UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Programación lineal entera

Método de los planos de corte
Método “branch and bound”

Método de los planos de corte, de Gomory (I)

Sea un modelo de programación lineal con n variables y m restricciones (m < n), donde las variables han de tomar valores enteros.

$$A_{m\times n}\bar{x} = \bar{b},\ x_i \geq 0, x_i \in Z$$

Al relajar la condición de que las variables sean enteras y resolver el problema de P.L. continua asociado, vamos a suponer que en la solución final las variables básicas son las m primeras. Esto supone que la matriz de restricciones adopta la forma

$$x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots\cdots + a_{1,m+n}x_{m+n} \leq B_1$$

$$x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots\cdots + a_{2,m+n}x_{m+n} \leq B_2$$

$$-------------------------------$$

$$x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{m,m+n}x_{m+n} \leq B_m$$

Método de los planos de corte, de Gomory (II)

Si todos los términos independientes son enteros hemos encontrado una solución óptima entera y el problema se ha terminado. En otro caso, la solución encontrada es infactible.

Todo número real puede descomponerse en la suma de su parte entera y su parte decimal, que es siempre positiva: R = E + D. Y recordemos que

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{D} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{E} \geq 0$$

Método de los planos de corte, de Gomory (III)

Cada coeficiente del conjunto de restricciones puede ser expresado como suma de su parte entera y su parte decimal, de forma que el conjunto de restricciones puede expresarse como

$$x_1 + \cdots\cdots\cdots + \left(e_{1,m+1} + d_{1,m+1}\right) x_{m+1} + \cdots + \left(e_{1,m+n} + d_{1,m+n}\right) x_{m+1} \le E_1 + D_1$$

$$x_2 + \cdots + \left(e_{2,m+1} + d_{2,m+1}\right) x_{m+1} + \cdots + \left(e_{2,m+n} + d_{2,m+n}\right) x_{m+n} \le E_2 + D_2$$

$$-----------------------------$$

$$x_m + \left(e_{m,m+1} + d_{m,m+1}\right) x_{m+1} + \cdots + \left(e_{m,m+n} + d_{m,m+n}\right) x_{m+n} \le E_m + D_m$$

Desigualdades que han de cumplir todas las soluciones del problema, incluidas las enteras.

Método de los planos de corte, de Gomory (IV)

Consideremos, por ejemplo, la primera restricción. La podemos expresar como

$$d_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+d_{1,m+n}x_{m+1}\leq E_1-\left(x_1+e_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+e_{1,m+n}x_{m+1}\right)+D_1$$

El lado derecho de la desigualdad es siempre positivo. Para una solución entera el paréntesis del segundo miembro es una cantidad entera y también lo será entonces

$$R=E_1-\left(x_1+e_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+e_{1,m+n}x_{m+1}\right)$$

Por tanto, para una solución entera habrá de cumplirse que

$$R=E_1-\left(x_1+e_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+e_{1,m+n}x_{m+1}\right)\geq 0$$

$$x_1+e_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+e_{1,m+n}x_{m+1}\leq E_1$$

Método de los planos de corte, de Gomory (V)

Se añade esta última restricción a la tabla final del simplex

$$x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \cdots\cdots + a_{1,m+n}x_{m+n} \le B_1$$

$$x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \cdots\cdots + a_{2,m+n}x_{m+n} \le B_2$$

$$-------------------------------$$

$$x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \cdots + a_{m,m+n}x_{m+n} \le B_m$$

$$x_1 + e_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + e_{1,m+n}x_{m+1} \le E_1$$

y se resuelve el nuevo modelo. El proceso se reitera hasta que todas las soluciones sean enteras.

Ejemplo (I)

$$Max \quad Z = 1.2x + 1.1y$$

sujeto a :

$$x + 4y \leq 22$$

$$8x + 7y \leq 53$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$x, y \text{ enteros}$$

Ejemplo (II)

a) Se resuelve el problema relajando las condiciones sobre el carácter entero de las variables. La última tabla del simplex es

$$-Z + 0 \cdot x + 0 \cdot y - \frac{0.4}{25} h_1 - \frac{3.7}{25} h_2 = -8.196$$

$$x + \cdots\cdots - \frac{7}{25} h_1 + \frac{4}{25} h_2 = 2.32$$

$$y + \frac{8}{25} h_1 - \frac{1}{25} h_2 = 4.92$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \; h_1 \geq 0, \; h_2 \geq 0$$

Pero la solución no es entera respecto a *x* e *y*.

Ejemplo (III)

Las restricciones pueden expresarse como

$$x + \cdots\cdots + \left(-1 + \frac{7}{25}\right) h_1 \quad + \quad \frac{4}{25} h_2 = 2 + 0.32$$

$$y + \quad \frac{8}{25} h_1 + \left(-1 + \frac{24}{25}\right) h_2 = 4 + 0.92$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \ h_1 \geq 0, \ h_2 \geq 0$$

Ejemplo (IV)

Cuando más de un término independiente tiene parte decimal no nula, es usual seleccionar la restricción con parte decimal mayor. En nuestro caso la segunda, que puede expresarse como

$$\frac{24}{39}h_2 = 4 - y + h_2 + 0.92$$

Como la parte izquierda de la igualdad es positiva, para una solución entera habrá de cumplirse que

$$y - h_2 \leq 4$$

Restricción que se añade a la última tabla del simplex para resolver el problema de programación lineal continua

Ejemplo (V)

$$-Z + 0 \cdot x + 0 \cdot y - \frac{0.4}{25} h_1 - \frac{3.7}{25} h_2 + 0 \cdot h_3 = -8.196$$

$$x + \cdots\cdots - \frac{7}{25} h_1 + \frac{4}{25} h_2 \qquad = 2.32$$

$$y + \frac{8}{25} h_1 - \frac{1}{25} h_2 \qquad = 4.92$$

$$y + \cdots\cdots\cdots\cdots - h_2 + h_3 = 4$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \; h_1 \geq 0, \; h_2 \geq 0, \; h_3 \geq 0$$

Ejemplo (VI)

Preparamos la tabla para la eliminación gaussiana de *y* en la última restricción

$$-Z + 0\cdot x + 0\cdot y - \frac{0.4}{25}h_1 - \frac{3.7}{25}h_2 + 0\cdot h_3 = -8.196$$

$$x + \cdots\cdots - \frac{7}{25}h_1 + \frac{4}{25}h_2 \qquad = 2.32$$

$$y + \frac{8}{25}h_1 - \frac{1}{25}h_2 \qquad = 4.92$$

$$-\frac{8}{25}h_1 - \frac{24}{25}h_2 + h_3 = -0.92$$

$$x \geq 0,\quad y \geq 0,\ h_1 \geq 0,\ h_2 \geq 0, h_3 \geq 0$$

Ejemplo (VII)

La solución encontrada no es factible pues la nueva variable de holgura es negativa. Utilizamos el simplex dual para encontrar, si la hay, una solución factible

Base	*Z*	*x*	*y*	h_1	h_2	h_3	*Cotas*	
Z	-1	0	0	$-0.4/25$	$-3.7/25$	0	-8.196	
x	0	1	0	$-7/25$	$4/25$	0	2.32	
y	0	0	1	$8/25$	$-1/25$	0	4.92	
h_3	0	0	0	$-8/25$	$-24/25$	1	-0.92	$\rightarrow$ ***sale***

Cocientes $\frac{-0.4}{-8} = 0.05$ $\frac{-3.7}{-24} = 0.154$

$\uparrow$ ***entra***

Ejemplo (VIII)

Base	*Z*	*x*	*y*	h_1	h_2	h_3	*Cotas*
Z	–1	0	0	0	–0.2	–0.05	–8.15
x	0	1	0	0	1	–0.875	3.125
y	0	0	1	0	–1	1	4
h_1	0	0	0	1	3	–3.125	2.875

La solución encontrada sigue siendo no factible pues la variable *x* no es entera.

