Optimización multicriterio

Andrés Ramos
Universidad Pontificia Comillas
http://www.iit.comillas.edu/aramos/
Andres.Ramos@comillas.edu

Contenido

1. Conceptos básicos

2. Métodos continuos

3. Métodos discretos

1

Conceptos básicos

Teoría de la decisión

- Decisión: elegir el mejor posible $\rightarrow$ definir qué significa mejor y qué significa posible
- Soluciones posibles o factibles:
  - Conjunto finito: las alternativas se pueden enumerar
  - Conjunto infinito: las alternativas se definen mediante restricciones
- Mejor:
  - Un único criterio (Optimización clásica o Teoría de la Decisión clásica)
  - Múltiples criterios (Decisión Multicriterio) o múltiples decisores (Teoría de Juegos)

Decisión Multicriterio
Conceptos básicos

Métodos multicriterio:

- lo posible: ***continuo*** $\rightarrow$ Optimización multiobjetivo
  Programación compromiso
  Métodos satisfacientes (metas)
- lo posible: ***discreto*** $\rightarrow$ Procesos Analíticos Jerarquizados (AHP)
  Métodos de sobreclasificación (Electre, Promethee,...)

Formulación general:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{opt} \quad z = (z_1(x), \ldots, z_p(x)) \\ x \in F \end{array}}$$

F: espacio de decisiones o soluciones (continuo: región factible, $F \subseteq \mathbb{R}^n$)

$z(F)$: espacio de objetivos o resultados (criterios numéricos: $z(F) \subseteq \mathbb{R}^p$)

¿Cuál es el animal más rápido corriendo, volando y nadando simultáneamente?

- El más veloz en tierra?

El guepardo es el animal terrestre más rápido

- El que mejor vuela?

El halcón peregrino es el pájaro más veloz

- El mejor nadador?

Pez espada es el pez más rápido del mundo

Y el ganador es … el PATO

- Es capaz de correr aunque menos que un guepardo

- Es capaz de volar aunque menos que un halcón peregrino

- Es capaz de nadar aunque menos que un pez espada

Decisión Multicriterio

Conceptos básicos

Definiciones básicas:

- Atributo: "valor" observado (medido) de una decisión independientemente del decisor
- Objetivo: dirección mejora de un atributo (max. o min. si es numérico; si no preferencias)
- Nivel de aspiración: nivel aceptable de logro de un atributo
- Meta: Combinación de un atributo y su nivel de aspiración
- Criterio: atributos, objetivos o metas relevantes en un problema de decisión

Decisión Multicriterio

Conceptos básicos

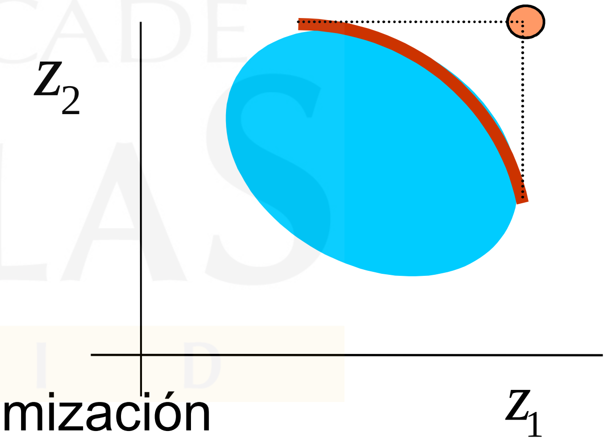
Concepto de solución: criterio de optimalidad paretiana

Una alternativa es eficiente o pareto óptima si toda alternativa que proporcione una mejora en un atributo produce un empeoramiento en al menos otro de los atributos

Alternativa dominada o no eficiente: hay otra con todos los atributos mejores

Espacio de objetivos $\max\,(z_1, z_2)$

- Conjunto eficiente o de Pareto
- Alternativas dominadas



Atributos numéricos, objetivos de maximización

$\rightarrow$ Conjunto eficiente:

$$\varepsilon = \left\{ x \in F : \nexists x' \in F \text{ tal que } z_k(x') \geq z_k(x)\ \forall k \text{ y } z_t(x') > z_t(x) \text{ para al menos un } t \in \{1,\ldots,p\} \right\}$$

