UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
M A D R I D

upcomillas.es

upcomillas.es

Gestión de operaciones

Modelado de restricciones con variables binarias

Modelado de programación no lineal

Pedro Sánchez
pedro.sanchez@upcomillas.es

Contenido

- Restricciones especiales
- Restricciones lógicas
- Productos de variables
- Modelos de programación NO lineal

Modelado de restricciones especiales (i)

- Disyunciones e implicaciones

Una pareja de restricciones donde una se debe satisfacer, mientras que la otra no es necesario que se cumpla

$$f(x) \leq 0 \quad \text{ó} \quad g(x) \leq 0$$

es equivalente a:

$$f(x) > 0 \longrightarrow \mathrm{g}(x) \leq 0$$

Ejemplo: $3x_1 + 2x_2 - 18 \leq 0$ ó $x_1 + 4x_2 - 16 \leq 0$

$$3x_1 + 2x_2 - 18 \leq My$$
$$x_1 + 4x_2 - 16 \leq M(1-y)$$

$$y = \begin{cases} 1 & \text{se relaja la ecuación 1} \\ 0 & \text{se relaja la ecuación 2} \end{cases}$$

M: un valor suficientemente elevado

Modelado de restricciones especiales (ii)

- Cumplir *k* de *N* ecuaciones

Se tiene un conjunto de *N* ecuaciones de las cuales
se han de satisfacer al menos *k* de ellas

$$f_1(x_1,\ldots,x_n) \le 0$$

$$f_2(x_1,\ldots,x_n) \le 0$$

$$f_N(x_1,\ldots,x_n) \le 0$$

$$\Downarrow$$

$$f_1(x_1,\ldots,x_n) \le M y_1 \qquad \sum_{i=1}^{N} y_i = N - k$$

$$f_2(x_1,\ldots,x_n) \le M y_2$$

$$f_N(x_1,\ldots,x_n) \le M y_N \qquad y_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,N$$

Modelado de restricciones especiales (iii)

- Seleccionar entre *N* valores

Sea una ecuación con múltiples cotas
Se ha de cumplir al menos una de ellas

$$f(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{cases}$$

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{N} d_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,N$$

Modelado de restricciones lógicas (i)

Tabla de equivalencias lógicas

$P \rightarrow Q$	no P o Q
$P \rightarrow$ (Q y R)	$(P \rightarrow Q)$ y $(P \rightarrow R)$
$P \rightarrow$ (Q o R)	$(P \rightarrow Q)$ o $(P \rightarrow R)$
(P y Q) $\rightarrow R$	$(P \rightarrow R)$ o $(Q \rightarrow R)$
(P o Q) $\rightarrow R$	$(P \rightarrow R)$ y $(Q \rightarrow R)$
no (P o Q)	no P y no Q
no (P y Q)	no P o no Q

P	Q	R
0	0	?
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Modelado de restricciones lógicas (ii)

Se denomina X_i al cumplimiento de la restricción *i*
Se denomina δ_i a la variable binaria asociada al cumplimiento

Transformación de proposiciones lógicas en restricciones

$X_1 \; o \; X_2$	$\delta_1 + \delta_2 \geq 1$
$X_1 \; y \; X_2$	$\delta_1 = 1 \, , \, \delta_2 = 1$
$no \; X_1$	$\delta_1 = 0$
$X_1 \rightarrow X_2$	$\delta_1 - \delta_2 \leq 0$
$X_1 \leftrightarrow X_2$	$\delta_1 - \delta_2 = 0$

Modelado de restricciones lógicas (iii)

Ejemplo:

Si se fabrica el producto A o B (o ambos), entonces debe fabricarse al menos uno de los productos C, D o E

$$(X_A \text{ o } X_B) \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E)$$

$$\Downarrow$$

$$\delta_A + \delta_B \geq 1 \Rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$

Para modelar estas implicaciones lógicas se separan en dos bloques mediante una variable binaria auxiliar

$$\delta_A + \delta_B \geq 1 \Rightarrow \delta = 1$$

$$\delta = 1 \Rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$

Modelado de restricciones lógicas (iv)