Ejemplo (IX)

La restricción de la variable *x* que puede expresarse como

$$0.125h_3 = 3 - x - h_2 + h_3 + 0.1$$

Como la parte izquierda de la igualdad es positiva, para una solución entera habrá de cumplirse que

$$x + h_2 - h_3 \leq 4$$

Restricción que se añade a la última tabla del simplex para resolver el problema de programación lineal continua

Ejemplo (X)

$$-\boldsymbol{Z} + 0\cdot \boldsymbol{x} + 0\cdot \boldsymbol{y} - 0\cdot \boldsymbol{h}_1 - 0.2\boldsymbol{h}_2 - 0\cdot 05\boldsymbol{h}_3 + 0\cdot \boldsymbol{h}_4 = -8.15$$

$$\boldsymbol{x} + \cdots\cdots\cdots + \boldsymbol{h}_2 - 0.125\boldsymbol{h}_3 = 3.125$$

$$\boldsymbol{y} + \cdots\cdots - \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3 = 4$$

$$\boldsymbol{h}_1 + 3\boldsymbol{h}_2 - 3.125\boldsymbol{h}_3 = 2.875$$

$$\boldsymbol{x} + \cdots\cdots\cdots + \boldsymbol{h}_2 - \boldsymbol{h}_3 + \boldsymbol{h}_4 = 3$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0, \quad \boldsymbol{y} \geq 0, \ \boldsymbol{h}_1 \geq 0, \ \boldsymbol{h}_2 \geq 0, \boldsymbol{h}_3 \geq 0, \boldsymbol{h}_4 \geq 0$$

Ejemplo (XI)

Preparamos la tabla para la eliminación gaussiana de *x* en la última restricción

$$-Z + 0 \cdot x + 0 \cdot y - 0 \cdot h_1 - 0.2h_2 - 0 \cdot 05h_3 + 0 \cdot h_4 = -8.15$$

$$x + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + h_2 - 0.125h_3 = 3.125$$

$$y + \cdots\cdots\cdots\cdots - h_2 + h_3 = 4$$

$$h_1 + 3h_2 - 3.125h_3 = 2.875$$

$$-0.125h_3 + h_4 = -0.125$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ h_1 \geq 0,\ h_2 \geq 0, h_3 \geq 0, h_4 \geq 0$$

La solución encontrada no es factible pues la nueva variable de holgura es negativa. Utilizamos el simplex dual para encontrar, si la hay, una solución factible. Entra la variable *h3* en substitución de *h4*.

Ejemplo (XII)

Base	*Z*	*x*	*y*	h_1	h_2	h_3	h_4	*Cotas*
Z	-1	0	0	0	-0.2	0	-0.4	-8.1
x	0	1	0	0	1	0	-7	4
y	0	0	1	0	-1	0	8	3
h_1	0	0	0	1	3	0	-25	6
h_3	0	0	0	0	0	1	-8	1

La solución encontrada es factible. Nótese como la solución entera está muy “alejada” de la continua.

El método “Ramifica y acota” (Branch and Bound) (I)

1: Ante un problema de optimización P0:

$$\mathit{Opt} \quad Z_0 = f(\bar{x})$$

$$\textit{sujeto} \quad a:$$

$$\bar{x} \in R_0$$

se relajan las restricciones del modelo de forma que el modelo resultante se pueda resolver de manera más fácil

$$\mathit{Opt} \quad Z_1 = f(\bar{x})$$

P1 $\textit{sujeto} \quad a:$

$$\bar{x} \in R_1, \; con \quad R_0 \subset R_1$$

El método "Ramifica y acota" (Branch and Bound) (II)

2º: Si la solución óptima de P1 pertenece a R_0 hemos encontrado al mismo tiempo el óptimo de P0. Si no es así, se particiona el conjunto R_1 en dos subconjuntos disjuntos, R_2 y $\overline{R}_2$, de tal forma que el segundo de ellos contenga sólo soluciones infactibles del problema original y el primero contenga a R_0, configurando un nuevo espacio de soluciones y pasamos a resolver

$$Opt \quad Z_2 = f\left(\overline{x}\right)$$

P2: $$sujeto \quad a:$$

$$\overline{x} \in R_2, con \quad R_0 \subset R_2 \subset R_1$$

El subconjunto R_2, en muchos casos, es la unión de dos o más subconjuntos disjuntos de R_1.

El método "Ramifica y acota" (Branch and Bound) (III)

3º. Se reitera el paso 2º, de forma que, en el peor de los casos, los sucesivos espacios de soluciones convergen a $\boldsymbol{R}_0$

$$\boldsymbol{R}_0 \subset \cdots \subset \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}} \subset \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}-1} \subset \cdots \subset \boldsymbol{R}_2 \subset \boldsymbol{R}_1$$

En líneas generales, en cada fase el algoritmo selecciona uno de los subconjuntos y trata de eliminarlo de estudios posteriores como candidato a contener la solución óptima.

El método “Ramifica y acota” (Branch and Bound) (IV)

La manera de proceder a esta eliminación depende de la estructura concreta del problema analizado, aunque hay algunos criterios de carácter general . Así, si pretendemos optimizar una función de cuyos valores se conoce una cota inferior, para cada uno de los subconjuntos, todavía no eliminados, en los que en una fase está dividido el conjunto de soluciones posibles, el algoritmo calcula una cota superior de la función para los valores de las variables que correspondan a ese subconjunto: si esta cota superior es menor que la cota inferior ya calculada dicho subconjunto es descartado; en otro caso, es mantenido en la lista de posibles candidatos.

Ahora bien, si al analizar un subconjunto encontramos una solución posible que proporcione un valor de la función objetivo superior a la cota inferior inicial, ese valor se convierte en la nueva cota inferior para la solución del problema.

Se prosigue así hasta que todos los subconjuntos generados en fases sucesivas han sido analizados, bien para ser descartados, bien para mejorar soluciones previas.

El método “Ramifica y acota” (Branch and Bound) (V)

Así pues, la estructura general de esta técnica consiste en:

- **Un criterio para dividir los subconjuntos candidatos a contener la solución óptima encontrados en cada fase.**
- **El cálculo de una cota (inferior o superior) para los valores de la función en cada subconjunto candidato.**
- **Un criterio para seleccionar un subconjunto para una partición posterior.**

La herramienta es muy flexible y permite una gran capacidad de maniobra. Pero esto mismo hace que sólo la práctica sea la que permita un uso eficaz de la misma.

Aplicación del método “Ramifica y acota” a un problema de programación lineal entera