Solución mejor compromiso: solución eficiente seleccionada por decisor

2

Métodos continuos

Decisión Multicriterio
Optimización multiobjetivo

$$\max \quad z = (z_1(x), \ldots, z_p(x))$$
$$x \in F$$

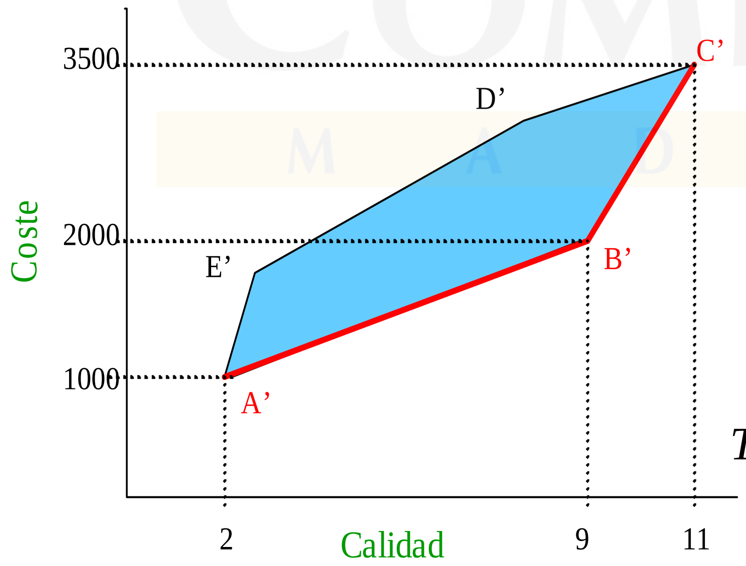
$z_i(x)$: función matemática del atributo i-ésimo

x : vector de variables de decisión

F : conjunto de restricciones que definen las soluciones posibles

Matriz de pagos (pay-off matrix): valor óptimo un objetivo sin considerar otros, y valores del resto objetivos en esa solución. Grado conflicto

Tasas de intercambio (trade-offs o costes de oportunidad): lo que se está dispuesto a empeorar un objetivo por mejorar en una unidad otro objetivo (pendientes del conjunto eficiente)



Matriz de pagos:

	Coste	Calidad
Coste	**1000**	2
Calidad	3500	**11**

Tasas de intercambio:

$$T_{A'B'} = \frac{2000-1000}{9-2} = 142.86 \qquad T_{B'C'} = \frac{3500-2000}{11-9} = 750$$

Decisión Multicriterio

Optimización multiobjetivo

Método de las ponderaciones **(***Weighted-Sum Method***)**(Zadeh, 1963)

Multiplicar cada objetivo por peso o factor no negativo y agregar en una única función

Programación paramétrica (variando pesos se obtiene todo el conjunto eficiente)

$$\left.\begin{array}{c} \max \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z_i(x) \\ x \in F \\ \lambda \geq 0 \end{array}\right\} P(\lambda)$$

Teorema: Si $\lambda_i > 0 \ \forall i$, entonces cualquier solución óptima de $P(\lambda)$ es eficiente.

El recíproco es cierto bajo ciertas condiciones (p.ej. linealidad)

Normalizar los criterios (unidades)

Decisión Multicriterio

Optimización multiobjetivo

Método de las ε-restricciones **(*Epsilon-Constraint Method*)**

Optimizar uno de los objetivos e incorporar el resto como restricciones paramétricas

Programación paramétrica (variando términos de la dcha. se obtiene conjunto eficiente)

$$\left.\begin{array}{ll} \max & z_l(x) \\ & x \in F \\ & z_k(x) \geq \varepsilon_k \quad k = 1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,p \end{array}\right\} P_l(\varepsilon)$$

Teorema: Si la solución es única, entonces es eficiente.

