Modelado en optimización lineal entera mixta

Andrés Ramos

Universidad Pontificia Comillas

http://www.iit.comillas.edu/aramos/

Andres.Ramos@comillas.edu

CONTENIDO

- ➢ CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ❑ ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- ❑ PROBLEMA DE COSTE FIJO
- ❑ PROPOSICIONES LÓGICAS
- ❑ MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- ❑ PIECEWISE LINEAR (master)
- ❑ CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- ❑ SPECIAL ORDERED SETS (master)
- ❑ REFORMULATION (master)

Clasificación de problemas IP

- Problemas *lineales* donde algunas o todas las variables son *enteras*. Un caso particular de variables enteras son las variables *binarias* (0/1).

1. PIP (*pure integer programming*) todas enteras

2. BIP (*binary integer programming*) todas binarias

3. MIP (*mixed integer programming*) algunas enteras o binarias

Justificación de problemas de optimización con variable enteras

- Las inversiones son variables discretas (planificación de la expansión de la generación o de la red, adquisición de equipos singulares, contratación de personas)

- Las decisiones son variables binarias (localización de plantas o almacenes)

Representación binaria de variables enteras

- x variable entera
- y_i variable binaria (0/1)

$$x = \sum_{i=0}^{N} 2^i y_i \qquad 0 \le x \le u \qquad 2^N \le u \le 2^{N+1}$$

CONTENIDO

- ❑ CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ➢ ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- ❑ PROBLEMA DE COSTE FIJO
- ❑ PROPOSICIONES LÓGICAS
- ❑ MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- ❑ PIECEWISE LINEAR (master)
- ❑ CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- ❑ SPECIAL ORDERED SETS (master)
- ❑ REFORMULATION (master)

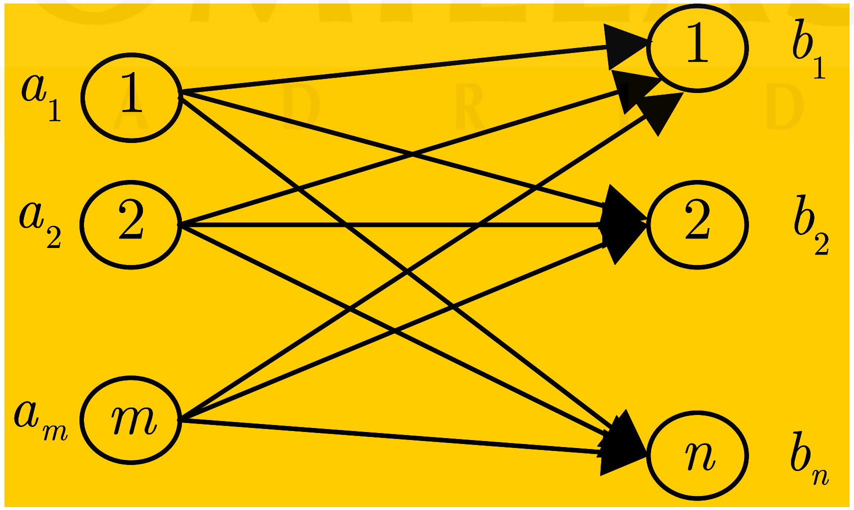
Algunos problemas característicos de LP y BIP

- Se han estudiado exhaustivamente. Su importancia práctica es limitada, pero pueden formar parte de otros problemas.
- *Programación lineal LP*
  - ✓ Transporte
  - ✓ Transbordo
  - ✓ Asignación
- *Programación binaria pura BIP*
  - ✓ Mochila
  - ✓ Recubrimiento
  - ✓ Empaquetado
  - ✓ Partición
  - ✓ Viajante

Problema de transporte

- Minimizar el coste total de transporte de un cierto producto desde los orígenes a los destinos, satisfaciendo la demanda de cada destino sin superar la oferta disponible en cada origen.

- a_i oferta de producto en el origen i — m orígenes
- b_j demanda de producto en el destino j — n destinos
- c_{ij} coste unitario de transporte desde i a j



Formulación problema de transporte

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- Oferta disponible en cada origen i $\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$

- Demanda de cada destino j $\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \ldots, n$

- $x_{ij} \geq 0$ unidades de producto transportadas desde i hasta j $\forall i, j$
- Se supone que la oferta es igual a la demanda del producto

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Si $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ se añade un sumidero universal con coste nulo

- Si $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ se añade una fuente universal con coste muy elevado

Estructura problema de transporte

$$
\begin{array}{l|cccc|cccc|c|cccc|}
 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \\
 & 1 & 1 & \dots & 1 & & & & & & & & & \\
m \text{ restricciones de oferta} & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\hline
 & 1 & & & & 1 & & & & \dots & 1 & & & \\
n \text{ restricciones de demanda} & & 1 & & & & 1 & & & \dots & & 1 & & \\
 & & & \ddots & & & & \ddots & & \dots & & & \ddots & \\
 & & & & 1 & & & & 1 & \dots & & & & 1 \\
\end{array}
$$

Si a_i y b_j son enteros $\Rightarrow$ x_{ij} son enteros por ser la matriz totalmente unimodular (i.e., toda submatriz cuadrada tiene determinante 0, 1 ó –1)

Problema de trasbordo

- Determinar en una red con n nodos las rutas más baratas para llevar unidades de un producto desde sus orígenes a sus destinos pasando por puntos de trasbordo intermedios.

- Cada *origen* genera $b_i > 0$ unidades.
- Cada *destino* consume $b_i < 0$ unidades.
- Cada *trasbordo* ni genera ni consume unidades $b_i = 0$.
- c_{ij} coste unitario de transporte desde i hasta j en dicho sentido.

Formulación problema de trasbordo

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- Balance o conservación del flujo en cada nudo *i*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{ki} = b_i \quad \forall i = 1,\ldots,n$$

- $x_{ij} \geq 0$ unidades de producto transportadas desde *i* a *j* $\forall i, j$
- Se supone que la oferta es igual a la demanda del producto

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$$

Problema de asignación de tareas

- n tareas

  n personas (máquinas, etc.) para realizarlas
- Es un caso particular del problema de transporte.
- Minimizar el coste total de realizar las tareas sabiendo que cada persona realiza 1 tarea y cada tarea es realizada por 1 persona.
- c_{ij} coste de realizar la tarea i por la persona j

$$x_{ij}\begin{cases} 1 & \text{si la tarea } i \text{ es realizada por la persona } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- *Aunque no es necesario declararlas como binarias.*

Formulación problema de asignación de tareas

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

- Cada tarea *i* es hecha por una persona

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

- Cada persona *j* realiza una tarea

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$$

Secuenciación de trabajos en una máquina

- Dados unos trabajos que realizar, una duración de éstos y una fecha de entrega prevista, plantear un problema de programación lineal entera para encontrar la secuencia que minimiza el retraso o demora media con que los trabajos son entregados, con los siguientes datos:

Tarea	A	B	C	D
Tiempo de proceso	9	12	7	14
Fecha de entrega	15	19	23	31

- Denominamos d_j al tiempo de proceso del trabajo j y r_j a la fecha de entrega del trabajo j.
- Definimos las variables del problema como

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el trabajo } j \text{ se hace en la posición } i \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

- La función objetivo será la minimización de la demora media

$$\min \frac{1}{4} \sum_i p_i$$

- sujeto a estas restricciones:
  - ✓ cada trabajo se hace una vez $\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$
  - ✓ en cada posición sólo un trabajo $\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$

- Para cada posición *i* se acaba un trabajo en ella y su fecha de entrega es $\sum_j r_j x_{ij}$
- Por otra parte, el trabajo *j* que acaba en esa posición acaba en el instante $\sum_j d_j \sum_{k\le i} x_{kj}$. Las variables n_i y p_i , cuentan si acaba antes de tiempo (adelantado) o después (retrasado), por eso p_i , que es la demora, es la que aparece en la función objetivo

$$\sum_j d_j \sum_{k\le i} x_{kj} + n_i - p_i = \sum_j r_j x_{ij} \quad \forall i$$

$$n_i, p_i \ge 0 \quad x_{ij} \in \{0,1\}$$

Problema de la mochila (*knapsack*)

- n proyectos
- Maximizar el valor total de la elección de un conjunto de proyectos sin sobrepasar el presupuesto disponible.
- c_j coste de cada proyecto j
- v_j valor de cada proyecto j
- b presupuesto disponible

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{si se realiza el proyecto } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Formulación problema de la mochila

$$\max_{x_j} \quad \sum_{j=1}^{n} v_j x_j$$

- Limitación del presupuesto disponible

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad \forall j$$

Problema de recubrimiento (*set covering*)