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$

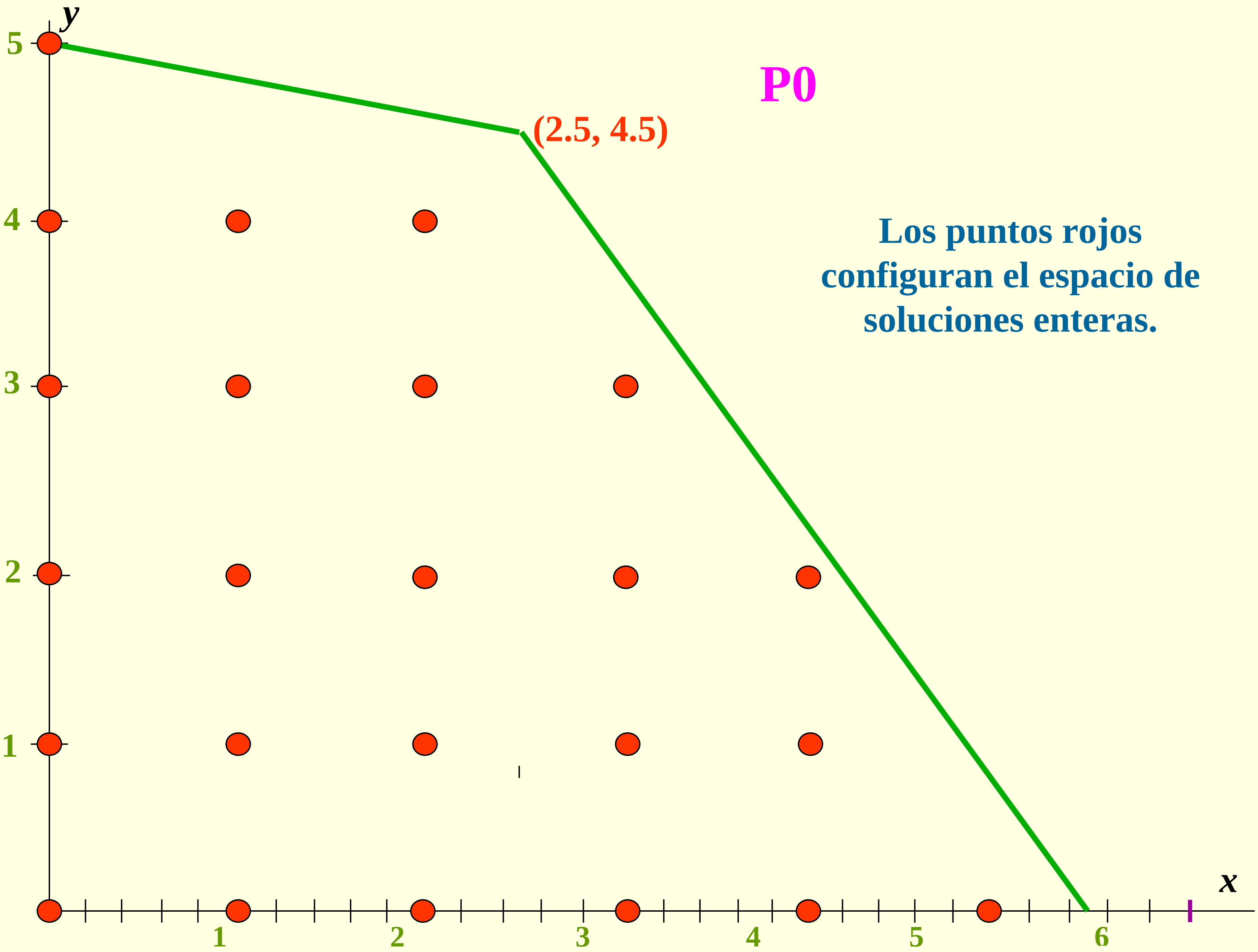
$$sujeto \quad a:$$

$$x + 5y \leq 25$$

$$9x + 6y \leq 49.5$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

$$x, y \ enteros$$



P0

Los puntos rojos configuran el espacio de soluciones enteras.

De este problema tenemos una cota inferior inicial inmediata, $Z = 0$, con $x = y = 0$.

En la etapa k tendremos disponibles una cota inferior z^* y una lista de programas linales que difieren entre sí en las cotas entre las que se encuentran las variables de decisión de cada uno de ellos.

En la etapa inicial la lista de programas contiene tan sólo el programa propuesto, relajando (es decir, "*prescindiendo de*") la condición de que las variables sean enteras. En cada iteración, la técnica se desarrollará según el procedimiento que se describe en la siguiente diapositiva.

PROCEDIMIENTO

1º: Si la lista de programas está vacía el proceso ha finalizado. En caso contrario seleccionar y estudiar uno de los programas contenidos en ella.

2º: Resolver el programa seleccionado. Si no tiene solución o si el valor óptimo de la función objetivo no es mayor que *z, *z** es la cota inferior de la etapa siguiente y volvemos al paso 1º. En otro caso, pasamos al paso 3º.**

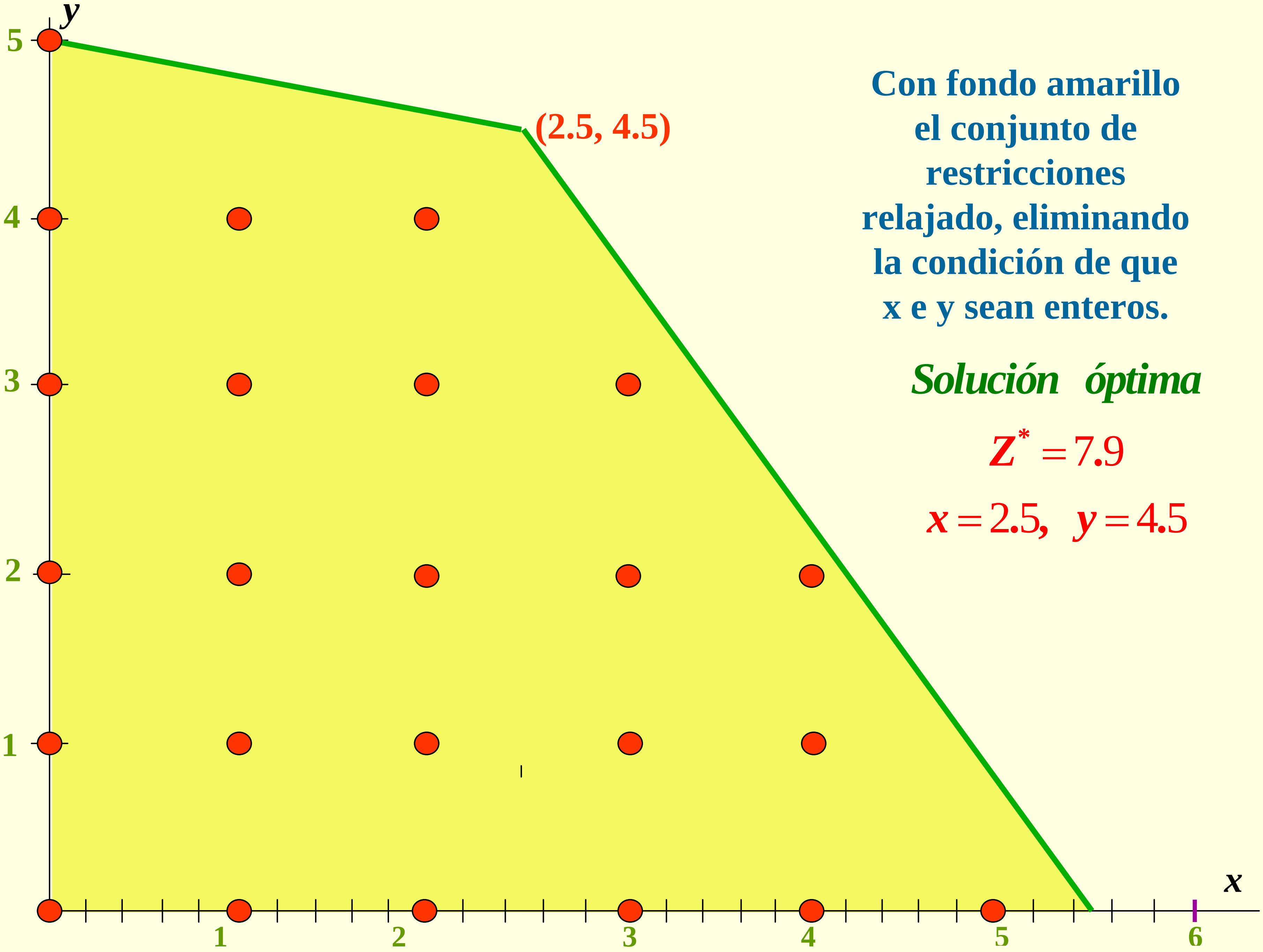
3º: Si la solución obtenida satisface el carácter entero de las variables, se retienen dichos valores, el valor de la función objetivo es la nueva cota inferior y volvemos al paso 1º. Si no es este el caso, se ejecuta paso 4º.