Tabla de equivalencia en restricciones lineales

$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \leq b$	$\sum_j a_j x_j \leq b + M(1-\delta)$
$\sum_j a_j x_j \leq b \rightarrow \delta = 1$	$\sum_j a_j x_j \geq b + \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta$
$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \geq b$	$\sum_j a_j x_j \geq b + m(1-\delta)$
$\sum_j a_j x_j \geq b \rightarrow \delta = 1$	$\sum_j a_j x_j \leq b - \varepsilon + (M+\varepsilon)\delta$
$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j = b$	$\sum_j a_j x_j \leq b + M(1-\delta)$ $\sum_j a_j x_j \geq b + m(1-\delta)$
$\sum_j a_j x_j = b \rightarrow \delta = 1$	$\sum_j a_j x_j \geq b + \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta'$ $\sum_j a_j x_j \leq b - \varepsilon + (M+\varepsilon)\delta''$ $\delta' + \delta'' - \delta \leq 1$

M

constante superior de la restricción que cumple para cualquier x_j

$$\boxed{\sum_j a_j x_j - b \leq M}$$

m

constante inferior de la restricción que cumple para cualquier x_j

$$\boxed{\sum_j a_j x_j - b \geq m}$$

ε

constante de valor muy pequeño (con variables binarias o enteras vale 1)

Modelado de restricciones lógicas (iv)

Ejemplo (Cont.):

$$\delta_A + \delta_B \geq 1 \rightarrow \delta = 1$$

$$\boxed{\delta_A + \delta_B \leq 2\delta}$$

$$\delta = 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$

$$\boxed{\delta_C + \delta_D + \delta_E \geq \delta}$$

Ejemplo (Otra formulación):

$$(X_A \text{ o } X_B) \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E) \Rightarrow \begin{cases} [X_A \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E)] \\ \text{y} \\ [X_B \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E)] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \delta_A - \delta \leq 0 \\ \delta_B - \delta \leq 0 \\ \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq \delta \end{cases}}$$

Modelado de restricciones lógicas (v)

Otro ejemplo :

Un entrenador de baloncesto tiene 9 jugadores clasificados entre 1 y 3 de acuerdo a su nivel de manejo de pelota, tiro, rebote y defensa

Jugador	Posiciones	Manejo de pelota	Tiro	Rebote	Defensa
1	Pivot	2	1	3	3
2	Base	3	3	1	2
3	Pivot, Alero	2	3	2	2
4	Alero, Base	1	3	3	1
5	Pivot, Alero	1	3	1	2
6	Alero, Base	3	1	2	3
7	Pivot, Alero	3	2	2	1
8	Pivot	2	1	3	2
9	Alero	3	3	1	3

Se debe conseguir un equipo de 5 jugadores con máxima capacidad defensiva

Modelado de restricciones lógicas (vi)

Otro ejemplo (Cont.) :

Condicionantes

- Dos jugadores deben poder actuar de pivot, dos de alero y uno de base
- Su nivel medio en manejo de pelota, tiro y rebote debe ser no inferior a 2
- Si el jugador 3 juega, el jugador 6 no juega
- Si el jugador 1 juega, el 4 ó 5 juegan pero no los dos. Si no, no hay condición
- El jugador 8 o el 9 deben jugar pero no los dos a la vez

VARIABLES

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se incluye el jugador } j \text{ en el equipo} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$j = 1, \ldots, 9$$

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si se incluye el jugador } j \text{ en posición } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$j = 1, \ldots, 9 \qquad k = p, a, b$$

Modelado de restricciones lógicas (vii)

Función objetivo: $\max 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + 2x_8 + 3x_9$

Selección de 5 jugadores: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 5$

Número mínimo de jugadores en puestos:

$$x_1 + x_{3p} + x_{5p} + x_{7p} + x_8 \geq 2 \Rightarrow \text{pivot}$$

$$x_{3a} + x_{4a} + x_{5a} + x_{6a} + x_{7a} + x_9 \geq 2 \Rightarrow \text{alero}$$

$$x_2 + x_{4b} + x_{6b} \geq 1 \Rightarrow \text{base}$$

Niveles medios mínimos:

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 3x_9 \geq 10 \Rightarrow \text{manejo}$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 + 3x_9 \geq 10 \Rightarrow \text{tiro}$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_9 \geq 10 \Rightarrow \text{rebote}$$