- m características (vuelos)
- n combinación de características (secuencia de vuelos). La elección de una combinación implica realizar todas las características de la misma.
- Minimizar el coste total de las combinaciones elegidas de manera que se cubra (posea) cada característica *al menos* una vez.
- c_j coste de elegir la combinación j
- matriz de pertenencia $a_{ij}\begin{cases}1 & \text{si la característica } i \text{ pertenece a la combinación } j\\ 0 & \text{si no pertenece}\end{cases}$

$$x_j\begin{cases}1 & \text{si se elige la combinación } j\\ 0 & \text{en cualquier otro caso}\end{cases}$$

Formulación problema de recubrimiento

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- Cada característica *i* del conjunto de todas las combinaciones *j* que la poseen debe ser escogida al menos una vez.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \ldots, n$$

Ejemplo de recubrimiento: asignación de tripulaciones

- Una compañía aérea necesita asignar sus tripulaciones para cubrir todos sus vuelos. En particular, quiere resolver el problema de asignar TRES tripulaciones con base en San Francisco a los vuelos listados en la primera columna de la tabla. Las otras columnas muestran las 12 SECUENCIAS FACTIBLES de vuelos para una tripulación cualesquiera. Los números de cada columna indican el orden de los vuelos. Se necesita elegir tres secuencias (una por tripulación) de manera que se cubran todos los vuelos. Se permite tener más de una tripulación en un vuelo, donde la/s tripulación/es extra viajan como pasajeros, pero por convenio laboral la tripulación extra cobra como si estuviera trabajando. El coste de asignación de una tripulación a cada secuencia de vuelos se da en miles de euros en la última fila. El objetivo es minimizar el coste total de asignación de las tres tripulaciones para cubrir todos los vuelos.
- Resolver el mismo problema para el caso en que no se permite el vuelo de una tripulación fuera de servicio en un vuelo.

Secuencias factibles de vuelo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
SF - LA	1			1			1			1		
SF - Denver		1			1			1			1	
SF - Seattle			1			1			1			1
LA - Chicago				2			2		3	2		3
LA - SF	2					3				5	5	
Chicago - Denver				3	3				4			
Chicago - Seattle							3	3		3	3	4
Denver - SF		2		4	4				5			
Denver - Chicago					2			2			2	
Seattle - SF			2				4	4				5
Seattle - LA						2			2	4	4	2
Coste (k€)	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 9x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12}$$

- Cobertura de cada vuelo

$$\begin{aligned} & x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1 \\ & x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} \geq 1 \\ & x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} \geq 1 \\ & \vdots \end{aligned}$$

- Asignación de las tres tripulaciones

$$\sum_{j=1}^{12} x_j = 3$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \ldots 12$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se elige la secuencia } j \text{ para una tripulación} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- Solución
  - ✓ $x_3 = x_4 = x_{11} = 1$ $\quad x_j = 0 \quad j \neq 3, 4, 11$ $\quad$ coste = 18 k€
  - ✓ $x_1 = x_5 = x_{12} = 1$ $\quad x_j = 0 \quad j \neq 1, 5, 12$ $\quad$ coste = 18 k€

Problema de empaquetado (*set packing*)

- m proyectos
- n paquetes (conjuntos) de proyectos. La elección de un paquete (conjunto) implica realizar todos los proyectos del mismo.
- Maximizar el beneficio total de manera que ningún proyecto se realice más de una vez.
- c_j beneficio de elegir el paquete j

$$a_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si el proyecto } i \text{ está en el paquete } j \\ 0 & \text{si no lo está} \end{cases}$$

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{si se elige el paquete } j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Formulación problema de empaquetado

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- Cada proyecto *i* del conjunto de todos los paquetes que lo incluyen no puede ser elegido más de una vez

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \quad i = 1,\ldots,m$$

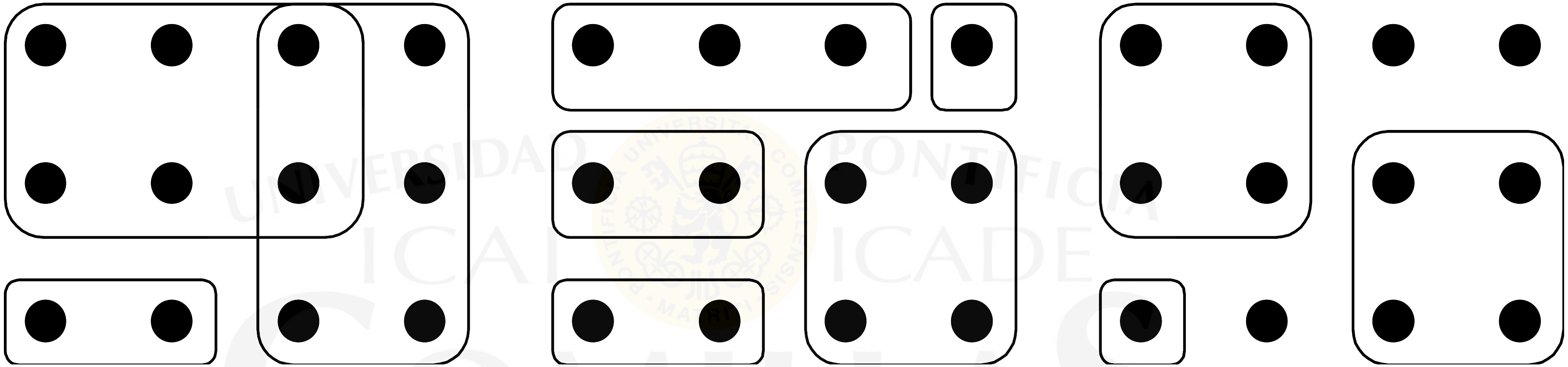
$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1,\ldots,n$$

Problema de partición (*set partitioning*)

- EXACTAMENTE una característica (proyecto) del conjunto de combinaciones (paquetes) que la contienen debe ser elegida

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \quad i = 1, \ldots, m$$

Problemas de recubrimiento, partición y empaquetado



RECUBRIMIENTO PARTICIÓN EMPAQUETADO

Problema del viajante (*traveling salesman problem TSP*)

- Consiste en hacer un recorrido que pase por ciudades sin repetir ninguna y volviendo a la ciudad de partida de manera que la distancia total sea mínima.
- *Formulación 1:*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si se va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\min_{x_{ij}} \sum_{ij} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{ij \in U} x_{ij} \le \text{card}(U) - 1 \qquad \forall U \quad 2 \le \text{card}(U) \le n - 2$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Problema del viajante (TSP)

- *Formulación 2:*

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si se va de la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \text{ en el tramo } k \text{ de recorrido} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\min_{x_{ijk}} \sum_{i,j,k} c_{ij} x_{ijk}$$

$$\sum_{j,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{i,k} x_{ijk} = 1 \quad \forall j$$

$$\sum_{i,j} x_{ijk} = 1 \quad \forall k$$

$$\sum_{i} x_{ijk} = \sum_{r} x_{jrk+1} \quad \forall j,k$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}$$

CONTENIDO

- CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- ➢ PROBLEMA DE COSTE FIJO
- PROPOSICIONES LÓGICAS
- MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- PIECEWISE LINEAR (master)
- CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- SPECIAL ORDERED SETS (master)
- REFORMULATION (master)

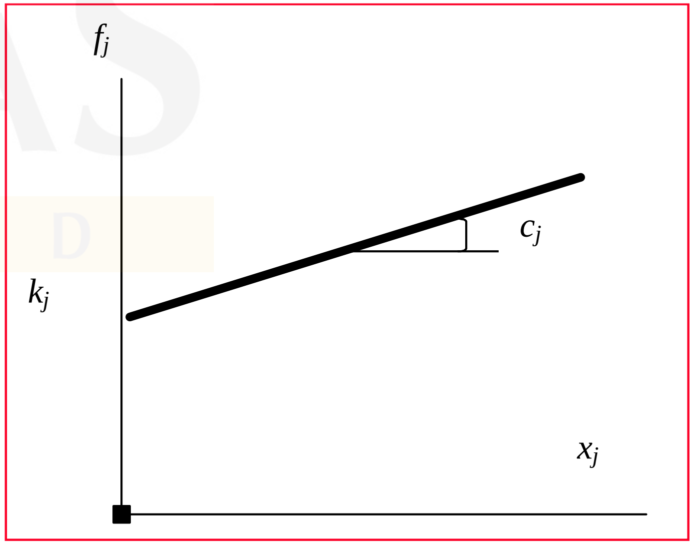
Problema de coste fijo

- Se tiene la función objetivo $f_j(x_j)=\begin{cases} 0 & x_j=0 \\ k_j+c_jx_j & x_j>0 \end{cases}$
- Definimos una variable binaria que modela la decisión binaria sobre la realización de la actividad x_j

$$y_j=\begin{cases} 1 & x_j>0 \\ 0 & x_j=0 \end{cases}$$

- La formulación resultante es

$$\min \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)=\sum_{j=1}^{n}\left(k_jy_j+c_jx_j\right)$$
$$x_j \le M_jy_j$$
$$x_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n$$
$$y_j \in \{0,1\} \quad j=1,\dots,n$$



