	3	5	7	4	146
15	4	5	11	4	7	3	5	7	4	158
14	4	5	11	4	7	3	5	6	3	175
13	4	4	11	3	7	3	5	6	2	192



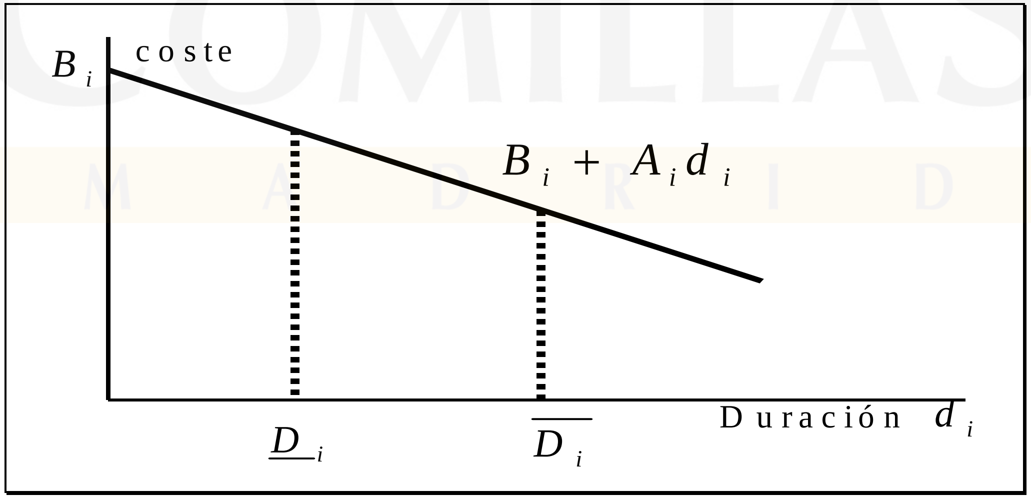
Introducción del coste en el método del camino crítico

Objetivo:

Determinar el coste mínimo para finalizar un proyecto en una fecha prefijada

Coste de una actividad:

Recta con valores factibles entre los límites máximo y mínimo de duración de la actividad.



Introducción del coste en el método del camino crítico (cont.)

Método de resolución:

Programación lineal

Coste del proyecto $\sum_i \sum_j \left(A_{ij} x_{ij} + B_{ij} \right)$

Duración de cada actividad $\underline{D}_{ij} \leq x_{ij} \leq \overline{D}_{ij}$

Instante más temprano de un evento j y_j $y_i + x_{ij} \leq y_j$

Condiciones iniciales $y_1 = 0$ comienzo del proyecto

$y_n \leq T$ final del proyecto de duración T prefijada

Sensibilidad a la variación del coste por variación de T:

programación lineal paramétrica.

Probabilidad de acabar un proyecto a tiempo

Objetivo:

Estimar la probabilidad de terminar el proyecto en una fecha programada suponiendo que las duraciones de las actividades son parámetros aleatorios.

Hipótesis generales:

- Las duraciones de las actividades son parámetros aleatorios independientes
  Esta suposición no siempre es razonable (por ejemplo, mal tiempo en la construcción)
- El camino crítico (*para los tiempos medios*) siempre requiere un tiempo total mayor que cualquier otro
  Esta hipótesis es cierta para los tiempos medios, no tiene por qué serlo para los tiempos optimistas o pesimistas
- Tiempo del proyecto se distribuye según una normal, basándose en el teorema central del límite y que haya suficiente número de actividades en el camino crítico

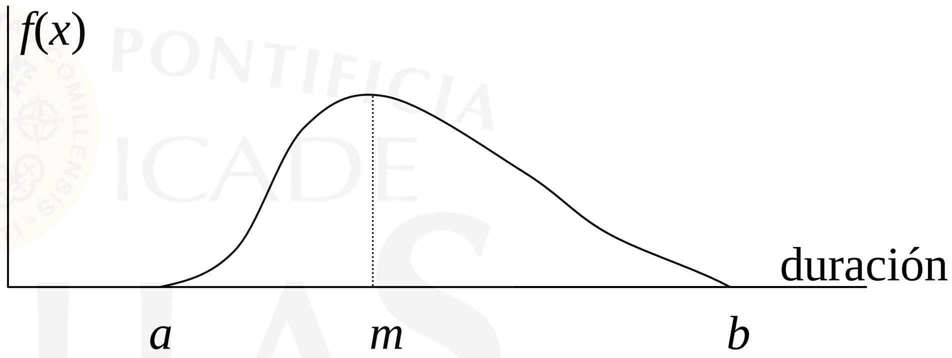
Modelado de la duración *aleatoria* de una actividad según una *distribución beta*:

- Más *probable* (realista) *m*: moda de la función de densidad
- *Optimista* (todo funciona bien) *a*: cota inferior de la función de densidad
- *Pesimista* (todo funciona mal) *b*: cota superior de la función de densidad

- Duración entre *a* y *b* es 6σ

Varianza $$\sigma^2 = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

Tiempo medio $$\mu = \frac{1}{3}\left(2m + \frac{a+b}{2}\right)$$



Probabilidad de acabar un proyecto a tiempo (cont.)

Tiempo medio del proyecto μ_p

Suma de los tiempos medios de las actividades del camino crítico

Varianza del tiempo del proyecto σ_p^2

Suma de varianzas de los tiempos de las actividades del camino crítico

Probabilidad de terminar en una fecha programada se distribuye según una $N(\mu_p, \sigma_p^2)$

En caso de tener varios caminos críticos se elije el de mayor varianza.

Penalizaciones en método PERT: el problema de establecer una fecha de finalización ante riesgo o incertidumbre

- Existen costes o penalizaciones asociadas al incumplimiento de la fecha de finalización.

- Si acaba antes de la fecha tiene lucro cesante por no haber subido el precio de la oferta (*coste de rebaja*). Si acaba después tiene penalización.

- Costes de rebaja o de penalización se consideran conocidos.

- Dos posibles situaciones:
  - *Riesgo*: distribución de probabilidad de la duración del proyecto *conocida*
  - *Incertidumbre*: distribución de probabilidad de la duración del proyecto *desconocida*

Establecer una fecha de finalización ante *riesgo*

- α coste unitario de rebaja (€/día)
- β penalización unitaria (€/día)
- A la empresa le es indiferente perder dinero que dejar de ganarlo
- $f(x)$ función de densidad *conocida* de la distribución de la duración del proyecto
- Z duración óptima (a determinar)
- x duración real del proyecto
- coste esperado de rebaja $\int_{-\infty}^{Z} \alpha(Z-x) f(x)dx$
- coste esperado por penalización $\int_{Z}^{\infty} \beta(x-Z) f(x)dx$
- coste esperado total $\min \int_{-\infty}^{Z} \alpha(Z-x) f(x)dx + \int_{Z}^{\infty} \beta(x-Z) f(x)dx$
- derivando e igualando a 0 $\int_{-\infty}^{Z} f(x)dx = P(x \leq Z) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

Establecer una fecha de finalización ante *incertidumbre*

- Distribución de probabilidad de la duración del proyecto se considera desconocida.
- Problema de decisión con incertidumbre
- Se definen las *alternativas* o *estrategias* como las *posibles duraciones del proyecto* a considerar
- Se definen como *estados de la naturaleza* o *escenarios* las posibles *duraciones reales* que pueden darse
- En tabla, costes de penalización o rebaja según corresponda
- Se aplican los criterios de decisión de Wald o pesimista, optimista, Hurwicz, Savage o costes de oportunidad

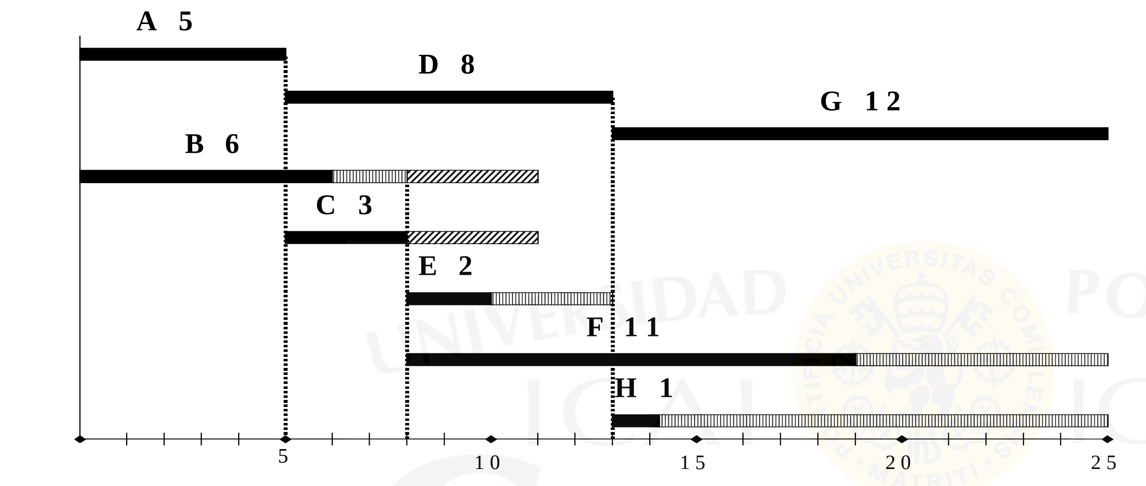
UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Nivelación de recursos