4º: Seleccionar una de las variables que, debiendo ser entera, no lo sea en la solución encontrada en el paso 3º. Supongamos que dicha variable es *x* y que su valor no entero es *a*. Entonces añadimos dos nuevos programas a la lista que son idénticos al programa que nos proporcionó esa solución, excepto que en uno de ellos hay una nueva restricción que establece que la cota inferior de *x* es E(*a*) + 1 y en el otro la nueva restricción establece que la cota superior de *x* es E(a). La cota inferior de *Z* se mantiene como referencia para estos dos nuevos programas.

Aplicación del método siguiendo el procedimiento descrito

1º) Resolvemos el problema P0 relajando la condición que exige que *x* e *y* sean enteros

$$\begin{aligned} &\textbf{P0:}\quad Max \quad Z = x + 1.2y \\ &\text{sujeto a:} \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{aligned}$$



Con fondo amarillo el conjunto de restricciones relajado, eliminando la condición de que x e y sean enteros.

Solución óptima

$$Z^* = 7.9$$

$$x = 2.5, \quad y = 4.5$$

2º) Se ramifica el problema P0 en dos direcciones según que $y \leq 4$ o $y \geq 5$, ya que no puede haber ninguna solución entera con $4 < y < 5$.

P0

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$

sujeto a :

$$x + 5y \leq 25$$
$$9x + 6y \leq 49.5$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Solución óptima

$$Z^* = 7.9$$
$$x = 2.5, \quad y = 4.5$$

$y \leq 4$

P2

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \leq 25$$
$$9x + 6y \leq 49.5$$
$$x \geq 0, \quad y \leq 4$$

$y \geq 5$

P1

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \leq 25$$
$$9x + 6y \leq 49.5$$
$$x \geq 0, \quad y \geq 5$$

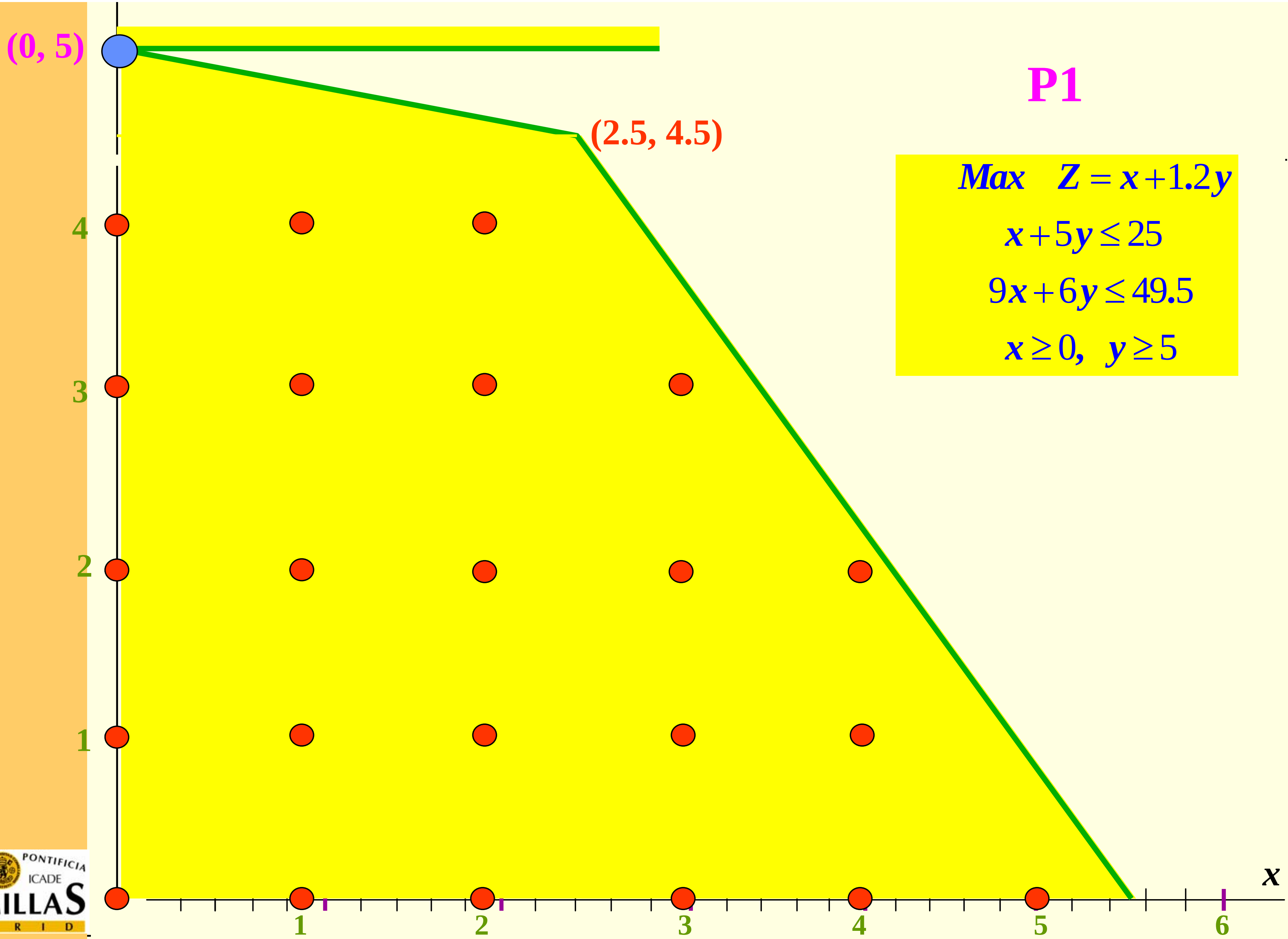
P1

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$

$$x + 5y \le 25$$

$$9x + 6y \le 49.5$$

$$x \ge 0, \quad y \ge 5$$



P0

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = x + 1.2y \\ &\text{sujeto a:} \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{aligned}$$

