Decisión multicriterio

Problemas económicos

- Cuando sólo hay un criterio, se puede decir que la decisión es un problema tecnológico, no hay que elegir nada, sólo buscar
- Cuando hay varios criterios, la decisión se convierte en un problema económico, aquí ya si hay un problema real de elección.

La teoría de la decisión multicriterio

- Tiene una componente subjetiva (igual que el resto de la teoría de la decisión)
- Pero es más realista que la decisión clásica
- Ayuda a formalizar los problemas complejos de decisión, y a tomar decisiones más coherentes

Formulación general

$$\text{Opt } z = (z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x))$$

$$x \in F$$

Concepto de solución

- Una solución puede ser óptima bajo un criterio, pero no bajo otro
- OPTIMALIDAD PARETIANA
  - Una solución es un óptimo de Pareto si una mejora en uno de los criterios siempre supone un empeoramiento en alguno de los demás
  - También se llaman soluciones eficientes o no dominadas

Tasa de intercambio

- Cantidad de logro que hay que sacrificar para conseguir a cambio un incremento unitario de otro criterio

$$T_{jk} = \frac{f_j(x^1) - f_j(x^2)}{f_k(x^1) - f_k(x^2)}$$

- Tiene un doble interés dentro de multicriterio
  - índice para medir el coste de oportunidad
  - parámetro para interactuar con el decisor

- También se llaman “trade-offs”

Conceptos básicos

- Atributo: "valor" observado (medido) de una decisión independientemente del decisor
- Objetivo: dirección de mejora de un atributo (max. o min. si es numérico; si no hay que establecer previamente preferencias)
- Nivel de aspiración: nivel aceptable de logro para un atributo
- Meta: Combinación de un atributo con su nivel de aspiración
- Criterio: atributos, objetivos o metas relevantes en un problema de decisión

Un ejemplo

Marca	**Modelo**	**Versión**	**Cons.**	**Precio**	**Vel.**	**Acel.**	**Capac.**	**Segur.**
Audi	A4	1.9Tdi	5,6	29738	204	10,1	454	88
Ford	Focus	1.8TDci	5,5	18760	196	11	520	74
Ford	Mondeo	2.0Tdci	6	23498	200	9,9	540	79
Opel	Astra	2.0Dti	5,9	17618	183	12,5	480	74
Skoda	Octavia	1.9Tdi	5	20308	191	11,2	548	74
Toyota	Avensis	2.0D4-D	5,9	21000	190	11,6	530	75
Volkswagen	Golf	1.9Tdi	5,4	23259	205	10,5	460	74
Volkswagen	Passat	1.9Tdi	5,8	26577	201	10,2	495	82
Volvo	V40	1.9D+	5,4	23848	195	10,5	413	76

Tipos de enfoque

- Básicamente depende de las posibilidades de elección:
  - Conjunto continuo de alternativas
    - Optimización
      - Programación multiobjetivo (MOP)
      - Programación compromiso (CP)
    - Satisfacción
      - Programación por metas (GP)
  - Conjunto discreto de alternativas
    - Teoría de la utilidad multiatributo (MAUT)
    - Proceso analítico jerárquico (AHP)
    - Métodos de sobreclasificación (Electre, Promethee)

Programación multiobjetivo

- Pretende establecer el conjunto de soluciones eficientes
- No incorpora las preferencias del decisor
- El conjunto eficiente puede ser:
  - finito
  - continuo
- La pendiente de la curva eficiente representa la tasa de intercambio

Matriz de pagos (I)

- Primera aproximación al problema
- Sirve para evaluar el nivel de conflicto
  - Puede permitir eliminar objetivos

- Procedimiento
  - Optimizar cada objetivo por separado
  - Calcular los valores del resto de objetivos para esta solución óptima

Matriz de pagos (II)

- Información de interés
  - Punto ideal: valores óptimos factibles para cada objetivo. Son los valores de la diagonal principal. Es un punto inalcanzable.
  - Punto anti-ideal (nadir): valores pésimos
- Estos dos puntos definen el rango de variación de los atributos. Sirve para:
  - buscar el conjunto eficiente
  - interactuar con el decisor
  - ponderar atributos
  - normalizar