Incompatibilidad entre los jugadores 3 y 6: $x_3 + x_6 \leq 1$

Modelado de restricciones lógicas (viii)

Afinidad entre jugador 1 :
y jugadores 4 y 5

$$x_1 \geq 1 \rightarrow x_4 + x_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_4 + x_5 \leq 2 - x_1 \\ x_4 + x_5 \geq x_1 \end{cases}$$

Un jugador entre 8 y 9: $x_8 + x_9 = 1$

Relaciones de coherencia binarias:

$$x_{3p} + x_{3a} - x_3 = 0$$

$$x_{4a} + x_{4b} - x_4 = 0$$

$$x_{5p} + x_{5a} - x_5 = 0$$

$$x_{6a} + x_{6b} - x_6 = 0$$

$$x_{7p} + x_{7a} - x_7 = 0$$

Modelado de productos

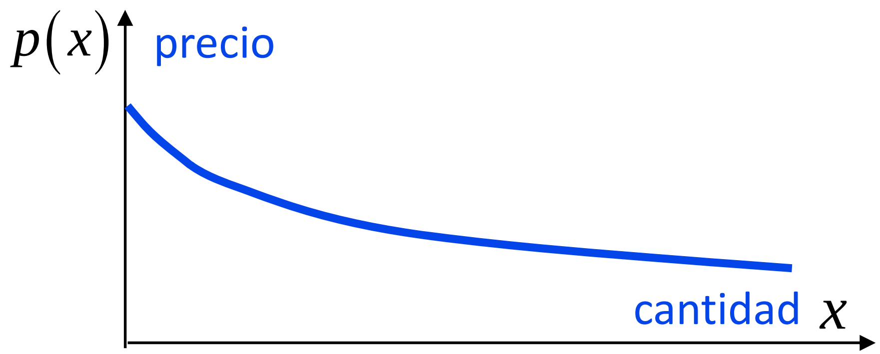
Las variables binarias se pueden utilizar para eliminar productos de variables que harían el problema <u>no lineal</u>

$\delta_1\delta_2 = 0$ $\delta_i \in \{0,1\}$	$\delta_1 = 0$ o $\delta_2 = 0$	$\delta_1 + \delta_2 \le 1$ $\delta_i \in \{0,1\}$
$\delta_1\delta_2$ $\delta_i \in \{0,1\}$	Reemplazar $\delta_1\delta_2$ por δ_3 $\delta_3 = 1 \rightarrow \delta_1 = 1$ y $\delta_2 = 1$	$-\delta_1 + \delta_3 \le 0$ $-\delta_2 + \delta_3 \le 0$ $\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 \le 1$ $\delta_i \in \{0,1\}$
$x\delta$ $x \ge 0$ $\delta \in \{0,1\}$	Reemplazar $x\delta$ por y $\delta = 0 \rightarrow y = 0$ $\delta = 1 \rightarrow y = x$	$y \ge 0$ $y \le M\delta$ $-x + y \le 0$ $x - y + M\delta \le M$ $x \le M$

Modelos de programación no lineal (i)

En algunos campos el modelado no lineal no se puede aproximar por el lineal

PRODUCCIÓN CON ELASTICIDAD EN PRECIOS/COSTES



Margen de contribución: $P(x) = xp(x) - cx$

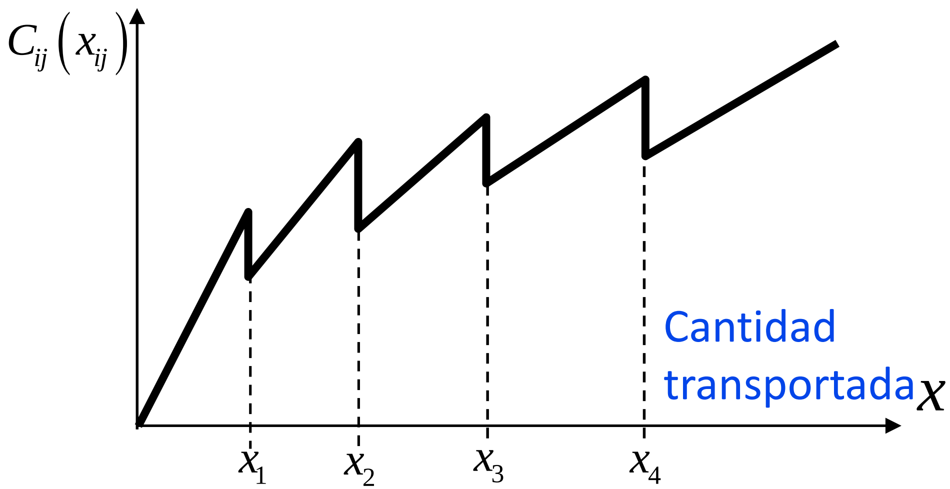
Maximización del margen total: $f(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \left[x_j p_j(x_j) - c_j x_j \right]$

