UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Optimización lineal entera

José María Ferrer Caja
Universidad Pontificia Comillas

Introducción

- Un problema de optimización entera se presenta cuando al menos una variable debe tomar un valor entero
- Si todas las variables deben ser enteras → PIP
- Si no todas las variables deben ser enteras → MIP

- En optimización entera se incluyen los problemas con variables binarias

- Son más difíciles de resolver que los problemas de PL
  - ✓ El conjunto factible ya no es poliédrico ni convexo
  - ✓ La función objetivo ya no es continua

Relajación lineal

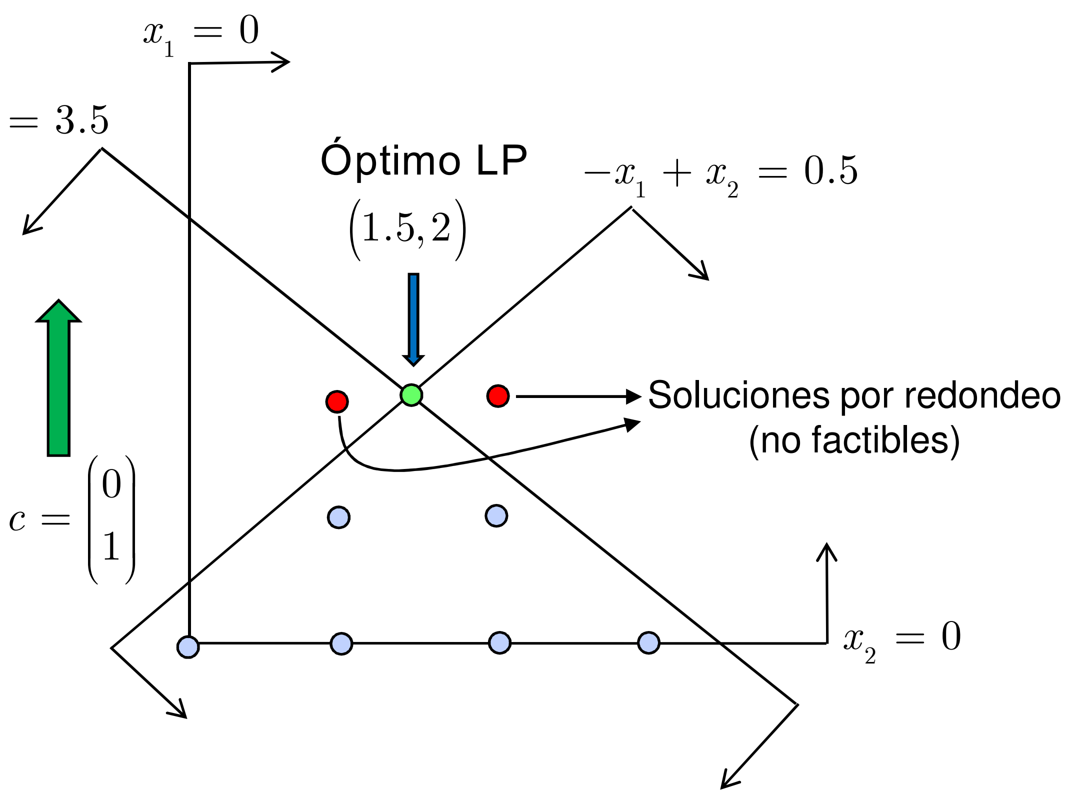
- Consiste en resolver el problema sin tener en cuenta las condiciones de integralidad de las variables
- Si la solución óptima cumple las condiciones de integralidad → solución óptima del problema entero
  - ✓ Esta situación siempre se presenta cuando la matriz de restricciones A es totalmente unimodular (toda submatriz cuadrada tiene determinante 1, 0 ó -1)
  - ✓ Cuando A es TUM los vértices del conjunto factible del problema relajado son enteros
  - ✓ Problemas de transporte, asignación, flujo con coste mínimo

Redondeo

- Redondear al punto entero más próximo la solución del problema relajado permite obtener una solución aproximada
  - ✓ Puede ser no factible
  - ✓ Puede ser no óptima
  - ✓ Sólo es interesante en variables enteras con valores muy altos

Redondeo. Ejemplo

$$\begin{aligned} &\max\ x_2 \\ &-x_1 + x_2 \le 0.5 \\ &\ \ x_1 + x_2 \le 3.5 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Método de ramificación y acotación

- Es un método de enumeración implícita
  - ✓ Compara las soluciones factibles enteras sin evaluarlas explícitamente
- Divide el problema principal en subproblemas más pequeños (ramificación)
- La mejor solución factible entera encontrada proporciona una cota para el problema (acotación)
  - ✓ Cota inferior para un problema de maximización
  - ✓ Cota superior para un problema de minimización
- Se descartan aquellas ramas en las que no se pueda mejorar la mejor solución factible entera encontrada (poda)