Generación del conj. eficiente

- No siempre es necesario
- Hay varios métodos
  - Restricciones (ε-restricciones)
  - Ponderaciones
  - Non-inferior set estimation (NISE)
  - Simplex multicriterio

Método de las restricciones

- Marglin, 1967
- Procedimiento
  - Se optimiza uno de los objetivos independientemente
  - El resto se incorpora como restricciones paramétricas
    - los valores de los parámetros son los comprendidos entre el valor ideal y el anti-ideal
  - Para cada conjunto de valores de los parámetros, se genera un punto eficiente (extremo o interior)
- Puede haber casos en que las soluciones obtenidas no sean eficientes

Método de las ponderaciones

- Zadeh, 1963
- Procedimiento
  - Se optimiza la suma ponderada de las funciones objetivo
  - Las ponderaciones deben ser no negativas
  - Para cada conjunto de pesos, se genera un punto eficiente (extremo)
- Puede haber casos en que las soluciones obtenidas no sean eficientes
- Los pesos no tienen nada que ver con las preferencias del decisor

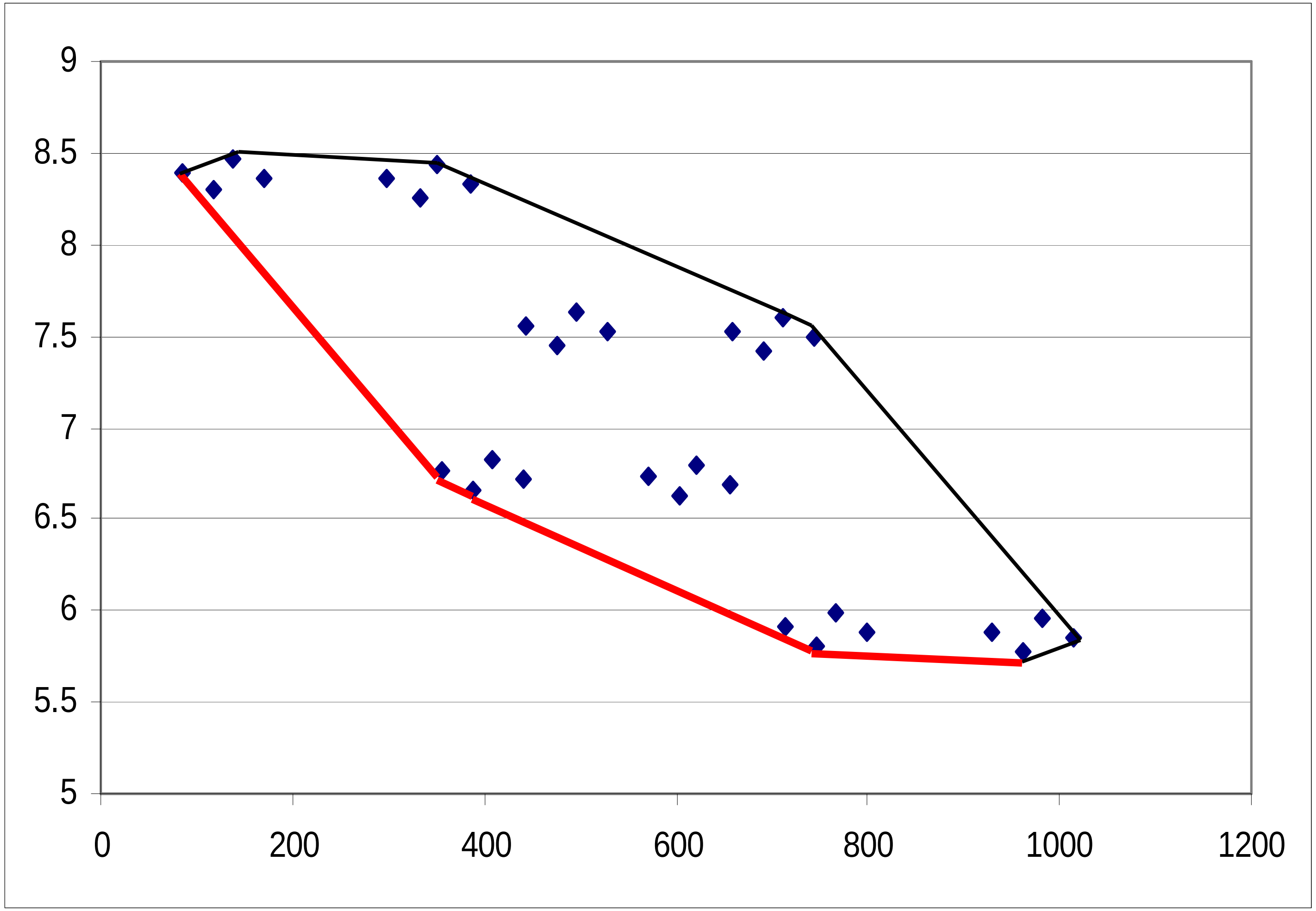
Un ejemplo

- Planificación eléctrica

$$
\begin{aligned}
&Opt(\text{coste,emisiones})\\
&\text{st}\\
&\text{nuclear} \leq 53000\\
&\text{gas} \leq 12845\\
&\text{eolica} \leq 5000\\
&\text{biomasa} \leq 40000\\
&\text{hidraulica} \leq 31755\\
&\text{demanda} \geq 150000
\end{aligned}
$$

Combustible	Coste (ptas/kWh)	Emisiones CO_2 (g/kWh)
Carbón	5.85	1015
Nuclear	8.24	
Gas natural	5	401
Eólica	9	
Biomasa	12	
Hidráulica	6	

Región factible: puntos extremos



Inconvenientes de la MOP

- Cuando hay muchos objetivos, la información es excesiva para los decisores
  - Se tienden a ignorar los objetivos menos importantes, y a tratar incoherentemente el resto
- En casi todos los casos, la información del conjunto eficiente es excesiva
- El coste computacional es alto

Solución

- Incorporar las preferencias del decisor para reducir el conjunto eficiente
  - Métodos interactivos
  - Programación compromiso
  - Programación por metas