Análogamente podría suceder con una función de costes no lineal $c(x)$

Modelos de programación no lineal (ii)

TRANSPORTE CON DESCUENTOS POR VOLUMEN

- Se modelan los descuentos por cantidad para volúmenes grandes
- La función de coste es una función en diente de sierra para cada tramo



Minimización de costes: $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(x_{ij})$

Modelos de programación no lineal (iii)

SELECCIÓN DE UNA CARTERA DE INVERSIONES

Se tienen en cuenta *n* tipos de acciones para formar una cartera

PARÁMETROS: μ_j : media del rendimiento de las acciones *j*

σ_{jj} : varianza del rendimiento de las acciones *j*

VARIABLES: x_j : Número de acciones *j* que se incluyen en la cartera

$R(x)$: Rendimiento esperado

$V(x)$: Varianza del rendimiento total de la cartera

$$\boxed{\begin{aligned} R(x) &= \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \\ V(x) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \end{aligned}}$$

Modelos de programación no lineal (iv)

SELECCIÓN DE UNA CARTERA DE INVERSIONES (cont.)

FUNCIÓN OBJETIVO: Maximizar $f(x) = R(x) - \beta V(x)$

β : factor de aversión al riesgo

RESTRICCIONES:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \leq B$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

P_j : coste de cada acción de tipo *j*

B : presupuesto

Ejemplos de modelados (i)

CONSTRUCCIÓN DE ALMACENES

- Una compañía planea construir varios almacenes
- Surtirán a dos clientes
- Se pueden construir hasta tres almacenes
- Los costes estimados de construcción son 8000, 12000 y 7000
- Los costes de transporte, capacidad y demanda son:

	Cliente 1	Cliente 2	Capacidad
Almacén 1	1.50	2.00	4000
Almacén 2	2.00	1.50	5000
Almacén 3	2.50	2.25	6000
Demanda	3000	5000	

Ejemplos de modelados (ii)

CONSTRUCCIÓN DE ALMACENES (Cont.)

$$\min_{x_{ij}, y_i} \sum_{i,j} v_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i y_i$$

$$\sum_j x_{ij} \leq c_i y_i \quad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} \geq d_j \quad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0, y_i \in \{0,1\}$$

Solución:

Construir almacenes 1 y 3 y servir del 1 al cliente 1, 3000 unidades y al cliente 2, 1000 unidades y del almacén 3 al cliente 2, 4000 unidades

Ejemplos de modelados (iii)

PRODUCCIÓN E INVENTARIO

OBJETIVO: Planificación de la política de producción/inventario de agosto, septiembre, octubre y noviembre a coste mínimo

- Demanda estimada en esos meses: 500, 600, 800 y 1000 unidades
- Capacidad de producción mensual es 600 unidades a 25 euros/unidad
- El inventario inicial es 250 unidades
- La capacidad máxima del inventario es 400 unidades
- El coste mensual de almacenamiento por unidad es de 3 euros
- Se requiere un inventario al final de noviembre de 100 unidades

Ejemplos de modelados (iv)

PRODUCCIÓN E INVENTARIO (Cont.)

$$\min \sum_i \left(c i_i + c' p_i \right)$$

$$i_i + p_i - d_i = i_{i+1}$$

$$p_i \le \overline{p}_i$$

$$i_i \le \overline{i}_i$$

$$i_1 = 250, i_5 = 100$$

$$i_i, p_i \ge 0$$