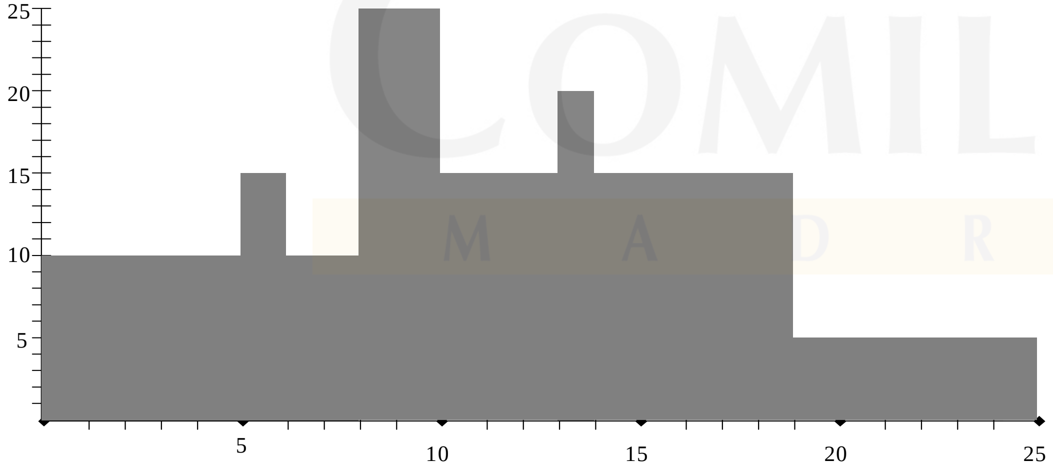
Objetivo

Nivelar o repartir el uso de recursos en el tiempo de la forma más equilibrada posible sin alargar la duración del proyecto (la del camino crítico)

Minimizar la cuasivarianza (varianza muestral) $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}{n-1}$ equivale a minimizar la suma de los cuadrados Y_i^2, siendo Y_i la evolución de los recursos a lo largo del tiempo.



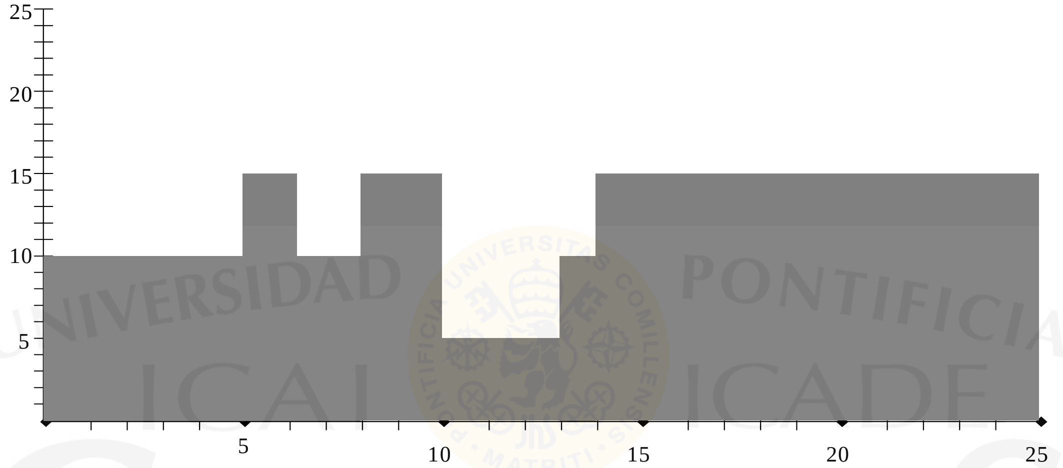
Tareas	Mano de obra
A	5
B	5
C	5
D	5
E	10
F	10
G	5
H	5