- La M_j tiene que tener el menor valor posible

Asignación de grupos térmicos

- ¿Qué grupos térmicos de generación eléctrica hay que acoplar en cada hora del día (o semana) de manera que:

  - ✓ Se minimicen los costes variables de generación (incluyendo costes de combustible y costes de arranque y parada)
  - ✓ Se suministre la demanda en cada hora
  - ✓ Se mantenga un cierto nivel de reserva rodante
  - ✓ Se respeten los parámetros de funcionamiento de los grupos térmicos (mínimos técnicos, rampas de subida y bajada)

Asignación de grupos térmicos. Datos y variables

DATOS

D_h demanda térmica en la hora *h* [MW]

R coeficiente de reserva rodante con respecto a la demanda [p.u.]

a_t término lineal del coste de combustible del grupo térmico *t* [€/MWh]

b_t término fijo del coste de combustible del grupo térmico t [€/h]

ca_t coste de arranque del grupo térmico *t* [€]

cp_t coste de parada del grupo térmico *t* [€]

$\overline{P}_t$ potencia máxima del grupo térmico *t* [MW]

$\underline{P}_t$ potencia mínima del grupo térmico *t* [MW]

rs_t rampa de subida del grupo térmico *t* [MW/h]

rb_t rampa de bajada del grupo térmico *t* [MW/h]

VARIABLES

P_{ht} potencia producida por el grupo térmico *t* en la hora *h* [MW]

A_{ht} acoplamiento del grupo térmico *t* en la hora *h* {0,1}

AR_{ht} arranque del grupo térmico *t* en la hora *h* {0,1}

PR_{ht} parada del grupo térmico *t* en la hora *h* {0,1}

Asignación de grupos térmicos. Formulación

$$\min \sum_{h=1}^{H}\sum_{t=1}^{T}\left(a_t P_{ht} + b_t A_{ht} + ca_t AR_{ht} + cp_t PR_{ht}\right)$$

$$\sum_{t=1}^{T} P_{ht} = D_h \qquad H$$

$$\sum_{t=1}^{T} (\overline{P}_t A_{ht} - P_{ht}) = RD_h \qquad H$$

$$\underline{P}_t A_{ht} \le P_{ht} \le \overline{P}_t A_{ht} \qquad 2HT$$

$$A_{ht} - A_{h-1t} = AR_{ht} - PR_{ht} \qquad (H-1)T$$

$$P_{ht} - P_{h-1t} \le rs_t \qquad (H-1)T$$

$$P_{h-1t} - P_{ht} \le rb_t \qquad (H-1)T$$

$$P_{ht} \ge 0 \qquad A_{ht}, AR_{ht}, PR_{ht} \in \{0,1\}$$

CONTENIDO

- CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- PROBLEMA DE COSTE FIJO
- ➢ PROPOSICIONES LÓGICAS
- MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- PIECEWISE LINEAR (master)
- CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- SPECIAL ORDERED SETS (master)
- REFORMULATION (master)

Modelado de implicaciones

- Queremos modelar la condición de que "*si se produce el producto A también se debe producir el producto B*". La condición de producción de un producto *j* la representamos por la restricción $x_j \geq 1$. Luego esta implicación es $x_A \geq 1 \Rightarrow x_B \geq 1$

- Esta condición no se puede introducir directamente en un problema lineal porque hace que la estructura del problema (el que se considere o no una restricción más $x_B \geq 1$) depende de que se cumpla otra ($x_A \geq 1$) y esto sólo se conoce una vez que se ha determinado la solución óptima. Un problema de optimización no se puede redefinir endógenamente, es decir, en función de los propios valores que toman las variables del problema.

Restricciones disyuntivas (i)

- Pareja de restricciones donde sólo una (cualquiera de las dos) debe satisfacerse, mientras que la otra no es necesario que se cumpla. Debe cumplirse una pero no necesariamente las dos.

$$f(x) \leq 0 \quad \text{ó} \quad g(x) \leq 0$$

Restricciones disyuntivas (ii)

- Queremos cumplir una de estas dos restricciones

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad \text{ó} \quad x_1 + 4x_2 \leq 16$$

- Añadir *M* (constante de valor elevado) equivale a relajar la restricción (para variables positivas con coeficientes positivos)
  - ✓ Relajo la restricción 1 y satisfago la 2

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 + M \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 \end{aligned}$$

  - ✓ Relajo la restricción 2 y satisfago la 1

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 + M \end{aligned}$$

- Mediante variable binaria auxiliar elijo cuál de las dos relajo

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 + M\delta \\ x_1 + 4x_2 &\leq 16 + M(1-\delta) \end{aligned}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se relaja la ecuación 1} \\ 0 & \text{se relaja la ecuación 2} \end{cases}$$

Cumplir al menos *k* de *N* ecuaciones

- Se tienen que cumplir al menos k de N ($k < N$) ecuaciones

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1,\ldots,x_n) \le d_1 \\
&f_2(x_1,\ldots,x_n) \le d_2 \\
&\vdots \\
&f_N(x_1,\ldots,x_n) \le d_N
\end{aligned}$$

- $k = 1$ y $N = 2$ es el caso anterior
- Formulación

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1,\ldots,x_n) \le d_1 + M\delta_1 \\
&f_2(x_1,\ldots,x_n) \le d_2 + M\delta_2 \\
&\vdots \\
&f_N(x_1,\ldots,x_n) \le d_N + M\delta_N \\
&\sum_{i=1}^{N} \delta_i = N - k \\
&\delta_i \in \{0,1\} \quad i = 1,\ldots,N
\end{aligned}$$

Seleccionar uno entre *N* valores

- La ecuación se debe cumplir para exactamente uno de los valores

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{cases}$$

- Formulación

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{N} d_i\delta_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}\delta_i = 1$$

$$\delta_i \in \{0,1\} \quad i=1,\ldots,N$$

Implicaciones sencillas

- Retomemos el ejemplo de la restricción que aparecía en el problema de coste fijo $x \le M\delta$

  siendo M una cota superior positiva de x y δ la variable binaria.
  - ✓ Si $\delta = 1$ la restricción no obliga a nada ya que $x \le M$ se cumple por definición.
  - ✓ Si $\delta = 0$ entonces $x \le 0$.
- Luego esta restricción permite modelar la implicación $\delta = 0 \Rightarrow x \le 0$
- Por otra parte, si $x > 0$ entonces $\delta = 1$. Si $x \le 0$ la restricción no obliga a nada. $x > 0 \Rightarrow \delta = 1$
- Ambas son implicaciones equivalentes puesto que $P \to Q$ es equivalente a $\text{No } Q \to \text{No } P$

$$\left.\begin{array}{l}\delta = 0 \Rightarrow x \le 0 \\ x > 0 \Rightarrow \delta = 1\end{array}\right\} x \le M\delta$$

Implicaciones sencillas (ii)

- De forma análoga veamos la restricción $x \geq m\delta$

  siendo *m* una cota inferior negativa de x y δ la variable binaria.

  - ✓ Si $\delta = 1$ la restricción no obliga a nada ya que $x \geq m$ se cumple por definición.
  - ✓ Si $\delta = 0$ entonces $x \geq 0$. Luego esta restricción permite modelar la implicación $\delta = 0 \Rightarrow x \geq 0$

- Por otra parte, si $x < 0$ entonces $\delta = 1$. Si $x \geq 0$ la restricción no obliga a nada. $x < 0 \Rightarrow \delta = 1$

- Nuevamente ambas son implicaciones equivalentes puesto que

  $P \rightarrow Q$ es equivalente a $\text{No } Q \rightarrow \text{No } P$

$$\left.\begin{array}{l} \delta = 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ x < 0 \Rightarrow \delta = 1 \end{array}\right\} x \geq m\delta$$

Implicación de restricción $\leq$ (i)

- La implicación $\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \leq b$

  se modela como $\sum_j a_j x_j \leq b + M(1-\delta)$

  siendo M una cota superior de la restricción para cualquier valor de cualquier x_j $\sum_j a_j x_j - b \leq M$

  Efectivamente de manera directa se deduce que si $\delta = 1$ se impone la restricción original y si $\delta = 0$ no implica nada (se relaja la restricción original).
- Análogamente al caso anterior esta restricción también representa la implicación $\sum_j a_j x_j > b \rightarrow \delta = 0$

Implicaciones de una restricción $\leq$ (ii)

- La implicación $\sum_j a_j x_j \leq b \rightarrow \delta = 1$

  se puede transformar en $\delta = 0 \rightarrow \sum_j a_j x_j > b$

  o bien en $\delta = 0 \rightarrow \sum_j a_j x_j \geq b + \varepsilon$

  que es equivalente a $\sum_j a_j x_j \geq b + \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta$

  siendo *m* una cota inferior de la restricción para cualquier valor de cualquier x_j

  $\sum_j a_j x_j - b \geq m$

Implicaciones de una restricción ≥ (i)

- De manera simétrica se pueden representar las implicaciones con restricciones de tipo mayor o igual.
- La implicación $\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \geq b$

  es equivalente a $\sum_j a_j x_j \geq b + m(1-\delta)$

  siendo m una cota inferior de la restricción para cualquier valor de cualquier x_j, $\sum_j a_j x_j - b \geq m$.