Programación compromiso

- Trata de encontrar, dentro del conjunto eficiente, las soluciones que mejor se adaptan a las preferencias del decisor
- Para ello, se basa en el **Axioma de Zeleny**:

  Dadas dos soluciones posibles, la preferida será la más cercana al punto ideal

- Estas soluciones se llaman "soluciones compromiso", y su conjunto "conjunto compromiso"

Distancia al punto ideal

- Para cada atributo, se puede definir un grado de proximidad

$$d_j = \left| f_j^* - f_j(x) \right|$$

- Pero tenemos varios atributos: hay que agregarlos de alguna forma. Esto implica:
  - Normalizar
  - Agregar

Normalización

- Necesaria para expresar todos los atributos en una unidad similar
- Incluso aunque ya estén en las mismas unidades, la normalización evita sesgos
  - Cuando no se normaliza se favorecen implícitamente los objetivos que pueden alcanzar mayores valores
  - Veamos un ejemplo: normalizacion.xls
  - Evidentemente, a veces la normalización no tiene sentido

Una posible normalización

$$d_j = \frac{f_j^* - f_j(x)}{f_j^* - f_{j*}}$$

•Esta normalización produce magnitudes adimensionales, entre 0 y 1

•Tiene una interpretación en el campo de la lógica borrosa, como grados de pertenencia a un conjunto

Ideales y anti-ideales

- Para calcular el ideal de un atributo:
  - Se optimiza el problema bajo ese único atributo
- Para calcular el anti-ideal (o Nadir):
  - Hay que encontrar el anti-ideal **del conjunto eficiente**, pero
  - El anti-ideal de la matriz de pagos no tiene por qué coincidir con el del conjunto eficiente
  - Así que a veces hay que usar otros métodos (heurísticos)

Agregación de atributos

- Hay que tener en cuenta dos aspectos
  - Ponderación
  - Métrica (Distancia) a utilizar

Ponderación

$$d_j = W_j \frac{f_j^* - f_j(x)}{f_j^* - f_{j*}}$$

Distancias (I)

- Concepto generalizado de distancia

$$L_p = \left[\sum_{j=1}^{n} \left| x_j^1 - x_j^2 \right|^p \right]^{1/p}$$

- Para cada valor de p, tendremos distintas métricas o distancias

Distancias (II)