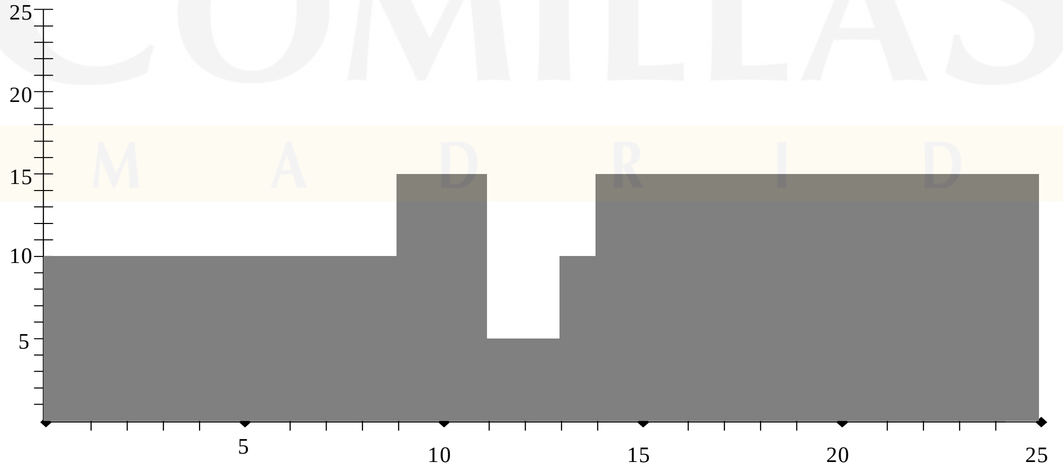
Algoritmo Burgess-Killebrew

- PASO 1:
  Elegir la actividad no crítica con mayor o más avanzado instante más temprano de finalización. Retrasar esta actividad de unidad en unidad de tiempo hasta lo que le permita su holgura total, eligiendo como fecha de inicio aquélla que dé menor valor para la suma de los cuadrados de las cargas diarias.
- PASO 2:
  Repetir el paso 1 una por una para las actividades no críticas con mayor instante más temprano de finalización, pero que no hayan sido analizadas hasta el momento, hasta que todas las actividades no críticas hayan sido analizadas. En caso de empate, tomar primero la que tenga mayor holgura. (*Atención a las relaciones de precedencia al entrar en retrasos en la parte de la holgura total que no es holgura libre*).
- PASO 3:
  Repetir los pasos 1 y 2 hasta que no haya ninguna disminución en los cuadrados de las cargas.

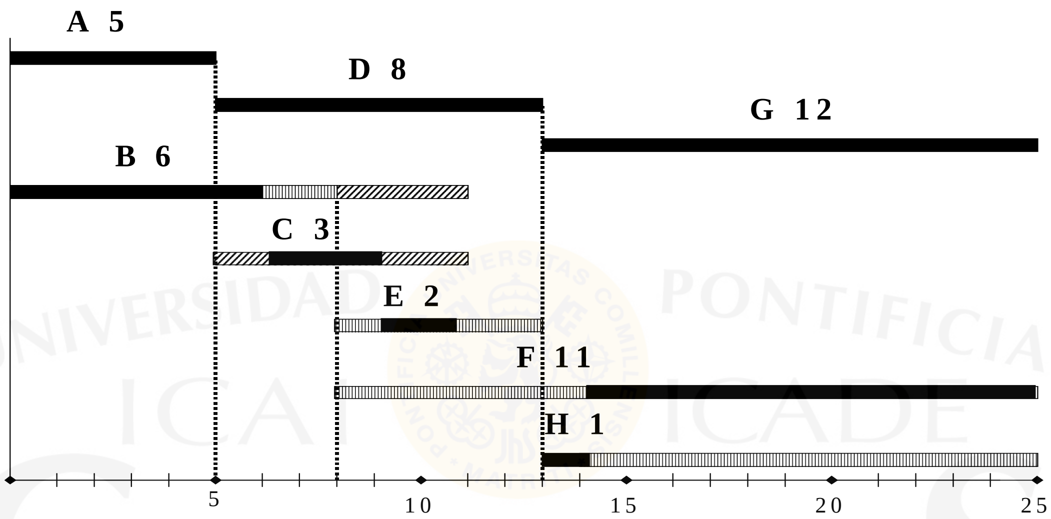
Si se retrasa 6 días la actividad F se obtiene el menor valor de los cuadrados de las cargas.