Teorema: Si x^* es eficiente, $\forall l \quad \exists \varepsilon_k$ tal que x^* es sol. óptima de $P_l(\varepsilon)$

Método simplex multiobjetivo (Zeleny, 1974)

Sólo para objetivos y restricciones lineales

Evalúa cada iteración eficiencia de las soluciones (ptos. extremos)

Obtiene todos los puntos extremos eficientes

Conjunto eficiente: combinaciones lineales de puntos extremos adyacentes

2. Decisión Multicriterio

Programación compromiso

Punto o alternativa ideal: valores óptimos de objetivos individualmente tratados

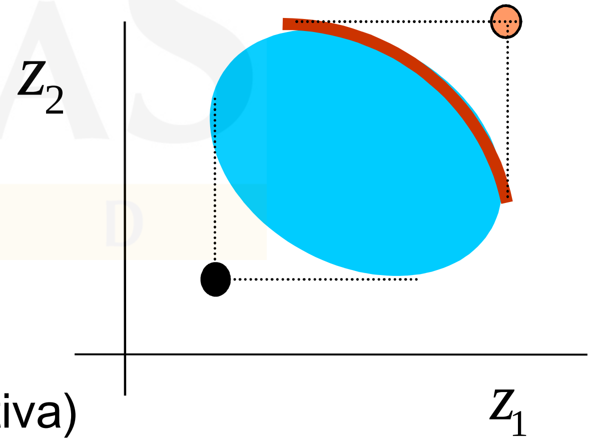
$z^* = (z_1^*, \dots, z_i^*, \dots, z_p^*)$ $\quad z_i^* = \max_{x \in F} z_i(x)$ $\quad z_i^*$: punto ancla

Solución óptima o mejor solución compromiso: solución eficiente más próxima al punto ideal (axioma de Zeleny, 1973)

Grado de proximidad al objetivo i-ésimo normalizado: $d_i(x) = \dfrac{z_i^* - z_i(x)}{z_i^* - z_{*i}}$

z_{*i} anti-ideal o peor valor posible del objetivo en el conjunto eficiente

$$\min_{x \in F} L_\pi = \left[\sum_{i=1}^{p} w_i^\pi \left(\frac{z_i^* - z_i(x)}{z_i^* - z_{*i}} \right)^\pi \right]^{1/\pi}$$



Ponderación preferencial de los criterios (subjetiva)

$\pi = \infty \rightarrow$ Tchebychev o minimizar máxima distancia (lineal)

$\pi = 1 \rightarrow$ agregación lineal de distancias ponderadas (lineal)

Conjunto compromiso: variar π (usualmente se da $[L_1, L_\infty]$)

Decisión Multicriterio

Programación por metas

Lógica satisfaciente (Simon, 1955):

en los contextos actuales de decisión (información incompleta, recursos limitados, conflictos de intereses,...) el decisor más que optimizar unas funciones objetivo intenta que una serie de metas se aproximen lo más posible a unos niveles de aspiración prefijados.

$\rightarrow$ Programación por metas (*Goal Attainment Method*) (Charnes y Cooper(61), Lee (72) e Ignizio (76))

Atributo $\rightarrow$ expresión matemática: $z_i(x)$

Nivel de aspiración: nivel aceptable de logro para un atributo $\hat{z}_i$

Restricción Meta: $z_i(x) \geq \hat{z}_i$

Con variables de desviación: $z_i(x) + n_i - p_i = \hat{z}_i$

Variables de desviación no deseadas:

si meta es "al menos" un valor, n_i ; si es "a lo sumo", p_i

Modelo (maximizar):

$$\min_{x \in F \cap \text{restricciones meta}} \sum_{i=1}^{p} n_i$$

Decisión Multicriterio

Programación por metas: variantes

- *Programación por metas ponderadas:*

$$\min \quad \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i n_i + \beta_i p_i)$$

$$z_i(x) + n_i - p_i = \hat{z}_i \quad i = 1, \dots, p$$

(dividir por nivel aspiración: %)

$$x \in F$$

$$n_i \geq 0, \; p_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

- *Programación por metas MINIMAX o Tchebychev:* (sol. equilibrada)

$$\min \quad D$$

$$\alpha_i n_i + \beta_i p_i \leq D \quad i = 1, \dots, p$$

$$z_i(x) + n_i - p_i = \hat{z}_i \quad i = 1, \dots, p$$

$$x \in F$$

$$n_i \geq 0, \; p_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, p$$

- *Programación por metas lexicográficas:* Niveles de prioridad en metas.

Resolver secuencialmente para cada nivel, manteniendo los valores previamente obtenidos de variables no deseadas para metas con mayor nivel de prioridad.

$$Lex \min a = [g_1(n,p) + g_2(n,p), g_3(n,p), g_4(n,p) + g_5(n,p) + g_6(n,p)]$$