- p=1: Distancia Manhattan (la más larga)

$$L_1 = \sum_{j=1}^{n} \left| x_j^1 - x_j^2 \right|$$

- p=∞: Distancia Tchebycheff (la más corta)

$$L_\infty = Max_j \left[\left| x_j^1 - x_j^2 \right| \right]$$

- En realidad, a partir de p=2 ya no tienen significado geométrico, pero sí como surrogado de nuestras preferencias

Conjunto compromiso

- Conjunto de soluciones más cercanas al punto ideal
- En condiciones normales, está acotado por L_1 y L_∞
- Esto nos permite calcular sólo estas métricas, que además son las únicas lineales

Distancia L_1

$$Min\ z = \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{f^* - f(x)}{f^* - f_*}$$

$$x \in F$$

$$f = f(x)$$

Distancia L_∞

$$Min\ z = D$$

$$W_j \frac{f^* - f(x)}{f^* - f_*} \leq D, \forall j$$

$$x \in F$$

$$f = f(x)$$

Programación por metas

- En situaciones complejas, con información incompleta, recursos limitados, objetivos múltiples, conflictos de intereses, etc.,
  - no estamos en condiciones de optimizar
  - nos conformamos con lograr alcanzar unos niveles de logro determinados
- Filosofía “satisficing” (Simon, 1955-57)
  - satisfying +
  - optimizing

Metas

- Combinación de un atributo con un nivel de aspiración
  - Sería deseable que el coste fuese inferior a X
  - Sería deseable que el nivel de empleo fuese superior a Y
- Se puede formular como una restricción "blanda"

$$f_i(x) \geq X$$

Formulación de una meta

$$f_i(x) + n_i - p_i = t_i$$

$$n_i p_i = 0$$

- n_i: falta de logro
- p_i: exceso de logro
- t_i: nivel de aspiración

n_i, p_i, o ambas, son variables de desviación, no deseadas

Modelo general

- Minimizar las variables de desviación no deseadas
- Sujeto a:
  - las restricciones del problema original
  - y las restricciones “blandas” de cada meta

- Según el tipo de minimización, hay distintos modelos:
  - metas ponderadas
  - metas lexicográficas
  - metas MINIMAX

Metas ponderadas

- Minimizar la suma ponderada y normalizada de las variables de desviación

$$Min\ W_i \frac{p_i}{t_i} + W_j \frac{n_j}{t_j} + W_k \frac{n_k + p_k}{t_k}$$

$$st:$$

$$f(x) + n - p = t$$

$$x \in F$$

$$n, p \geq 0$$

- (equivalente a programación L_1 cuando las metas se fijan en los ideales)

Metas lexicográficas

- Las metas situadas en la primera prioridad se satisfacen en lo posible, y sólo entonces se considera la satisfacción de las siguientes prioridades

$$
\begin{aligned}
& Lex\ \ \min\ \ a = \left[h_1(n,p), h_2(n,p), \ldots, h_k(n,p) \right] \\
& st: \\
& f(x) + n - p = t \\
& x \in F \\
& n, p \geq 0
\end{aligned}
$$

Método de resolución
metas lexicográficas

- Aplicación secuencial de programas lineales
- Primer nivel
  - Minimización del primer comp. del vector de logro
  - Sujeto a las restricciones de la primera prioridad
- Segundo nivel
  - Minimización del segundo comp. del vector de logro
  - Sujeto a las restricciones de la segunda prioridad
  - Y a los valores obtenidos en el primer nivel
- Y así sucesivamente...

- Alternativa: Simplex en fases múltiples

Metas MINIMAX

- Minimización de la máxima desviación
- Las desviaciones pueden estar ponderadas y normalizadas

$$
\begin{aligned}
&Min\ d \\
&st: \\
&W_k \frac{n_k + p_k}{t_k} \leq d, \forall k \\
&f(x) + n - p = t \\
&x \in F \\
&n, p \geq 0
\end{aligned}
$$

Programación multimetas

- Híbrido entre la programación por metas y la programación multiobjetivo
- Busca las soluciones eficientes en un problema de programación por metas
- No es muy utilizado