  Efectivamente de manera directa se deduce que si $\delta = 1$ se impone la restricción original y si $\delta = 0$ no implica nada (se relaja la restricción original). Análogamente al caso anterior esta restricción también representa la implicación

$$\sum_j a_j x_j < b \rightarrow \delta = 0$$

Implicaciones de una restricción $\geq$ (ii)

- La implicación $\sum_j a_j x_j \geq b \rightarrow \delta = 1$

  se puede transformar en $\delta = 0 \rightarrow \sum_j a_j x_j < b$

  o bien en $\delta = 0 \rightarrow \sum_j a_j x_j \leq b - \varepsilon$

  que es equivalente a

  $$\sum_j a_j x_j \leq b - \varepsilon + (M + \varepsilon)\delta$$

  siendo M una cota superior de la restricción para cualquier valor de cualquier x_j,

  $$\sum_j a_j x_j - b \leq M$$

Implicaciones de una restricción = (i)

- Para deducir las implicaciones de restricciones igualdad se transforman en ecuaciones de tipo mayor o igual y menor o igual simultáneamente. La implicación

$$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j = b$$

es equivalente a

$$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \leq b$$

$$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \geq b$$

- Luego se representa por las ecuaciones

$$\sum_j a_j x_j \leq b + M(1-\delta)$$

$$\sum_j a_j x_j \geq b + m(1-\delta)$$

- Efectivamente para $\delta = 1$ se cumplen ambas restricciones y para $\delta = 0$ ambas restricciones se relajan.

Implicaciones de una restricción = (ii)

- La implicación $\sum_j a_j x_j = b \rightarrow \delta = 1$

  es una combinación de los casos anteriores simultáneamente

  $$\sum_j a_j x_j \le b \rightarrow \delta' = 1$$

  $$\sum_j a_j x_j \ge b \rightarrow \delta'' = 1$$

  y además $\delta' = 1 \text{ y } \delta'' = 1 \rightarrow \delta = 1$

  que se modela con las restricciones

  $$\sum_j a_j x_j \ge b + \varepsilon + (m - \varepsilon)\delta'$$

  $$\sum_j a_j x_j \le b - \varepsilon + (M + \varepsilon)\delta''$$

  y otra restricción adicional que indique el cumplimiento de ambas. $\delta' + \delta'' - \delta \le 1$

Implicaciones dobles

- Para formular implicaciones dobles éstas se desdoblan en las implicaciones unidireccionales correspondientes.

$$\delta = 1 \leftrightarrow \sum_j a_j x_j \le b$$ es equivalente a $$\begin{cases} \delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \le b \\ \sum_j a_j x_j \le b \rightarrow \delta = 1 \end{cases}$$

y lo mismo para los otros tipos de restricciones.

$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \le b$	$\sum_j a_j x_j \le b + M(1-\delta)$
$\sum_j a_j x_j \le b \rightarrow \delta = 1$	$\sum_j a_j x_j \ge b + \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta$
$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j \ge b$	$\sum_j a_j x_j \ge b + m(1-\delta)$
$\sum_j a_j x_j \ge b \rightarrow \delta = 1$	$\sum_j a_j x_j \le b - \varepsilon + (M+\varepsilon)\delta$
$\delta = 1 \rightarrow \sum_j a_j x_j = b$	$\sum_j a_j x_j \le b + M(1-\delta)$ $\sum_j a_j x_j \ge b + m(1-\delta)$
$\sum_j a_j x_j = b \rightarrow \delta = 1$	$\sum_j a_j x_j \ge b + \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta'$ $\sum_j a_j x_j \le b - \varepsilon + (M+\varepsilon)\delta''$ $\delta' + \delta'' - \delta \le 1$

$\delta = 1 \leftrightarrow \sum_j a_j x_j \le b$	$\sum_j a_j x_j \le b + M(1-\delta)$ $\sum_j a_j x_j \ge b + \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta$
$\delta = 1 \leftrightarrow \sum_j a_j x_j \ge b$	$\sum_j a_j x_j \ge b + m(1-\delta)$ $\sum_j a_j x_j \le b - \varepsilon + (M+\varepsilon)\delta$
$\delta = 1 \leftrightarrow \sum_j a_j x_j = b$	$\sum_j a_j x_j \le b + M(1-\delta)$ $\sum_j a_j x_j \ge b + m(1-\delta)$ $\sum_j a_j x_j \ge b + \varepsilon + (m-\varepsilon)\delta'$ $\sum_j a_j x_j \le b - \varepsilon + (M+\varepsilon)\delta''$ $\delta' + \delta'' - \delta \le 1$

Equivalencias entre proposiciones condicionales y/o compuestas

- Pueden utilizarse para transformar las implicaciones antes de convertirlas en restricciones lineales

$P \to Q$	No P o Q
$P \to$ (Q y R)	($P \to Q$) y ($P \to R$)
$P \to$ (Q o R)	($P \to Q$) o ($P \to R$)
(P y Q) $\to R$	($P \to R$) o ($Q \to R$)
(P o Q) $\to R$	($P \to R$) y ($Q \to R$)
no (P o Q)	no P y no Q
no (P y Q)	no P o no Q

Implicaciones

- Una implicación se puede expresar mediante restricciones disyuntivas

$$f(x) > 0 \Rightarrow g(x) \le 0$$

$f(x) > 0$	$g(x) <= 0$	
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Es equivalente a

$$f(x) \le 0 \quad \text{ó} \quad g(x) \le 0$$

$f(x) <= 0$	$g(x) <= 0$	
F	V	V
F	F	F
V	V	V
V	F	V

Proposiciones condicionales y/o compuestas sencillas

- X_i restricción i, δ_i variable binaria que indica la satisfacción de la restricción i
- La primera fila dice que se debe cumplir la restricción 1 ó la 2 (o ambas), luego efectivamente al menos una de las dos variables δ_1 y δ_2 debe tomar valor 1 y la forma de expresarlo con una ecuación lineal es $\delta_1 + \delta_2 \geq 1$
  Además tiene que haber una restricción que diga que si se satisface la restricción i entonces $\delta_i = 1$

$$x_i > 0 \rightarrow \delta_i = 1$$

  Esa condición ha surgido ya para el problema de coste fijo y su modelado como restricción lineal era $\delta_i = 1$

X_1 o X_2	$\delta_1 + \delta_2 \geq 1$
X_1 y X_2	$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = 1$
no X_1	$\delta_1 = 0$
$X_1 \rightarrow X_2$	$\delta_1 - \delta_2 \leq 0$
$X_1 \leftrightarrow X_2$	$\delta_1 - \delta_2 = 0$

Proposiciones condicionales y/o compuestas complejas

- Las proposiciones condicionales y/o compuestas más complejas se separan en una doble implicación para poder obtener las restricciones lineales de manera automática.
- Por ejemplo, $(X_A \text{ o } X_B) \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E)$

  se modela como

  $$\delta_A + \delta_B \geq 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$

  se transforma en la doble implicación

  $$\delta_A + \delta_B \geq 1 \rightarrow \delta = 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$

  que es equivalente a

  $$\begin{aligned} &\delta_A + \delta_B \geq 1 \rightarrow \delta = 1 \\ &\delta = 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1 \end{aligned}$$

- Veamos cómo se modela cada una de estas implicaciones

Ejemplo

- Si se fabrica el producto A o B (o ambos) entonces debe fabricarse también al menos uno de los productos C, D o E.
- X_i restricción de fabricación del producto i
- δ_i=1 variable binaria asociada a satisfacer la restricción i

$$(X_A \text{ o } X_B) \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E)$$

$$\begin{gathered}\delta_{\mathrm{A}} + \delta_{\mathrm{B}} \geq 1 \rightarrow \delta = 1 \\ \delta = 1 \rightarrow \delta_{\mathrm{C}} + \delta_{\mathrm{D}} + \delta_{\mathrm{E}} \geq 1\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\delta_{\mathrm{A}} + \delta_{\mathrm{B}} - 2\delta \leq 0 \\ -\delta_{\mathrm{C}} - \delta_{\mathrm{D}} - \delta_{\mathrm{E}} + \delta \leq 0\end{gathered}$$

- Formulación

$$\begin{gathered}\delta_{\mathrm{A}} + \delta_{\mathrm{B}} - 2\delta \leq 0 \\ -\delta_{\mathrm{C}} - \delta_{\mathrm{D}} - \delta_{\mathrm{E}} + \delta \leq 0\end{gathered}$$

Formulación alternativa

$$(X_A \text{ o } X_B) \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E)$$

equivale a $[X_A \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E)] \text{ y } [X_B \rightarrow (X_C \text{ o } X_D \text{ o } X_E)]$

$$\delta_A \geq 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$
$$\delta_B \geq 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$

$$\delta_A \geq 1 \rightarrow \delta = 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$
$$\delta_B \geq 1 \rightarrow \delta = 1 \rightarrow \delta_C + \delta_D + \delta_E \geq 1$$

- Formulación:

$$X_i \leq M\delta_i$$
$$\delta_A - \delta \leq 0$$
$$\delta_B - \delta \leq 0$$
$$-\delta_C - \delta_D - \delta_E + \delta \leq 0$$
$$\delta_i \in \{0,1\}, \delta \in \{0,1\}$$

Selección del equipo de baloncesto

- Un entrenador de baloncesto tiene 9 jugadores, a los que ha evaluado de 1 a 3 de acuerdo con su manejo de pelota, tiro, rebote y defensa, según se indica en la tabla adjunta.