Solución óptima

$$Z^* = 7.9$$

$$x = 2.5, \quad y = 4.5$$

$y \le 4$

P2

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

$y \ge 5$

P1

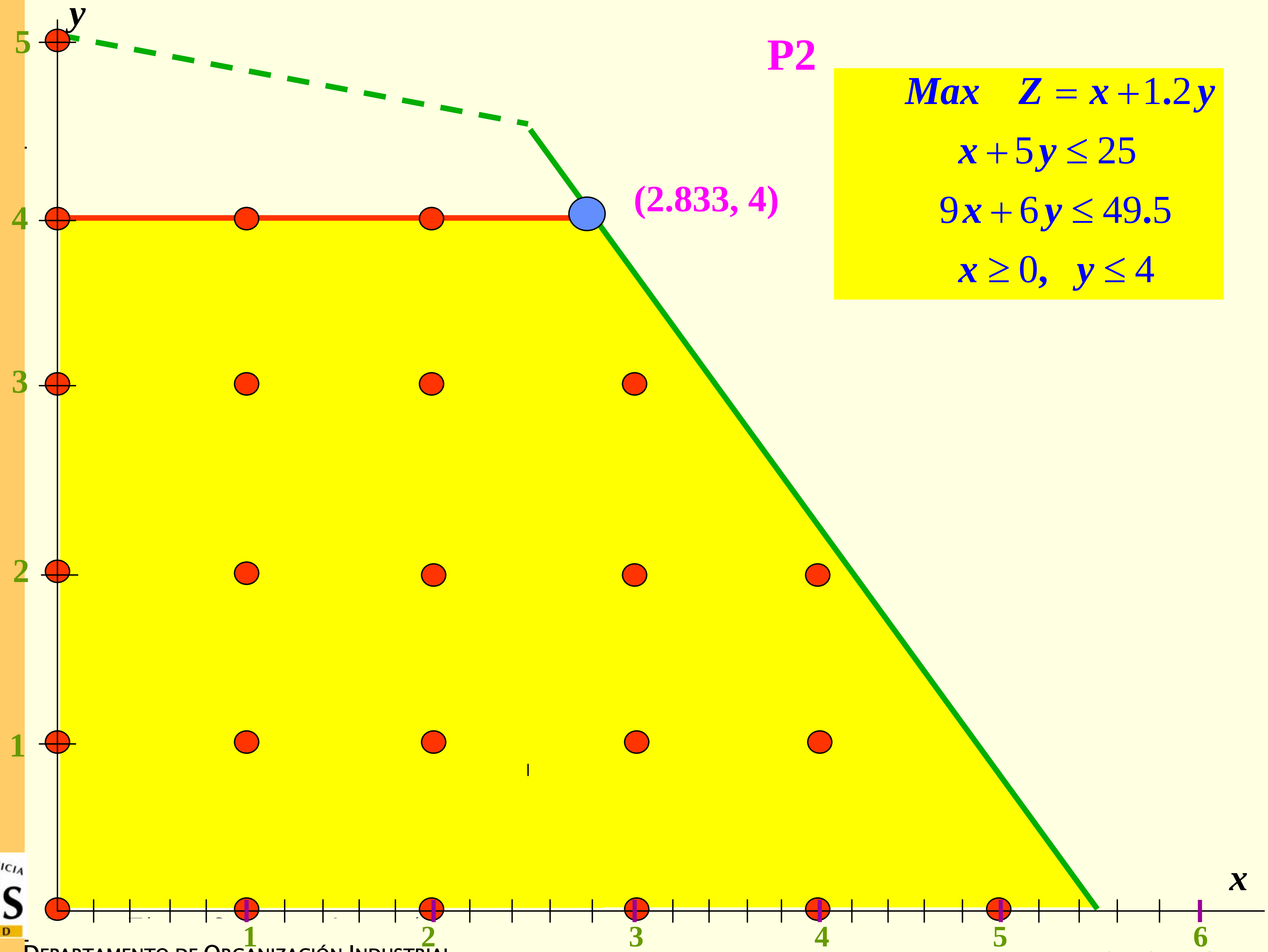
$$\begin{aligned} &Max \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \ge 5 \end{aligned}$$

Solución óptima:

$$Z^* = 6$$

$$x = 0, \quad y = 5$$

1ª Cota entera



P2

$$\boldsymbol{Max} \quad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{x} + 1.2\boldsymbol{y}$$
$$\boldsymbol{x} + 5\boldsymbol{y} \le 25$$
$$9\boldsymbol{x} + 6\boldsymbol{y} \le 49.5$$
$$\boldsymbol{x} \ge 0, \quad \boldsymbol{y} \le 4$$

P0

$$\begin{aligned} &\textbf{Max} \quad Z = x + 1.2y \\ &\textit{sujeto a:} \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{aligned}$$

Solución óptima

$Z^* = 7.9$

$x = 2.5, \quad y = 4.5$

$y \le 4$ $\qquad$ $y \ge 5$

P2

$$\begin{aligned} &\textbf{Max} \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

Solución óptima

$Z^* = 7.633$

$x = 2.833, \quad y = 4$

Solución no entera, pero superior a la cota entera encontrada. Hay que seguir ramificando.

P1

$$\begin{aligned} &\textbf{Max} \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \ge 5 \end{aligned}$$

Solución óptima

$Z^* = 6$

$x = 0, \quad y = 5$

1ª Cota entera

P0

$$\max \; Z = x + 1.2y$$

sujeto a:

$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 0, \quad y \ge 0$$

Solución óptima

$$Z^* = 7.9$$
$$x = 2.5, \quad y = 4.5$$

$y \le 4$

$y \ge 5$

P1

$$\max \; Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 0, \quad y \ge 5$$

Solución óptima

$$Z^* = 6$$
$$x = 0, \quad y = 5$$

1ª Cota entera

P2

$$\max \; Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 0, \quad y \le 4$$

$x \le 2$

$x \ge 3$

P3

$$\max \; Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \le 2, \quad y \le 4$$

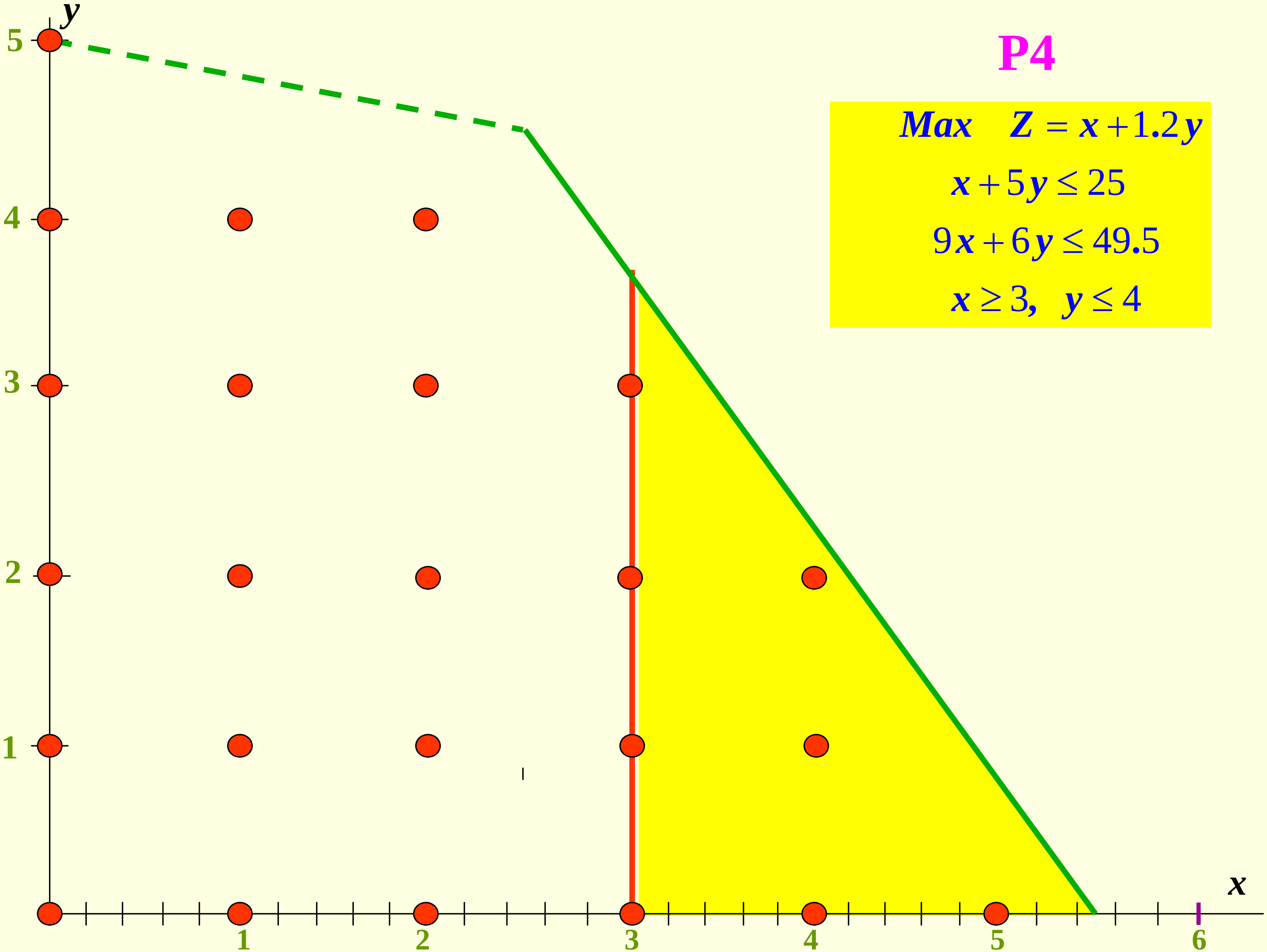
Solución óptima

$$Z^* = 6.8$$
$$x = 2, \quad y = 4$$

P4

$$\max \; Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, \quad y \le 4$$

2ª Cota entera. Mejora la 1ª. Nueva referencia



$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, \quad y \le 4$$

P0

$$\begin{aligned} &\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y \\ &\textit{sujeto a:} \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{aligned}$$