Temas críticos

- Algunos autores han apuntado debilidades teóricas en los modelos de programación por metas, especialmente los lexicográficos
- Pero muchas veces estos problemas son debidos a un uso incorrecto del enfoque

Equivalencia de soluciones

- Posible equivalencia entre un modelo por metas y un modelo monoobjetivo
- Sucede cuando:
  - se establecen niveles de aspiración muy pesimistas para unas metas
    - entonces se podrían formular como restricciones estrictas
  - y niveles muy optimistas para otras
    - lo que equivale a optimizar ese atributo
- Se soluciona formulando adecuadamente el modelo

Estructura de la función de logro

- Hay ocasiones en que se tratan de agregar los componentes del vector de logro en una única función objetivo

$$Min\ Z = \partial_1 h_1(n,p) + \partial_2 h_2(n,p) + \ldots + \partial_k h_k(n,p)$$

- Pero esto evidentemente puede producir soluciones erróneas, dependiendo de los pesos asignados

Estructura lógica de las metas

- En ocasiones se omite alguna de las variables de desviación (la que no se trata de optimizar) en las restricciones del problema

- A veces no pasa nada (variables redundantes)
- Pero a veces genera soluciones subóptimas

- Siempre hay que incluir todas las variables de desviación en las restricciones

Metas con dos lados

- Sólo deben incluirse en la f. objetivo las dos variables de desviación cuando el decisor desea una exacta satisfacción de la meta
- Y esto no es demasiado frecuente

- Si se incluyen por defecto, puede producir soluciones subóptimas

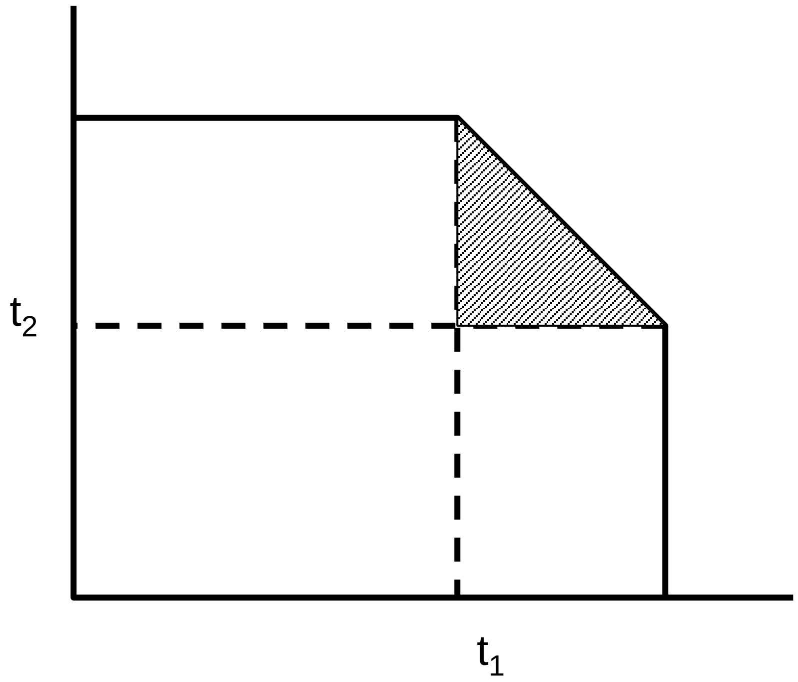
Funciones de utilidad y metas lexicográficas

- El enfoque lexicográfico no verifica el supuesto de continuidad de las preferencias
- Por tanto es incompatible con una función de utilidad

- Pero eso no quiere decir que no corresponda con determinadas estructuras de preferencias, y que por tanto no tenga aplicabilidad práctica

Ineficiencia paretiana

- Los modelos de programación por metas no garantizan la obtención de soluciones eficientes



- Pero esto no tiene por qué ser negativo

Soluciones eficientes en metas

- Si no hay óptimos alternativos: EFICIENTE
- Si hay óptimos alternativos:
  - y se desea una solución eficiente única: Test de eficiencia
    - se maximizan las variables de desviación opuestas
    - sin que empeore el valor de las no deseadas
  - y se desea el conjunto de soluciones eficientes: Test de Hannan
    - se formula un modelo multiobjetivo
    - los objetivos son las metas originales
    - y las restricciones incluyen los valores obtenidos para las metas en la formulación anterior