Si se retrasa 1 día la actividad C se obtiene el menor valor de los cuadrados de las cargas.



El nuevo diagrama de Gantt



Nivelación mediante optimización cuadrática (i)

Datos

j: actividades del proyecto

k: recursos a nivelar

p: periodos de tiempo (de 1 a la duración del proyecto)

d_j: duración de la actividad j

car_{jk}: carga del recurso k que utiliza la actividad j por unidad de tiempo

$G = (J, Q)$: grafo de precedencias, de modo que los *nodos* son las *actividades* y los *arcos* las *relaciones de precedencia* directas, es decir, existe un arco en Q si el nodo inicial corresponde a una actividad que ha de acabar antes que la correspondiente al nodo final.

Variables

$$X_{jp} = \begin{cases} 1 & \text{si la actividad } j \text{ se realiza durante periodo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nivelación mediante optimización cuadrática (ii)

Restricciones

a) Todas las actividades han de hacerse dentro del tiempo permitido.

$$\sum_p X_{jp} = d_j \quad \forall j$$

b) Respetar las relaciones de precedencia del grafo G. j' precede a j

$$\sum_{p'<p} X_{j'p'} \geq d_{j'} X_{jp} \quad \forall p, \forall (j', j) \in Q$$

c) Las actividades se han de hacer sin interrupción. Contigüidad en la realización de la actividad

$$X_{jp} + X_{j\,p+d_j} \leq 1 \quad \forall j, p$$

Función objetivo:

Minimizar la suma de los cuadrados de las cargas

$$\min \sum_p \sum_k \left(\sum_j car_{jk} X_{jp} \right)^2$$

Nivelación mediante optimización lineal (iii)

Datos

$\overline{car}_k$ representa la carga media del recurso k

Variables

N_{pk}, S_{pk}: desviación inferior (por debajo) o superior (por encima) durante el periodo p al valor medio de la carga del recurso k

Restricciones de las desviaciones

$$\sum_j car_{jk} X_{jp} + N_{pk} - S_{pk} = \overline{car}_k \quad \forall p,k$$

Función objetivo

$$\min \sum_p \sum_k (N_{pk} + S_{pk})$$

Asignación de recursos limitados

Hipótesis

Los recursos son limitados en cantidad, restringen la solución.

Objetivo

Minimizar el tiempo total de realización del proyecto con los recursos disponibles.

Algoritmo heurístico de asignación de recursos limitados

- Ir asignando los recursos periodo a periodo, empezando por el primero.

- Programar las actividades que pueden realizarse en ese periodo, siempre que no se supere la disponibilidad de los recursos, dando prioridad a las que menor holgura tienen (las actividades críticas serán las de mayor prioridad).

- Partimos de la programación inicial resultante de aplicar el método del camino crítico, recogiendo la carga correspondiente a cada periodo.

UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Asignación de recursos limitados mediante optimización (i)

Restricciones

a) Todas las actividades han de hacerse dentro del tiempo permitido.

$$\sum_p X_{jp} = d_j \quad \forall j$$

b) Respetar las relaciones de precedencia del grafo G. j' precede a j

$$\sum_{p'<p} X_{j'p'} \geq d_{j'} X_{jp} \quad \forall p, \forall (j', j) \in Q$$

c) Las actividades se han de hacer sin interrupción. Contigüidad en la realización de la actividad

$$X_{jp} + X_{j\,p+d_j} \leq 1 \quad \forall j, p$$

d) No superar la disponibilidad de los recursos:

$$\sum_j car_{jk} X_{jp} \leq disp_k \quad \forall p, k$$

Asignación de recursos limitados mediante optimización (ii)

Función objetivo: Penalizar la realización de la tarea en periodos lejanos

$$\min \sum_p \alpha_p (\sum_j X_{jp})$$

si $p > p'$ entonces $\alpha_p > \alpha_{p'}$

Asignación de recursos limitados mediante optimización (iii)

Variables

$$Y_p = \begin{cases} 1 & \text{si se programa alguna actividad durante el periodo } p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Restricción

$$\sum_j X_{jp} \leq M Y_p \quad \forall p$$

Función objetivo: Penalizar la realización de la tarea en periodos lejanos

$$\min \sum_p \alpha_p Y_p$$