Jugador	Posiciones	Manejo de pelota	Tiro	Rebote	Defensa
1	Pivot	2	1	3	3
2	Base	3	3	1	2
3	Pivot, Alero	2	3	2	2
4	Alero, Base	1	3	3	1
5	Pivot, Alero	1	3	1	2
6	Alero, Base	3	1	2	3
7	Pivot, Alero	3	2	2	1
8	Pivot	2	1	3	2
9	Alero	3	3	1	3

- El equipo titular de 5 jugadores debe tener la máxima capacidad defensiva y satisfacer las siguientes condiciones:
  1. Por los menos dos jugadores deben estar en disposición de actuar de pivot, al menos dos de alero y por lo menos uno de base.
  2. Su nivel medio, tanto en el manejo de pelota como de tiro y rebote, debe ser no inferior a 2.
  3. Si juega el jugador 3, entonces el jugador 6 no puede estar en pista.
  4. Si el jugador 1 está en el equipo titular, también deberá estar el 4 ó el 5, pero en este caso no los dos a la vez. Si el jugador 1 no está en el equipo titular, 4 y 5 pueden hacerlo, si interesa.
  5. El jugador 8 ó el 9, pero no los dos a la vez, deben formar parte del equipo.
- Formular un programa lineal que facilite la selección del equipo titular.

$$\max 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + 2x_8 + 3x_9$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 5$$

$$x_1 + y_{3p} + y_{5p} + y_{7p} + x_8 \geq 2$$

$$y_{3a} + y_{4a} + y_{5a} + y_{6a} + y_{7a} + x_9 \geq 2$$

$$x_2 + y_{4b} + y_{6b} \geq 1$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 3x_9 \geq 10$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 + 3x_9 \geq 10$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_9 \geq 10$$

$$x_3 + x_6 \leq 1$$

$$x_4 + x_5 \leq 2 - x_1$$

$$x_4 + x_5 \geq x_1$$

$$x_8 + x_9 = 1$$

$$y_{3p} + y_{3a} - x_3 = 0$$

$$y_{4a} + y_{4b} - x_4 = 0$$

$$y_{5p} + y_{5a} - x_5 = 0$$

$$y_{6a} + y_{6b} - x_6 = 0$$

$$y_{7p} + y_{7a} - x_7 = 0$$

$$x_i, y_{ik} \in \{0,1\}$$

La solución resulta ser

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_8 = 1$$

y el resto 0

Productos con variables binarias

$\delta_1 \delta_2 = 0$ $\delta_i \in \{0,1\}$	$\delta_1 = 0$ o $\delta_2 = 0$	$\delta_1' + \delta_2' \geq 1$ $\delta_1 + \delta_1' = 1$ $\delta_2 + \delta_2' = 1$ $\delta_i, \delta_i' \in \{0,1\}$
$\delta_1 \delta_2$ $\delta_i \in \{0,1\}$	Reemplazar $\delta_1 \delta_2$ por δ_3 $\delta_3 = 1 \leftrightarrow \delta_1 = 1$ y $\delta_2 = 1$	$\delta_3 \leq \delta_1$ $\delta_3 \leq \delta_2$ $\delta_1 + \delta_2 \leq 1 + \delta_3$ $\delta_i \in \{0,1\}$
$x\delta$ $x \geq 0$ $\delta \in \{0,1\}$	Reemplazar $x\delta$ por y $\delta = 0 \rightarrow y = 0$ $\delta = 1 \rightarrow y = x$	$y \geq 0$ $y \leq M\delta$ $-x + y \leq 0$ $x - y + M\delta \leq M$ $x \leq M$

CONTENIDO

- ❑ CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ❑ ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- ❑ PROBLEMA DE COSTE FIJO
- ❑ PROPOSICIONES LÓGICAS
- ➢ MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- ❑ PIECEWISE LINEAR (master)
- ❑ CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- ❑ SPECIAL ORDERED SETS (master)
- ❑ REFORMULATION (master)

Mínimo o máximo de variables

$$\begin{aligned}&\min z\\&z=\max(x,y)\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&\min z\\&z\ge x\\&z\ge y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\max z\\&z=\min(x,y)\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&\max z\\&z\le x\\&z\le y\end{aligned}$$

Valor absoluto

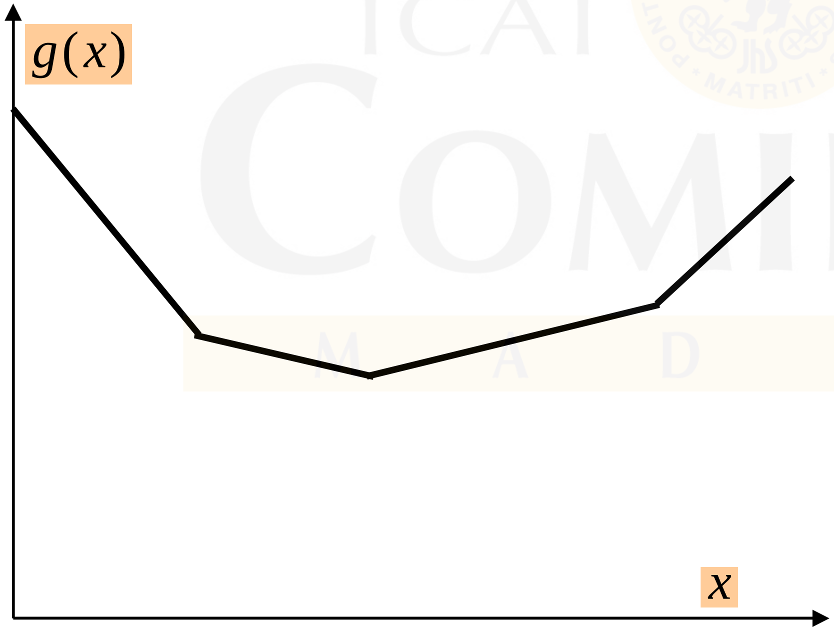
$$\boxed{z \le \left| x \right| \quad \Rightarrow \quad -x \le z \le x}$$

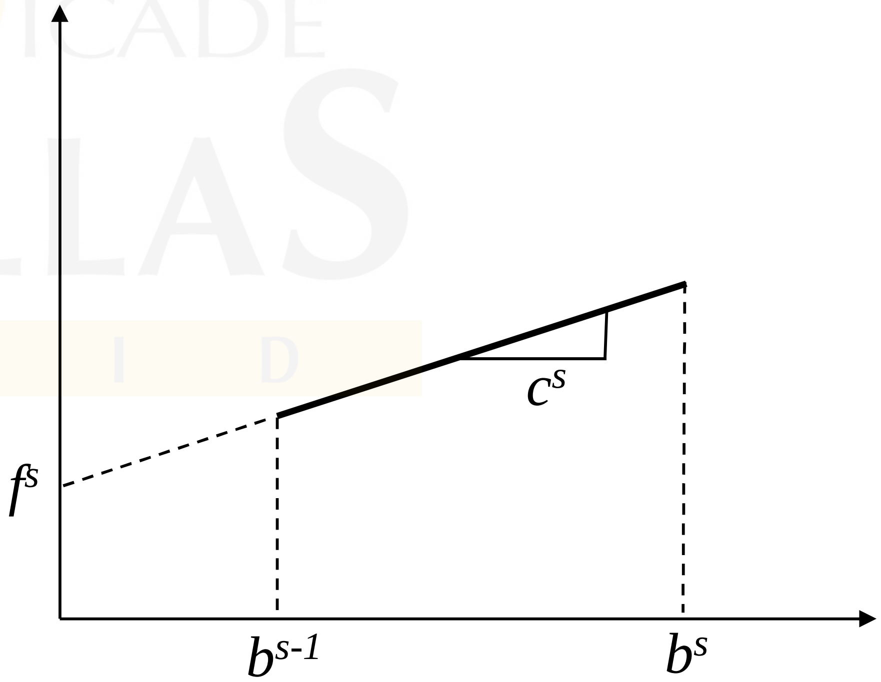
CONTENIDO

- ❑ CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ❑ ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- ❑ PROBLEMA DE COSTE FIJO
- ❑ PROPOSICIONES LÓGICAS
- ❑ MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- ➢ PIECEWISE LINEAR (master)
- ❑ CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- ❑ SPECIAL ORDERED SETS (master)
- ❑ REFORMULATION (master)