Solución óptima

$Z^* = 7.9$

$x = 2.5, \quad y = 4.5$

$y \le 4$

$y \ge 5$

P1

$$\begin{aligned} &\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \ge 5 \end{aligned}$$

Solución óptima

$Z^* = 6$

$x = 0, \quad y = 5$

1ª Cota entera

P2

$$\begin{aligned} &\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

$x \le 2$

$x \ge 3$

P3

$$\begin{aligned} &\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \le 2, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

Solución óptima

$Z^* = 6.8$

$x = 2, \quad y = 4$

P4

$$\begin{aligned} &\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 3, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

Solución óptima

$Z^* = 7.5$

$x = 3, \quad y = 3.75$

Solución no entera mejor que la 2ª cota entera obtenida. Hay que seguir ramificando

P2

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 0, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

$x \le 2$

P3

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \le 2, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

Solución óptima

$$Z^* = 6.8$$

$$x = 2, \quad y = 4$$

$x \ge 3$

P4

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 3, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

$y \le 3$

P6

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 3, \quad y \le 3 \end{aligned}$$

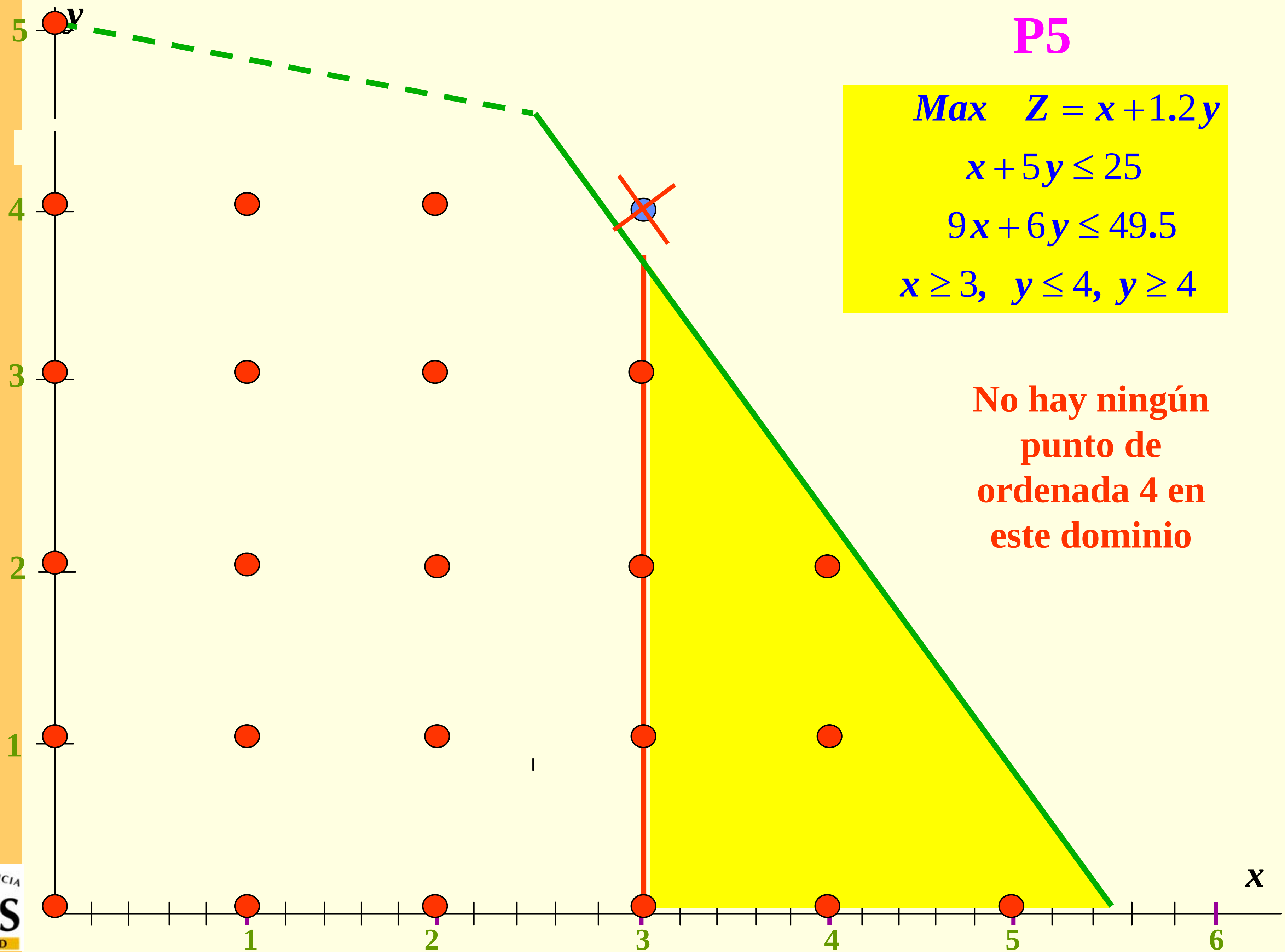
$y \ge 4$

P5

$$\begin{aligned} &Max \quad Z = x + 1.2y \\ &x + 5y \le 25 \\ &9x + 6y \le 49.5 \\ &x \ge 3, \quad y \le 4, \; y \ge 4 \end{aligned}$$

P5

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \leq 25$$
$$9x + 6y \leq 49.5$$
$$x \geq 3, \quad y \leq 4, \; y \geq 4$$



No hay ningún punto de ordenada 4 en este dominio

UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS MADRID ICAI ICADE
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

P2

$$\begin{aligned} \mathbf{Max} \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 0, \quad y &\le 4 \end{aligned}$$

$x \le 2$

P3

$$\begin{aligned} \mathbf{Max} \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \le 2, \quad y &\le 4 \end{aligned}$$

Solución óptima

$$Z^* = 6.8$$

$$x = 2, \quad y = 4$$

$x \ge 3$

P4

$$\begin{aligned} \mathbf{Max} \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, \quad y &\le 4 \end{aligned}$$

$y \le 3$

P6

$$\begin{aligned} \mathbf{Max} \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, \quad y &\le 3 \end{aligned}$$