Metas redundantes

- Metas cuya omisión no influye en la solución óptima del modelo
- Sucede en problemas lexicográficos
- Puede llevar a resultados extraños, a tener que reformular el modelo
- Causas:
  - niveles de aspiración demasiado cercanos al ideal
  - inclusión de muchas metas con dos lados
  - número excesivamente alto de niveles de prioridad

Proceso Analítico Jerárquico

- Desarrollado por Thomas Saaty
- Ampliamente extendido para todo tipo de problemas
- Dispone de un software específico: ExpertChoice

Ventajas

- No requiere generar el conjunto eficiente
- Fácil de entender por los decisores
- No conlleva mucho cálculo
- En muchos casos, ha sido el que más se ha acercado a las verdaderas preferencias

Inconvenientes

- No considera el rango de variación de los criterios: no es válido según la teoría neoclásica
  - Se puede solucionar incluyendo información (p.ej., la matriz de pagos)
- Problema de la inversión del orden de preferencia:
  - La ordenación de dos criterios puede verse alterada por la inclusión de otro criterio irrelevante

La filosofía del AHP

- Cuando un problema es demasiado complejo, hay que
  - Descomponerlo
  - Tomar decisiones sobre problemas pequeños
  - Agregar las soluciones de los subproblemas
- Se basa en la capacidad innata de tomar decisiones razonables sobre problemas pequeños

Fases del AHP

- Jerarquización del problema
- Emisión de juicios de valor
- “Traducción” de los juicios de valor
- Cálculo de un conjunto coherente de pesos

El ejemplo de siempre...

Marca	Modelo	Versión	Cons.	Precio	Vel.	Acel.	Capac.	Segur.
Audi	A4	1.9Tdi	5,6	29738	204	10,1	454	88
Ford	Focus	1.8TDci	5,5	18760	196	11	520	74
Ford	Mondeo	2.0Tdci	6	23498	200	9,9	540	79
Opel	Astra	2.0Dti	5,9	17618	183	12,5	480	74
Skoda	Octavia	1.9Tdi	5	20308	191	11,2	548	74
Toyota	Avensis	2.0D4-D	5,9	21000	190	11,6	530	75
Volkswagen	Golf	1.9Tdi	5,4	23259	205	10,5	460	74
Volkswagen	Passat	1.9Tdi	5,8	26577	201	10,2	495	82
Volvo	V40	1.9D+	5,4	23848	195	10,5	413	76

Y algún criterio más....

Jerarquización

- Identificar el objetivo global
  - ¿Qué es lo que se pretende conseguir?
  - ¿Cuál es la pregunta principal?
- Identificar los sub-objetivos
- Identificar las alternativas
- Identificar los actores

- La pregunta fundamental es: ¿Puedo comparar los elementos del nivel inferior usando los de nivel superior como atributos?
- La jerarquización ayuda al decisor a aprender, a veces es bueno profundizar más de lo necesario

Homogeneidad

- Los niveles jerárquicos deben ser homogéneos: las diferencias dentro de un nivel no pueden ser mayores de un orden de magnitud
- Si hay mayor desviación, hay que agrupar y usar elementos pivote

Emisión de juicios de valor

- Se hace por parejas
  - En ese caso se suele usar la escala de Saaty
  - Pero puede haber otras escalas

- Para juzgar alternativas pueden usarse otros métodos

Método relativo

	1	2	3	4
1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}
2	a_{21}	1	a_{23}	a_{24}
3	a_{31}	a_{32}	1	a_{34}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	1

Número mínimo de comparaciones: n-1
Número total: n(n-1)/2

Escala fundamental de Saaty

Valor	Definición	Comentarios
1	Igual importancia	El criterio A es igual de importante que el criterio B
3	Importancia moderada	La experiencia y el juicio favorecen ligeramente al criterio A sobre el B
5	Importancia grande	La experiencia y el juicio favorecen fuertemente el criterio A sobre el B
7	Importancia muy grande	El criterio A es mucho más importante que el B, tal como se demuestra en la práctica
9	Importancia extrema	La mayor importancia del criterio A sobre el criterio B es irrefutable
2,4,6,8	Valores intermedios entre los anteriores, cuando es necesario matizar	
Para expresar reciprocidad, se usan los inversos de estos valores.		