Modelado de poligonales

- La poligonal se define como un conjunto de segmentos s
- Debemos estar sobre la poligonal $g(x)$ (restricción de igualdad)
- Se supone que la abscisa del primer segmento es el origen $b^0=0$





Tres posibles modelados

- Modelados
  1. Incremental
  2. De selección múltiple
  3. De combinación convexa
- Las relajaciones LP de las tres formulaciones son equivalentes
  - ✓ Cualquier solución factible de una relajación corresponde a una solución factible de las otras con el mismo coste

Modelado incremental

- Se define z^s como la carga o uso de cada segmento
- La carga o valor total será $x = \sum_s z^s$
- El segmento s+1 tiene carga 0 a menos que el anterior esté lleno. $z^{s+1} > 0$ si y sólo si $z^s = b^s - b^{s-1}$
- Se introducen variables binarias

$$y^s = \begin{cases} 1 \text{ si } z^s > 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

- Formulación del problema como

$$g(x) = \sum_s \left(c^s z^s + \hat{f}^s y^s \right)$$

$$x = \sum_s z^s$$

$$\left(b^s - b^{s-1}\right) y^{s+1} \le z^s \le \left(b^s - b^{s-1}\right) y^s$$

$$y^s \in \{0,1\}, y^{S+1} = 0$$

siendo $\hat{f}^s = \left(f^s + c^s b^{s-1} \right) - \left(f^{s-1} + c^{s-1} b^{s-1} \right)$

la diferencia en coste en el punto de intersección de segmentos s-1 y s

Modelado de selección múltiple

- Se define z^s como la carga total si x está en dicho segmento
- La carga o valor total será $x = \sum_s z^s$
- Si la carga total cae en un segmento, para dicho segmento $z^s = x$ y para el resto $z^s = 0$
- Se introducen variables binarias

$$y^s = \begin{cases} 1 \text{ si } z^s > 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

- Formulación del problema como

$$g(x) = \sum_s \left(c^s z^s + f^s y^s \right)$$
$$x = \sum_s z^s$$
$$b^{s-1} y^s \le z^s \le b^s y^s$$
$$\sum_s y^s \le 1$$
$$y^s \in \{0,1\}$$

Modelado de combinación convexa

- Cualquier punto de segmento es combinación lineal convexa de sus extremos con pesos μ^s, λ^s
- Formulación del problema

$$g(x) = \sum_s \left[\mu^s \left(c^s b^{s-1} + f^s \right) + \lambda^s \left(c^s b^s + f^s \right) \right]$$

$$x = \sum_s \left(\mu^s b^{s-1} + \lambda^s b^s \right)$$

$$\mu^s + \lambda^s = y^s$$

$$\sum_s y^s \le 1$$

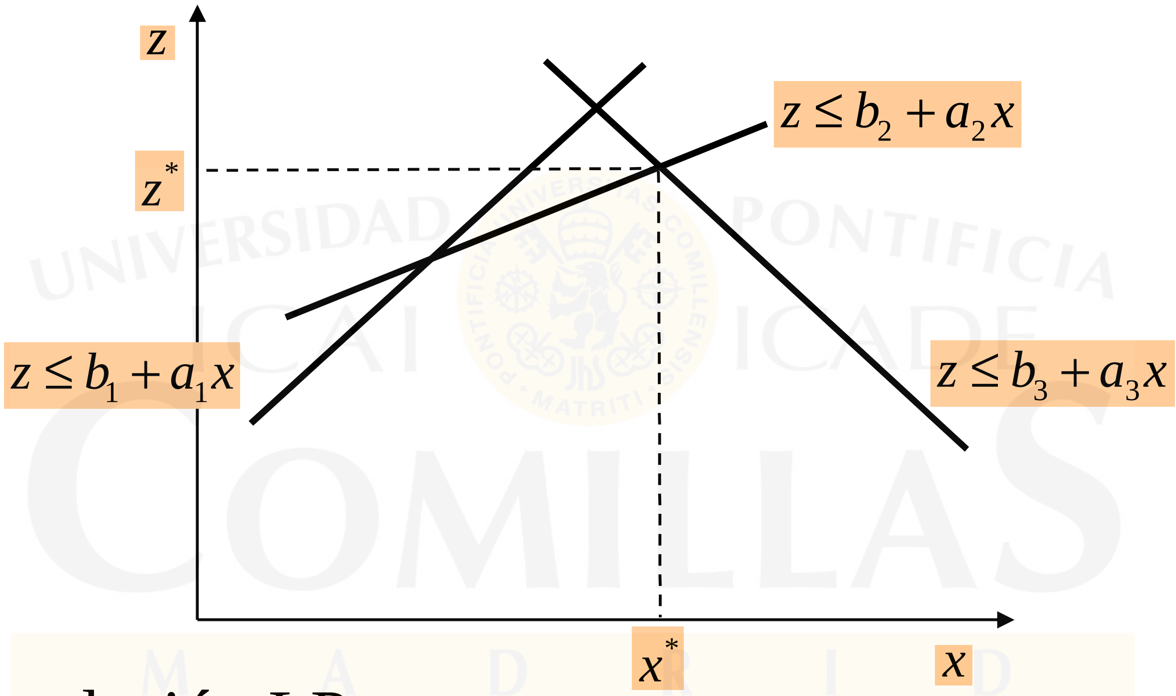
$$\mu^s, \lambda^s \ge 0, y^s \in \{0,1\}$$

CONTENIDO

- ❑ CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ❑ ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- ❑ PROBLEMA DE COSTE FIJO
- ❑ PROPOSICIONES LÓGICAS
- ❑ MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- ❑ PIECEWISE LINEAR (master)
- ➢ CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- ❑ SPECIAL ORDERED SETS (master)
- ❑ REFORMULATION (master)

Maximización de una función objetivo. Región cóncava

- Sea el problema de optimización con región factible cóncava

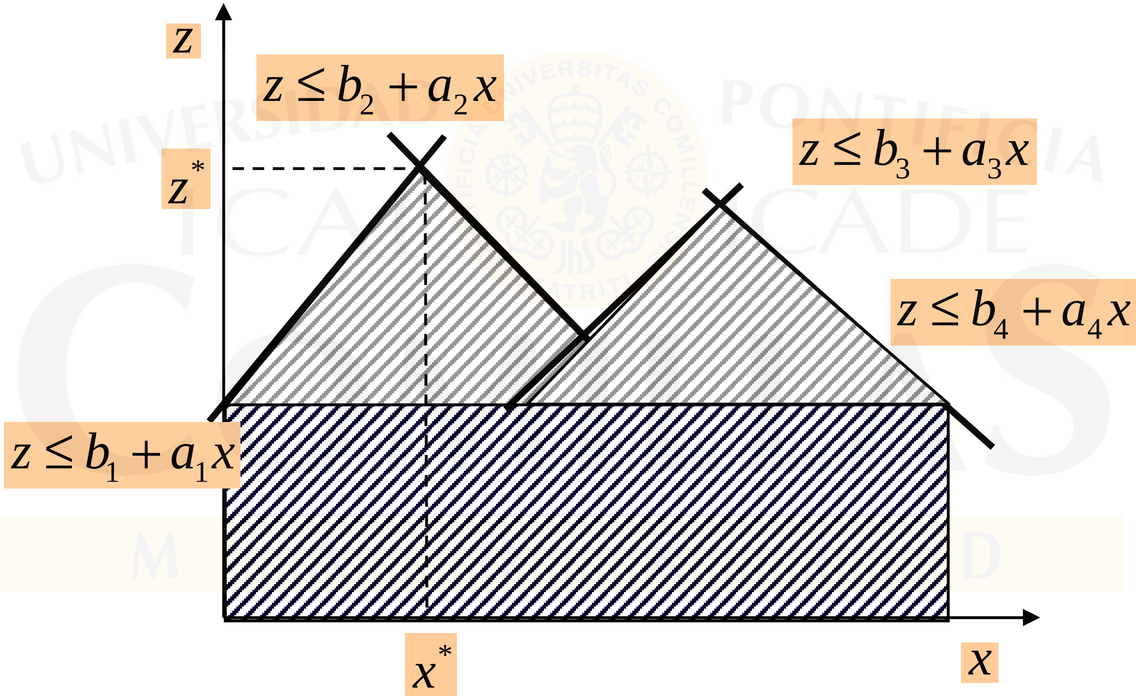


- Formulación LP

$$
\begin{aligned}
&\max z \\
&z \le b_1 + a_1 x \\
&z \le b_2 + a_2 x \\
&z \le b_3 + a_3 x \\
&x, z \ge 0
\end{aligned}
$$