$y \ge 4$

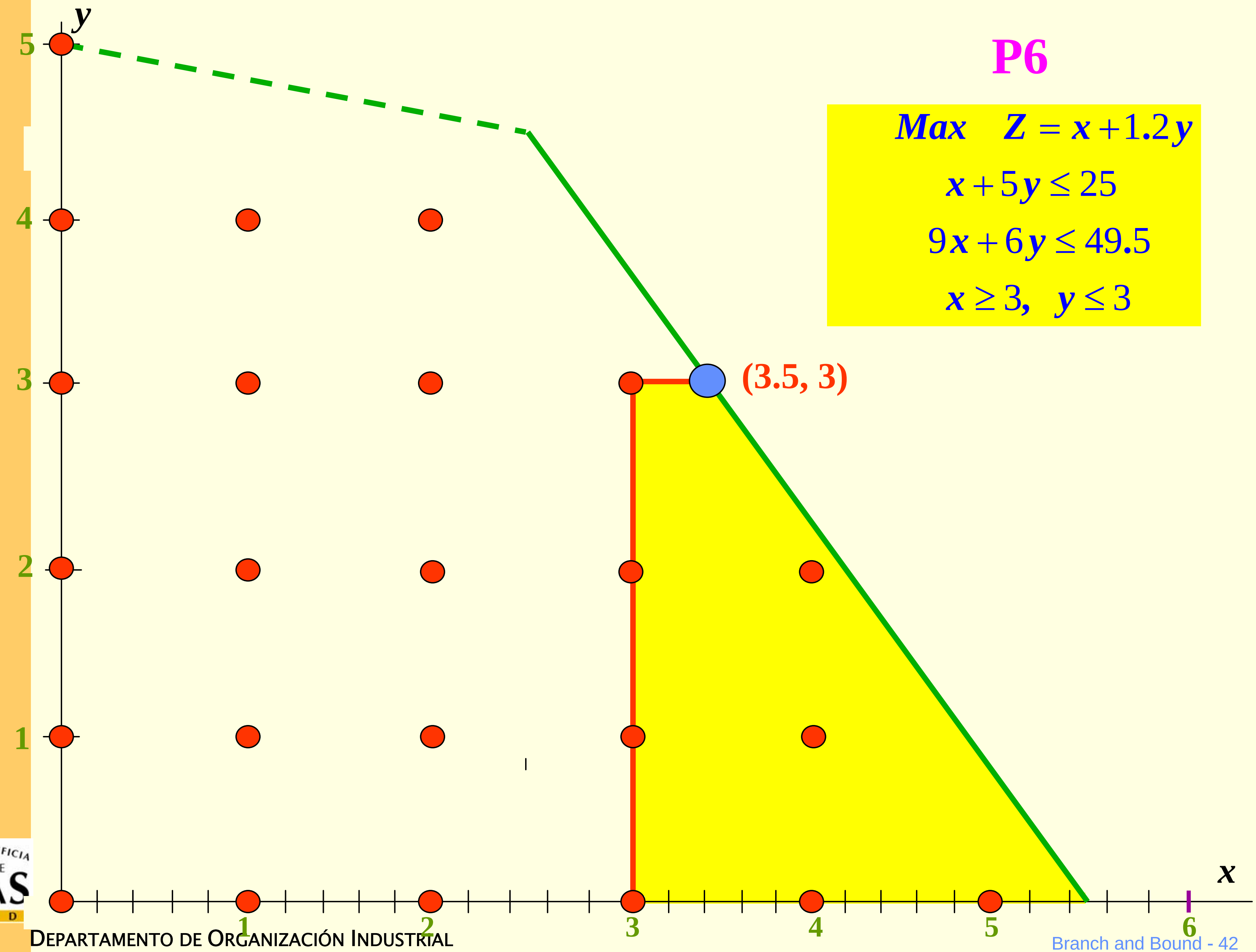
P5

$$\begin{aligned} \mathbf{Max} \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, \quad y \le 4, \quad y &\ge 4 \end{aligned}$$

Infactible

P6

$$\mathbf{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \leq 25$$
$$9x + 6y \leq 49.5$$
$$x \geq 3, \quad y \leq 3$$



P2

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 0, &\quad y \le 4 \end{aligned}$$

$x \le 2$

$x \ge 3$

P3

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \le 2, &\quad y \le 4 \end{aligned}$$

Solución óptima

$$Z^* = 6.8$$

$$x = 2, \quad y = 4$$

P4

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, &\quad y \le 4 \end{aligned}$$

$y \le 3$

$y \ge 4$

P6

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, &\quad y \le 3 \end{aligned}$$

Solución óptima

$$Z^* = 7.1$$

$$x = 3.5, \quad y = 3$$

P5

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, &\quad y \le 4, \quad y \ge 4 \end{aligned}$$

Infactible

Solución no entera mejor que la 2ª cota entera obtenida. Hay que seguir ramificando

P2

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 0&, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

$x \le 2$ $\qquad$ $x \ge 3$

P3

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \le 2&, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

P4

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3&, \quad y \le 4 \end{aligned}$$

Solución óptima

$Z^* = 6.8$

$x = 2, \quad y = 4$

$y \le 3$ $\qquad$ $y \ge 4$

P6

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3&, \quad y \le 3 \end{aligned}$$

P5

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3&, \quad y \le 4, \; y \ge 4 \end{aligned}$$

Infactible

$x \le 3$ $\qquad$ $x \ge 4$

P7

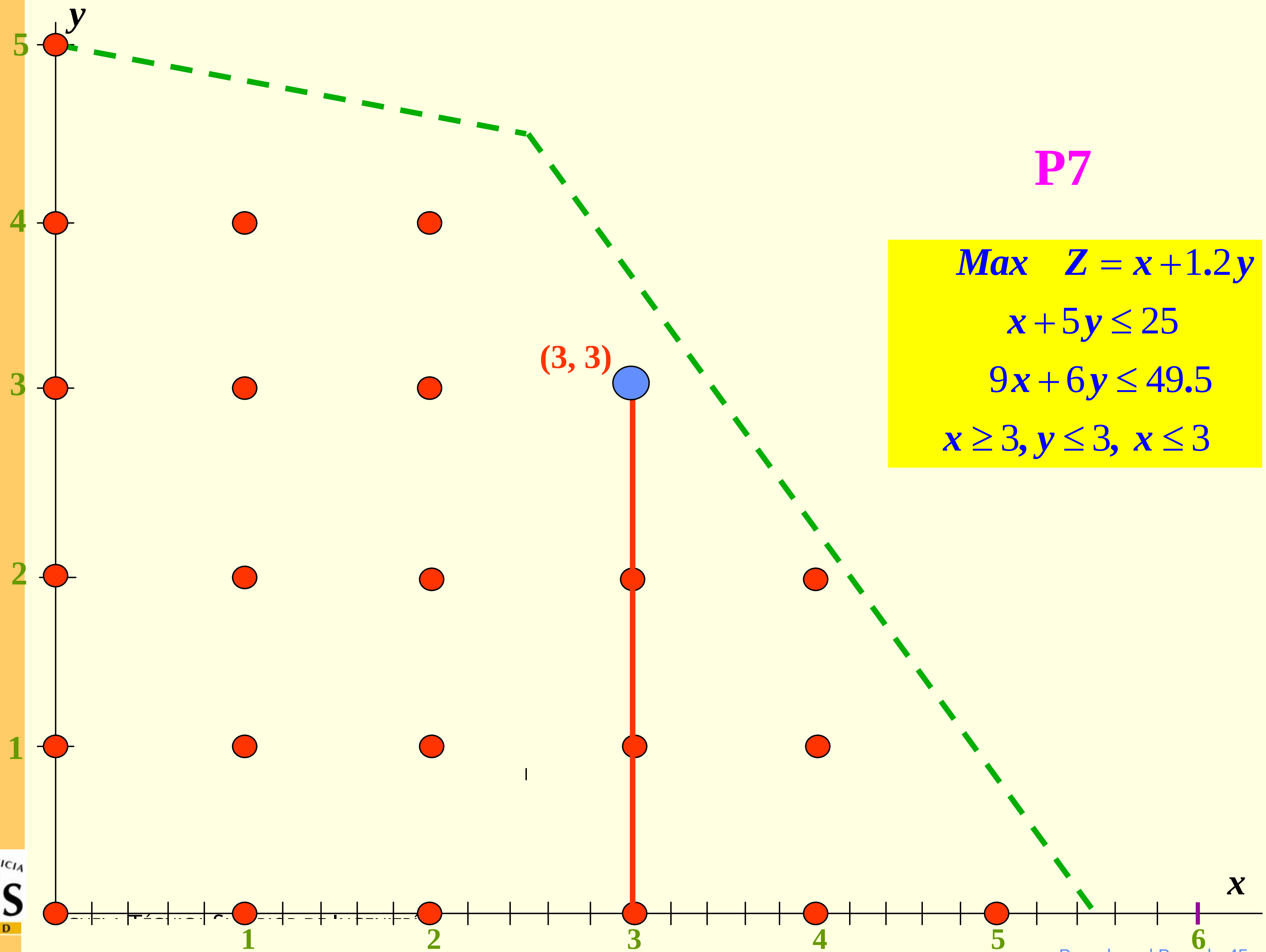
$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3&, \; y \le 3, \; x \le 3 \end{aligned}$$