Algoritmo B&B para maximización (1)

1. Inicialización

   Hacer $\hat{z} = -\infty$

   Resolver el problema relajado (nodo raíz)

   ✓ Si es infactible o la solución óptima es entera ➡ FIN

2. Ramificación

   Seleccionar un nodo no explorado

   Elegir una variable entera x_j con valor óptimo no entero $x_j{}^*$

   Crear dos ramas añadiendo al nodo sendas restricciones:

   $$x_j \leq \lfloor x_j{}^* \rfloor \qquad\qquad x_j \geq \lfloor x_j{}^* \rfloor + 1$$

   Resolver los problemas con las nuevas restricciones

3. Acotación y poda

   Si la solución óptima es entera y $z > \hat{z}$ ➡

   ✓ Actualizar la cota: $\hat{z} = z$

   ✓ Eliminar todos los nodos con valor óptimo menor que $\hat{z}$

Algoritmo B&B para maximización (2)

Si la solución óptima cumple $z \leq \hat{z}$ o es infactible ⟹

✓ Descartar la rama

4. Terminación

Si no quedan nodos por explorar ⟹ FIN

✓ La solución óptima es la mejor solución entera encontrada

✓ Si no se ha encontrado ninguna solución entera, el problema es infactible

Si quedan nodos por explorar ⟹ ir a 2. Ramificación

- Cuando se introduce una restricción se aplica el algoritmo dual simplex
- Si la variable con la que se va a ramificar es binaria, su valor se fija a 0 en una rama y a 1 en la otra

Algoritmo B&B. Ejemplo (1)

$$
\begin{array}{llllll}
\max & z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 & & & & \\
x_1 & & +5x_3 & & \leq 10 \\
x_1 & +x_2 & -x_3 & & \leq 1 \\
6x_1 & -5x_2 & & & \leq 0 \\
-x_1 & & +2x_3 & -2x_4 & \leq 3 \\
x_j \geq 0 & & j = 1,\dots,4 & & \\
x_j \text{ enteras} & & j = 1,\dots,3 & &
\end{array}
$$

1. Inicialización

   $\hat{z} = -\infty$

   Se resuelve el problema relajado (nodo raíz)

   $$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1.25, 1.5, 1.75, 0); \quad z = 14.25$$

   Solución no entera

2. Ramificación

   Se selecciona el nodo raíz y la variable x_1

Algoritmo B&B. Ejemplo (2)

Nodo 1: $x_1 \leq 1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1.2, 1.8, 0); \quad z = 14.2$

Nodo 2: $x_1 \geq 2 \Rightarrow$ Problema infactible

3. Acotación y poda

   Se descarta el nodo 2 por ser el problema infactible

2. Ramificación

   Se selecciona el nodo 1 y la variable x_2

   Nodo 3: $x_2 \leq 1 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.8\overset{\frown}{3}, \overset{\frown}{1}, 1.8\overset{\frown}{3}, 0); \quad z = 14.1\overset{\frown}{6}$

   Nodo 4: $x_2 \geq 2 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0.8\overset{\frown}{3}, 2, 1.8\overset{\frown}{3}, 0); \quad z = 12.1\overset{\frown}{6}$

2. Ramificación

   Se selecciona el nodo 3 y la variable x_1

   Nodo 5: $x_1 \leq 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, 0.5); \quad z = 13.5$

   Nodo 6: $x_1 \geq 1 \Rightarrow$ Problema infactible

Algoritmo B&B. Ejemplo (3)