Maximización de una función objetivo. Región no cóncava (i)

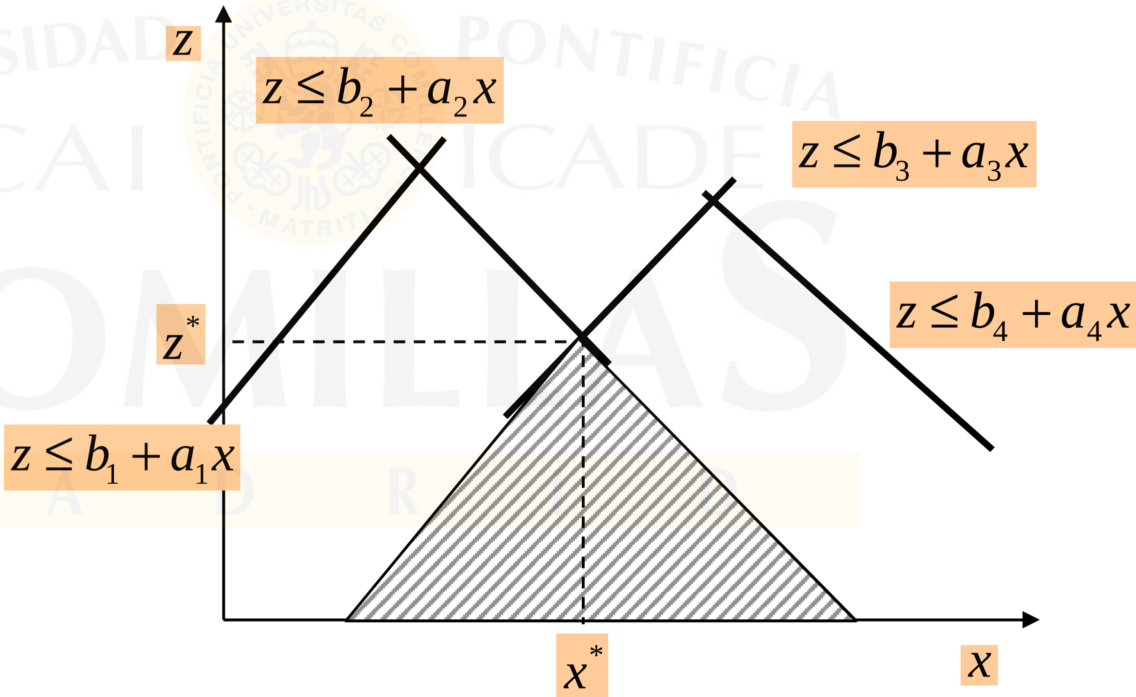
- Sea el problema de optimización con región factible no cóncava



Maximización de una función objetivo. Región no cóncava (ii)

- Formulación LP

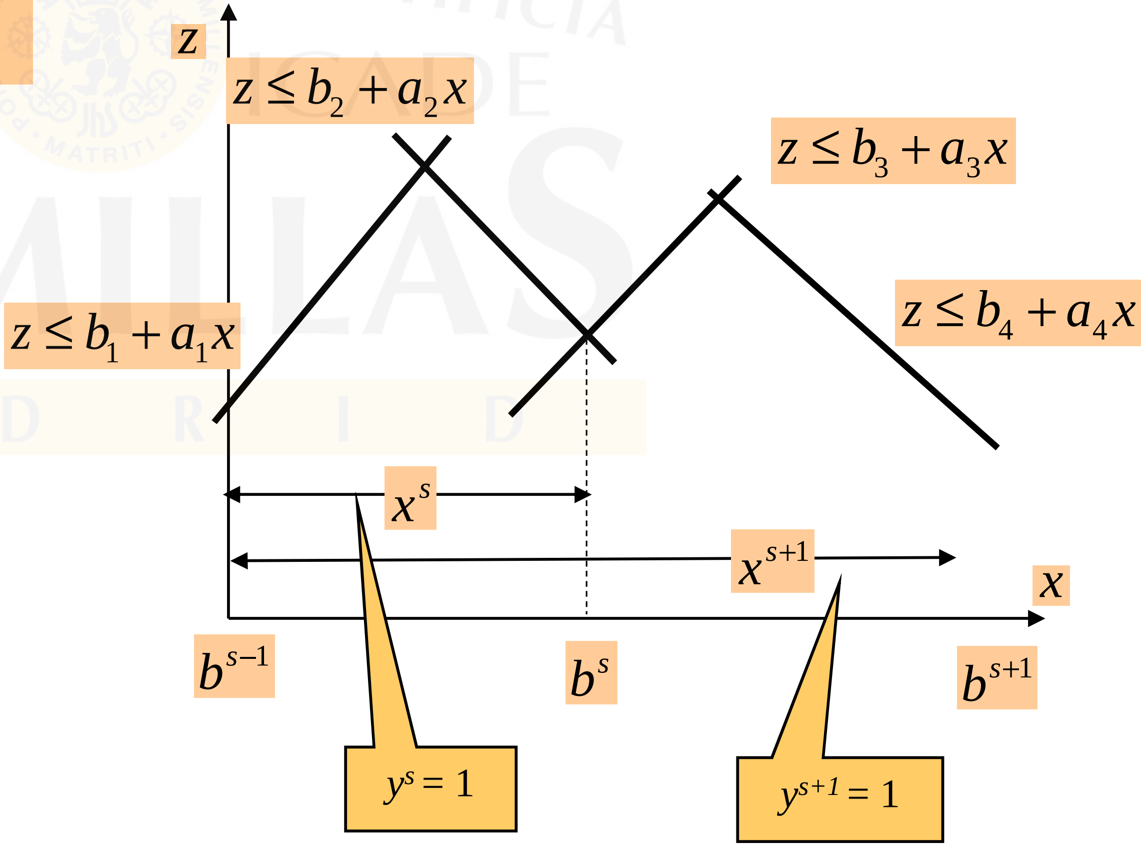
$$\max z$$
$$z \le b_1 + a_1 x$$
$$z \le b_2 + a_2 x$$
$$z \le b_3 + a_3 x$$
$$z \le b_4 + a_4 x$$
$$x, z \ge 0$$



Maximización de una función objetivo. Región no cóncava (iii)

- Se divide la región factible no cóncava en regiones factibles cóncavas y se utiliza una variable binaria (de selección múltiple) para elegir la región factible

$$y^s = \begin{cases} 1 \text{ si estamos en la región } s \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$



Maximización de una función objetivo. Región no cóncava (iv)

$$
\begin{aligned}
&\max z\\
&z \le b_1 y^s + a_1 x^s + b_3 y^{s+1} + a_3 x^{s+1}\\
&z \le b_2 y^s + a_2 x^s + b_4 y^{s+1} + a_4 x^{s+1}\\
&x = \sum_s x^s\\
&b^{s-1} y^s \le x^s \le b^s y^s \quad \forall s\\
&\sum_s y^s \le 1\\
&x, z, x^s \ge 0, y^s \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Región s

Región s+1

Para toda región

- Si estamos en s

$$y^s = 1, y^{s+1} = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\max z\\
&z \le b_1 + a_1 x^s\\
&z \le b_2 + a_2 x^s\\
&x = x^s\\
&x^{s+1} = 0\\
&b^{s-1} \le x^s \le b^s\\
&x, z, x^s \ge 0
\end{aligned}
$$

Si estamos en s+1

$$y^s = 0, y^{s+1} = 1$$

$$
\begin{aligned}
&\max z\\
&z \le b_3 + a_3 x^{s+1}\\
&z \le b_4 + a_4 x^{s+1}\\
&x = x^{s+1}\\
&x^s = 0\\
&b^s \le x^{s+1} \le b^{s+1}\\
&x, z, x^{s+1} \ge 0
\end{aligned}
$$

CONTENIDO

- ❑ CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ❑ ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- ❑ PROBLEMA DE COSTE FIJO
- ❑ PROPOSICIONES LÓGICAS
- ❑ MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- ❑ PIECEWISE LINEAR (master)
- ❑ CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- ➢ SPECIAL ORDERED SETS (master)
- ❑ REFORMULATION (master)

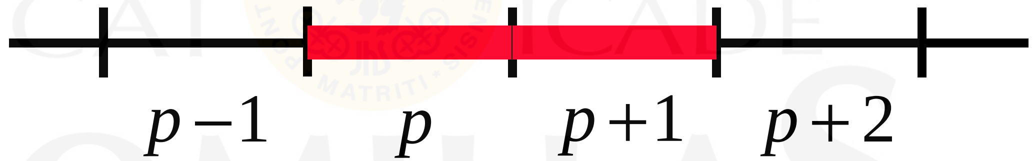
SOS1 y SOS2

- SOS1: conjunto de variables en el que una única variable debe ser diferente de 0

- SOS2: conjunto de variables en el que como mucho dos variables deben ser diferentes de 0 y deben ser consecutivas
  - ✓ Caso ejemplo: gestión del mantenimiento programado de grupos de generación

Gestión del mantenimiento programado

- **Hipótesis:**
  - ✓ Se supone que el mantenimiento de cada grupo dura un número entero de periodos.