P8

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 4&, \quad y \le 3 \end{aligned}$$

P7

$$\textbf{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3,\ y \le 3,\ x \le 3$$



P2

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 0, \quad y \le 4$$

$x \le 2$

$x \ge 3$

P3

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \le 2, \quad y \le 4$$

Solución óptima

$Z^* = 6.8$

$x = 2, \quad y = 4$

P4

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, \quad y \le 4$$

$y \le 3$

$y \ge 4$

P6

$$Max \quad Z = x + 1.2y\,y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, \quad y \le 3$$

P5

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, \quad y \le 4, \; y \ge 4$$

Infactible

Solución entera peor que P3

$x \le 3$

$x \ge 4$

P7

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, y \le 3, \; x \le 3$$

Solución óptima

$Z^* = 6.6$

$x = 3, \quad y = 3$

P8

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 4, \quad y \le 3$$

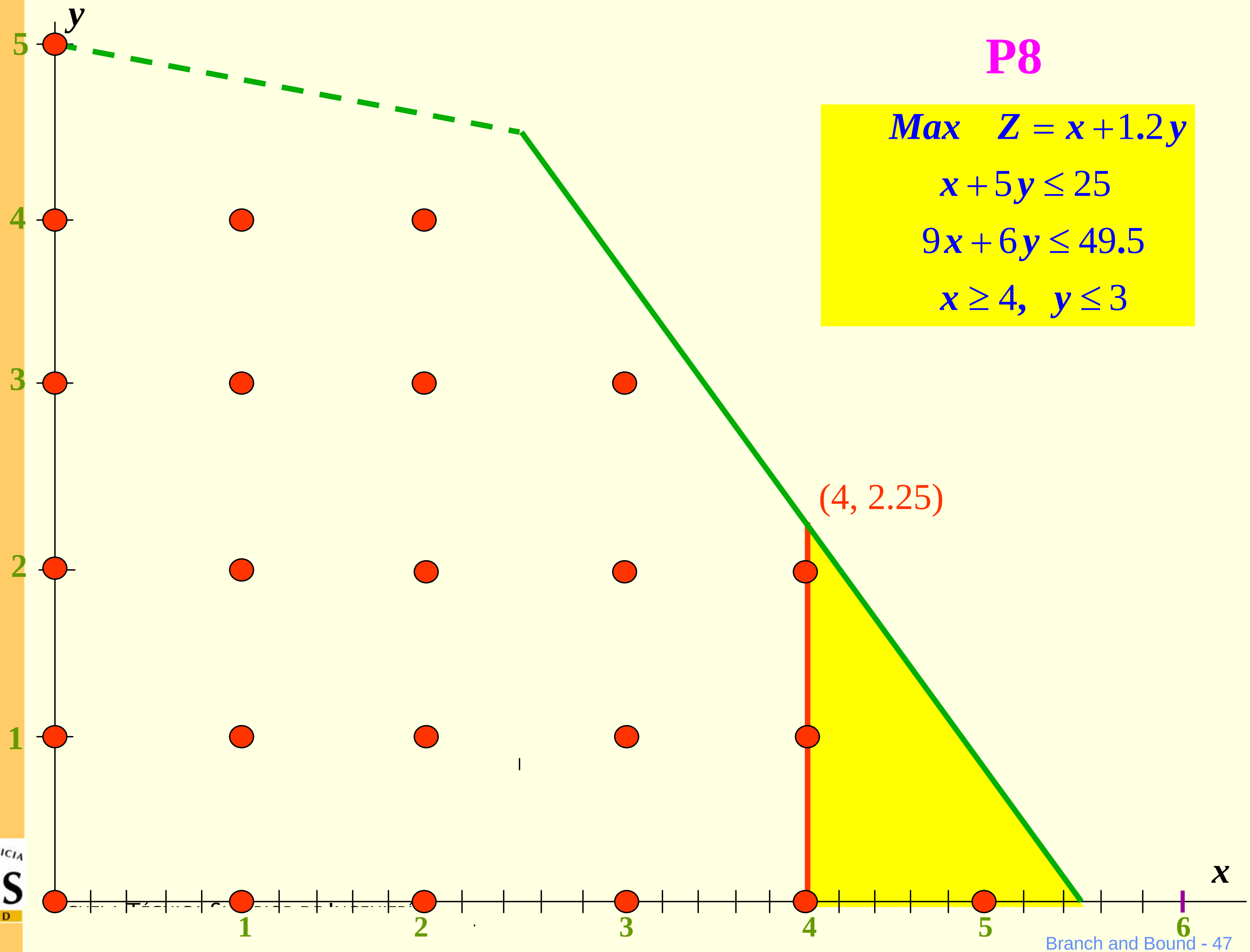
P8

$$Max \quad Z = x + 1.2y$$

$$x + 5y \leq 25$$

$$9x + 6y \leq 49.5$$

$$x \geq 4, \quad y \leq 3$$



P2

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 0, \quad y &\le 4 \end{aligned}$$

$x \le 2$

P3

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \le 2, \quad y &\le 4 \end{aligned}$$

Solución óptima

$$Z^* = 6.8$$

$$x = 2, \quad y = 4$$

$x \ge 3$

P4

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, \quad y &\le 4 \end{aligned}$$

$y \le 3$

P6

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y\,y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, \quad y &\le 3 \end{aligned}$$

$x \le 3$

P7

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, y \le 3, \; x &\le 3 \end{aligned}$$

Solución entera peor que P3

$x \ge 4$

P8

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 4, \quad y &\le 3 \end{aligned}$$

No entera y peor que P3: Se poda la rama

$y \ge 4$

P5

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \ge 3, \quad y \le 4, \; y &\ge 4 \end{aligned}$$

Infactible

Solución óptima

$$Z^* = 6.7$$

$$x = 4, \quad y = 2.25$$

Finalizado el proceso de ramificación y poda, la solución óptima entera corresponde al subprograma P3:

$$\begin{aligned} Max \quad Z &= x + 1.2y \\ x + 5y &\le 25 \\ 9x + 6y &\le 49.5 \\ x \le 2, &\quad y \le 4 \end{aligned}$$

La solución óptima es

$$Z^* = 6.8$$

$$x = 2, \quad y = 4$$

Resumen

P0

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$

sujeto a :

$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 0, \quad y \ge 0$$

$Z^* = 7.9$

$x = 2.5, \quad y = 4.5$

$y \ge 5$

P1

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 0, \quad y \ge 5$$

$Z^* = 6$

$x = 0, \quad y = 5$

1ª Cota entera

$y \le 4$

P2

$Z^* = 7.633$

$x = 2.833, \quad y = 4$

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 0, \quad y \le 4$$

$x \le 2$

P3

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \le 2, \quad y \le 4$$

Solución óptima

$Z^* = 6.8$

$x = 2, \quad y = 4$

2ª Cota entera. Mejora la 1ª. Nueva referencia

$x \ge 3$

P4

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, \quad y \le 4$$

$Z^* = 7.5$

$x = 3, \quad y = 3.75$

$y \ge 4$

P5

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, \quad y \le 4, \ y \ge 4$$

Infactible

$y \le 3$

P6

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, \quad y \le 3$$

$Z^* = 7.1$

$x = 3.5, \quad y = 3$

$x \le 3$

P7

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 3, y \le 3, \ x \le 3$$

$Z^* = 6.6$

$x = 3, \quad y = 3$

$x \ge 4$

P8

$$\textit{Max} \quad Z = x + 1.2y$$
$$x + 5y \le 25$$
$$9x + 6y \le 49.5$$
$$x \ge 4, \quad y \le 3$$

$Z^* = 6.7$

$x = 4, \quad y = 2.25$