3. Acotación y poda

   El nodo 5 proporciona la primera solución entera

   ✓ Se actualiza la cota $\hat{z} = 13.5$

   ✓ Se descarta el nodo 4 por tener valor objetivo menor que $\hat{z}$

   Se descarta el nodo 6 por ser el problema infactible

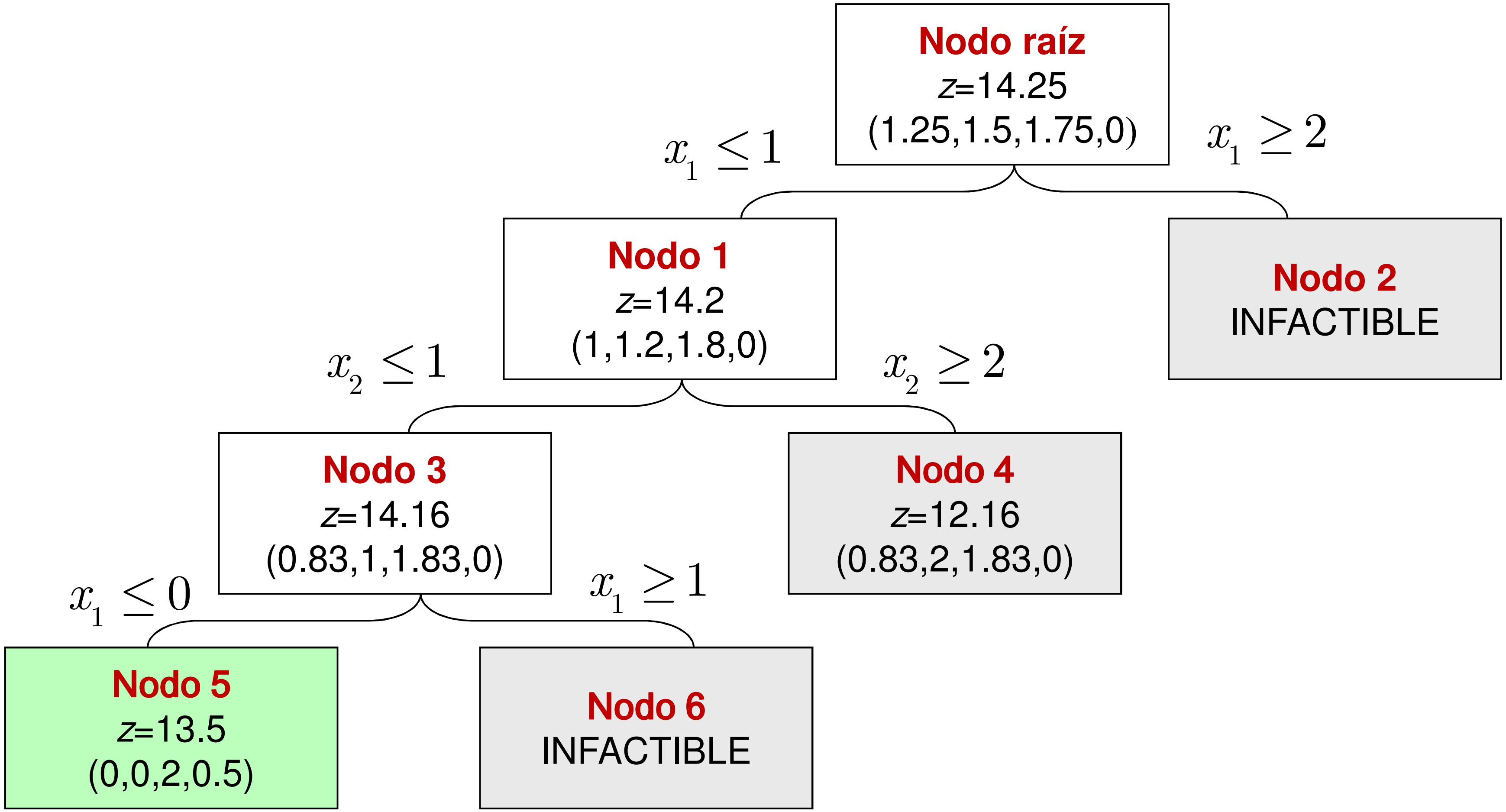
4. Terminación

   No quedan nodos sin explorar ⇨ FIN

   La solución óptima es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^* = (0, 0, 2, 0.5); \quad z^* = 13.5$$

Algoritmo B&B. Ejemplo (4)



Algoritmo B&B. Variantes

- Selección del nodo para ramificar
  - ✓ El último generado
  - ✓ El de mejor valor objetivo
- Selección de la variable para ramificar
  - ✓ La de menor índice
  - ✓ La de menor infactibilidad
  - ✓ La de mayor infactibilidad
- Relajación del criterio de poda

  Acelera el método, se descartan soluciones que no mejoren significativamente la actual
  - ✓ Descartar nodos con $\hat{z} \le z \le \hat{z}(1+\alpha)$ (tolerancia relativa α)
  - ✓ Descartar nodos con $\hat{z} \le z \le \hat{z} + \beta$ (tolerancia absoluta β)

Otras técnicas de solución

- Planos de corte
  1. Resolver el problema relajado
  2. Si es infactible o la solución óptima es entera ⟹ FIN
  3. Si no, obtener un “plano de corte” que elimine la solución óptima actual sin eliminar ninguna solución entera
  4. Introducir la nueva restricción, reoptimizar y volver a 2
- Ramificación y corte
  - ✓ Combinación de B&B y planos de corte
  - ✓ Igual que B&B pero añadiendo cortes válidos en los nodos para acelerar el proceso
- Preproceso y reformulación
  - ✓ Reescritura del problema de forma que se reduzca el conjunto factible del problema relajado
  - ✓ Eliminación y mejora de restricciones, reforzamiento de cotas, asignación de variables, etc.