Cálculo de los pesos

- Método del autovalor máximo (Saaty)
- Programación por metas

Autovalor máximo

- Usamos ExpertChoice
- O lo calculamos
  - Elevamos la matriz de comparación a potencias cuadradas
  - Sumamos por filas y normalizamos
  - Iteramos hasta que los resultados convergen

Programación por metas

$$Min \sum_{k=1}^{n} (n_k + p_k)$$

$$s.t.$$

$$W_i - a_{ij} W_j + n_k - p_k = 0, \forall i \neq j$$

$$W_i \geq 0, \forall i$$

Inconsistencia (I)

- Desviación de las igualdades
- No es un defecto en sí misma
- Pero una inconsistencia elevada puede sesgar los resultados
- Para calcularla
  - Desviación con respecto al autovalor consistente, o
  - Suma de las variables de desviación
  - Se suele calcular como un ratio entre:
    - La medida de inconsistencia
    - Y la medida correspondiente a una matriz aleatoria, o inconsistente al máximo

Inconsistencia (II)

- AHP ofrece la posibilidad de reducir la inconsistencia
  - Corrigiendo el término más inconsistente
  - Ajustando todos los términos
- Pero esto no tiene por qué tener sentido

- La inconsistencia refleja la intransitividad de las decisiones

Paa reducir la inconsistencia

- Aportar información suficiente
- Establecer una jerarquía lo más coherente posible
  - Grupos homogéneos de criterios
  - Número no muy elevado de criterios

Agregación de pesos

- Cada criterio en la escala tiene un peso:
  - Su propio peso dentro del nivel
  - Multiplicado por el peso del nivel superior
- Se puede comprobar que la suma de todos los pesos de los nodos finales es 1, hemos distribuido nuestra preferencia entre todos los nodos finales

Ordenación de alternativas

- Para cada alternativa
  - Calculamos su peso con respecto a cada criterio final
  - Lo multiplicamos por el peso del criterio
  - Sumamos todos los pesos
- Para calcular su peso con respecto a cada criterio
  - Comparación por pares (Método relativo)
  - Comparación con un estándar (Método absoluto)

Método absoluto

- Cuando hay demasiadas alternativas que comparar
- Y disponemos de una medida de referencia
- Generalmente desarrollada con la experiencia

- Podemos comparar con esa medida: RATING
- O referenciar las medidas entre sí: PRIORIDADES DIRECTAS
- O usar una FUNCIÓN DE UTILIDAD

Ratings

- También hace falta comparar por parejas para establecer los pesos de cada categoría
- Una vez establecidos,
  - se asigna un 1 a la mejor categoría, y el resto de categorías dividen su peso por el del mejor
  - O se normaliza

Prioridades directas

- A partir de unos valores numéricos dados
- Normalizamos con respecto a la suma
- Y dependiendo del método utilizado
  - Método distributivo
    - No hacemos nada
  - Método ideal
    - Dividimos por el valor máximo

Funciones de utilidad

- ExpertChoice permite construir funciones de utilidad a partir de nuestros valores de referencia
  - Al valor mínimo le asigna un 0
  - Al valor máximo le asigna un 1
  - Y luego normaliza según
    - Método distributivo
    - Método ideal

Inversión del orden de preferencia

- Está en contra de los axiomas de la teoría clásica de la utilidad
- Pero no está claro que no represente las preferencias de los decisores
- AHP permite que ocurra o no:
  - El método distributivo permite que ocurra
    - Sistemas cerrados, con escasez
    - Los recursos limitados deben ser distribuidos
    - Aquí no tienen sentido las alternativas irrelevantes o copias
  - El método ideal no lo permite
    - No hay escasez, sistema abierto
    - Por tanto no hay que distribuir recursos limitados

Método ideal

- Una vez tenemos los pesos asignados a cada alternativa con respecto a cada criterio
- Asignamos a la mejor un peso unidad
- Y dividimos el resto por este peso
- Luego procedemos igual que antes:
  - Multiplicamos el peso por el del criterio correspondiente
  - Sumamos para todos los criterios
  - Al final se suele normalizar