- La gestión del mantenimiento programado involucra variables y restricciones **interperiodo**:
  - ✓ Las decisiones tomadas para un cierto periodo *p* afectan a los periodos adyacentes.

Gestión del mantenimiento programado

- **Información relevante** de cara a decidir el mantenimiento programado:
  - ✓ Duración del mantenimiento de cada grupo *t*: M_t (expresado en número de periodos). Deben ser consecutivos

Gestión del mantenimiento programado

❑ Variables de decisión interperiodo:

✓ Grupo indisponible por mantenimiento:

$$i_{pt} = \begin{cases} 1\text{: grupo } t \text{ indisponible por mantenimiento en } p \\ 0\text{:en otro caso} \end{cases}$$

✓ Puesta en marcha y parada del mantenimiento:

$$a_{pt} = \begin{cases} 1\text{: el mantenimiento del grupo } t \text{ comienza en } p \\ 0\text{: en otro caso} \end{cases}$$

$$p_{pt} = \begin{cases} 1\text{: el mantenimiento del grupo } t \text{ termina en } p \\ 0\text{: en otro caso} \end{cases}$$

Gestión del mantenimiento programado

❑ Contigüidad de los periodos de mantenimiento:

✓ Formulación 1:

$$\begin{cases} \sum_{p \le q < p+M_t} i_{qt} \ge M_t a_{pt} & \forall p,t \\ i_{p-1t} - i_{pt} + a_{pt} \ge 0 & \forall p,t \\ \sum_p a_{pt} \le 1 & \forall t \end{cases}$$

Ejemplo: se empieza el mantenimiento en p = 3 y debe durar M_t = 4 periodos: $a_{3t} = 1$

$$\sum_{3 \le q \le 6} i_{qt} = i_{3t} + i_{4t} + i_{5t} + i_{6t} \ge 4 \Rightarrow i_{3t} = i_{4t} = i_{5t} = i_{6t} = 1$$

$$i_{2t} \le a_{2t} + i_{1t} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow i_{2t} = 0$$

$$i_{3t} \le a_{3t} + i_{2t} = 1 + 0 = 1 \Rightarrow i_{3t} \le 1$$

Gestión del mantenimiento programado

❑ Contigüidad de los periodos de mantenimiento:

✓ Formulación 2:

$$\begin{cases} a_{pt} = p_{p+M_t} & \forall p,t \\ i_{p-1t} - i_{pt} + a_{pt} - p_{pt} = 0 & \forall p,t \\ \sum_p \left(a_{pt} + p_{pt} \right) \leq 2 & \forall t \end{cases}$$

Ejemplo: se empieza el mantenimiento en p = 3 y debe durar M_t = 4 periodos $a_{3t} = 1$

$$a_{3t} - p_{7t} = 0 \Rightarrow 1 - p_{7t} = 0 \Rightarrow p_{7t} = 1$$

$$i_{2t} - i_{3t} + a_{3t} - p_{3t} = 0 \Rightarrow i_{2t} - i_{3t} + 1 - 0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} i_{2t} = 0 \\ i_{3t} = 1 \end{cases}$$

CONTENIDO

- ❑ CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS
- ❑ ALGUNOS PROBLEMAS CARACTERÍSTICOS
- ❑ PROBLEMA DE COSTE FIJO
- ❑ PROPOSICIONES LÓGICAS
- ❑ MÍNIMO, MÁXIMO, VALOR ABSOLUTO
- ❑ PIECEWISE LINEAR (master)
- ❑ CONVEX AND NONCONVEX REGION (master)
- ❑ SPECIAL ORDERED SETS (master)
- ➢ REFORMULATION (master)

Reformulación

- La mayoría de problemas MIP se pueden formular de diferentes maneras
- En problemas MIP, una buena formulación es crucial para resolver el modelo
- Medida de la bondad de la formulación: intervalo de integralidad (*integrality gap*) diferencia entre f.o. de problema MIP y el relajado (LP)
- Dadas dos formulaciones equivalentes de un problema MIP, se dice que una es *más fuerte* (*mejor*) que la otra, si la región factible de su relajación lineal está estrictamente contenida en la región factible de la otra. El intervalo de integralidad es menor.

Problema de localización de una instalación (sin límites) (i)

- Elegir dónde poner instalaciones entre un conjunto de localizaciones y asignar los clientes a dichas instalaciones minimizando el coste total. Sin límites significa que no hay límite en el número de clientes asignados a una instalación.
  - ✓ Datos

    j emplazamientos, i clientes

    c_j coste de localizar en j, h_{ij} coste de satisfacer la demanda del cliente i desde j
  - ✓ Variables

    $$y_j = \begin{cases} 1 & \text{la instalación se coloca en } j \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

    x_{ij} fracción de demanda de cliente i satisfecha desde instalación en j
  - ✓ Formulación I

$$\min \sum_j c_j y_j + \sum_{ij} h_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$x_{ij} \le y_j \quad \forall ij$$

$$y_j \in \{0,1\}, x_{ij} \in [0,1]$$

Número de restricciones: $I+IJ$

Problema de localización de una instalación (sin límites) (ii)

✓ Formulación II

$$\min \sum_j c_j y_j + \sum_{ij} h_{ij} x_{ij}$$
$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$$
$$\sum_i x_{ij} \le M y_j \quad \forall j$$
$$y_j \in \{0,1\}, x_{ij} \in [0,1]$$

Número de restricciones: $I+J$

- Ambas formulaciones son MIP equivalentes. Sin embargo, la formulación I es mucho más fuerte
- Intuitivamente cuantas más restricciones peor. Esto es verdad en LP. Sin embargo, en muchos problemas MIP cuantas más restricciones mejor.

Problema de producción con coste fijo e inventario (i)

- Datos

  t periodo de tiempo

  c_t coste fijo de producción, p_t coste variable de producción, h_t coste de inventario

  d_t demanda

- Variables

  $$y_t = \begin{cases} 1 & \text{producir} \\ 0 & \text{no producir} \end{cases}$$

  x_t cantidad producida

  s_t inventario al final del periodo

- Formulación I

$$\min \sum_t \left(c_t y_t + p_t x_t + h_t s_t \right)$$

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t \quad \forall t$$

$$x_t \le M y_t \quad \forall t$$

$$s_0 = s_T = 0$$

$$x_t, s_t \ge 0, y_t \in \{0,1\}$$

Número de restricciones: $2T$

Número de variables: $3T$

Problema de producción con coste fijo e inventario (ii)

✓ Variables

$$y_t = \begin{cases} 1 \text{ producir} \\ 0 \text{ no producir} \end{cases}$$

q_{it} cantidad producida en periodo i para satisfacer la demanda en periodo $t \geq i$

✓ Formulación II

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{t} \left(p_i + h_i + h_{i+1} + \cdots + h_{t-1} \right) q_{it} + \sum_{t=1}^{T} c_t y_t$$

$$\sum_{i=1}^{t} q_{it} = d_t \quad \forall t$$

$$q_{it} \leq d_t y_i \quad \forall it$$

$$q_{it} \geq 0, y_t \in \{0,1\}$$

Número de restricciones: $T+IT$

Número de variables: $T+T^2/2$

- La formulación II es mejor. Sin embargo, tiene un mayor número de restricciones y variables.

Criterios para reformulación

- Puede ser interesante aumentar el número de variables si se puede hacer uso de ellas en la estrategia de ramificación del B&B. Por ejemplo, división "artificial" de una zona en regiones N, S, E y O para ramificar primero en estas variables zonales.

Programación diaria fuerte y compacta

- G. Morales-España, J.M. Latorre, and A. Ramos *Tight and Compact MILP Formulation of Start-Up and Shut-Down Ramping in Unit Commitment* IEEE Transactions on Power Systems 10.1109/TPWRS.2012.2222938

Andrés Ramos

http://www.iit.comillas.edu/aramos/

Andres.Ramos@comillas.edu