Programación Lineal

Pedro Sánchez

Contents

1

Solución gráfica

Solución gráfica (i)

Ejemplo:

- Un artesano fabrica trenes y camiones de juguete
- Utilizando tornillos, bloques y ruedas como componentes
- En la semana próxima dispone de 8000, 6000 y 6300 componentes respectivas
- Los beneficios por tren y camión son 1.6 euros/unidad y 1.4 euros/unidad

	Tornillos	Bloques	Ruedas
Tren	10	15	18
Camión	20	10	6

Solución gráfica (ii)

Formulación matemática:

$$Max\, Z = 1.6 \cdot x_1 + 1.4 \cdot x_2$$ → Maximización del beneficio total

$$sujeto\, a:$$

$$10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 \leq 8000$$ → Existencias TORNILLOS

$$15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 6000$$ → Existencias BLOQUES

$$18 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 6300$$ → Existencias RUEDAS

$$x_1, x_2 \geq 0$$

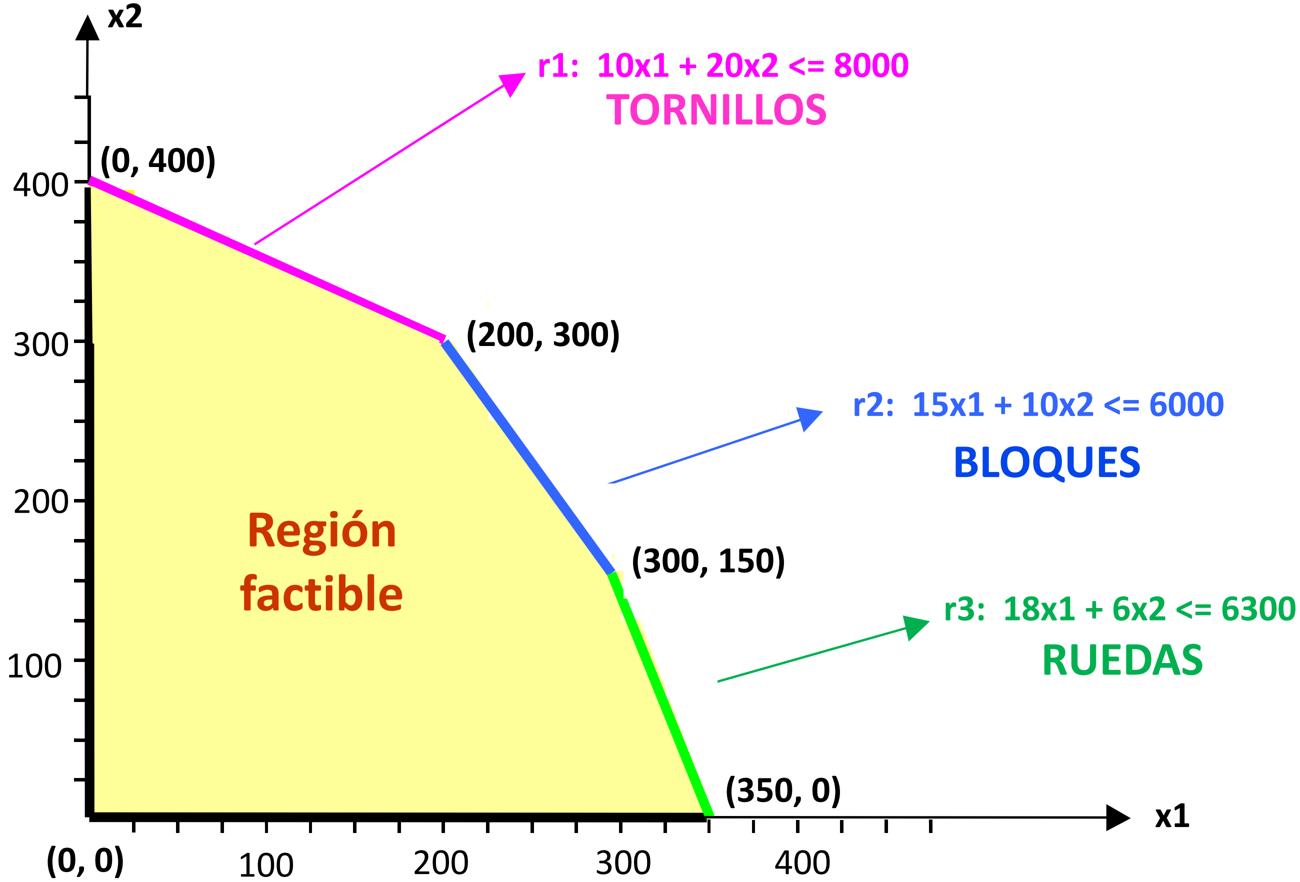
x_1 **: Número de trenes a fabricar**

x_2 **: Número de camiones a fabricar**

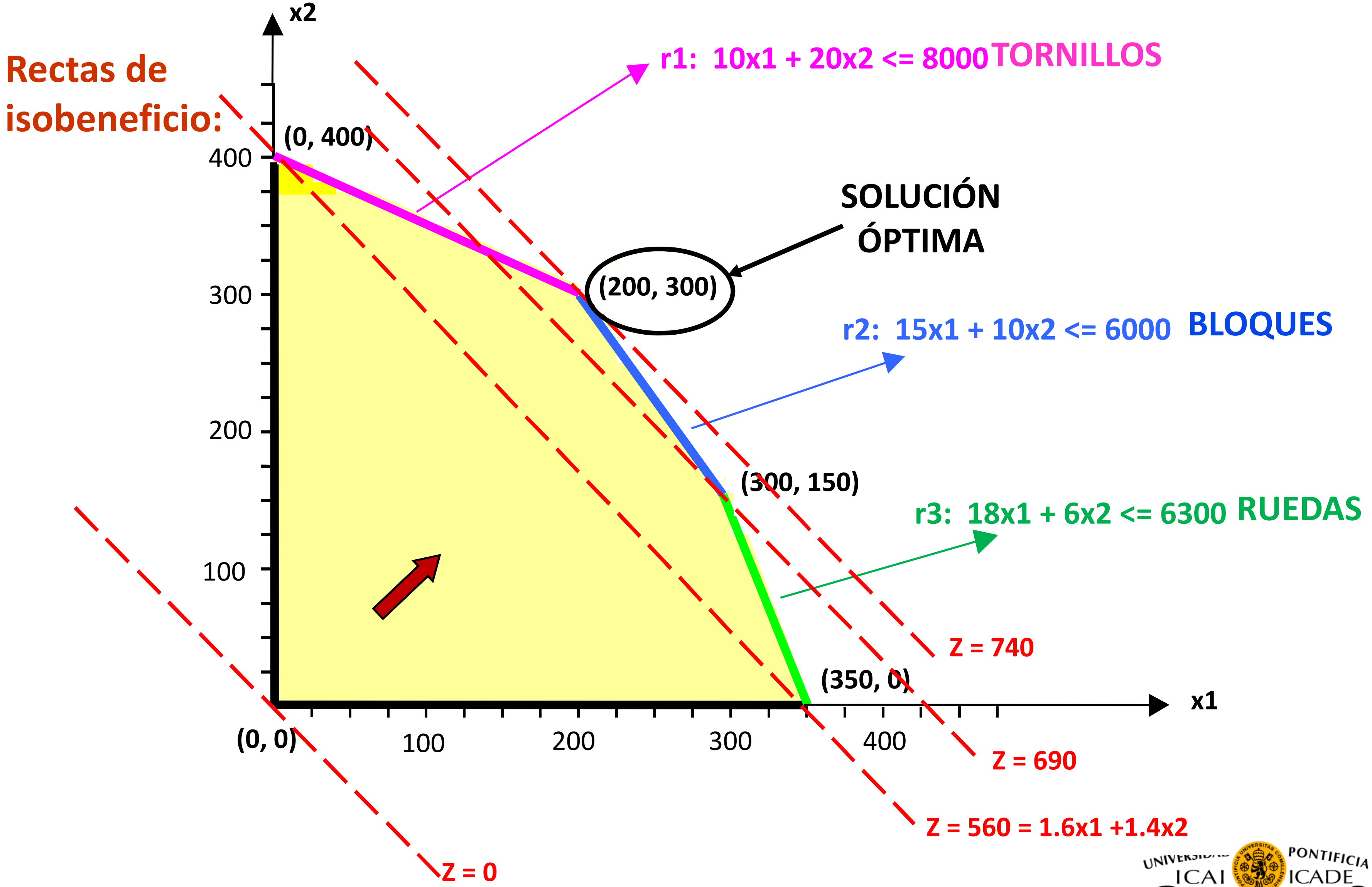
Se consideran variables reales en primera aproximación

Solución gráfica (iii)

Representación gráfica de restricciones



Solución gráfica (iv)



Solución gráfica (v)

Solución óptima:

- La solución óptima es fabricar **200 trenes** y **300 camiones**
- Se utilizan todas las existencias de **tornillos** (**8000**)
- Se utilizan todas las existencias de **bloques** (**6000**)
- Se utilizan **5400 ruedas** sobrando **900** de las existencias
- El beneficio resultante es de **740 euros**

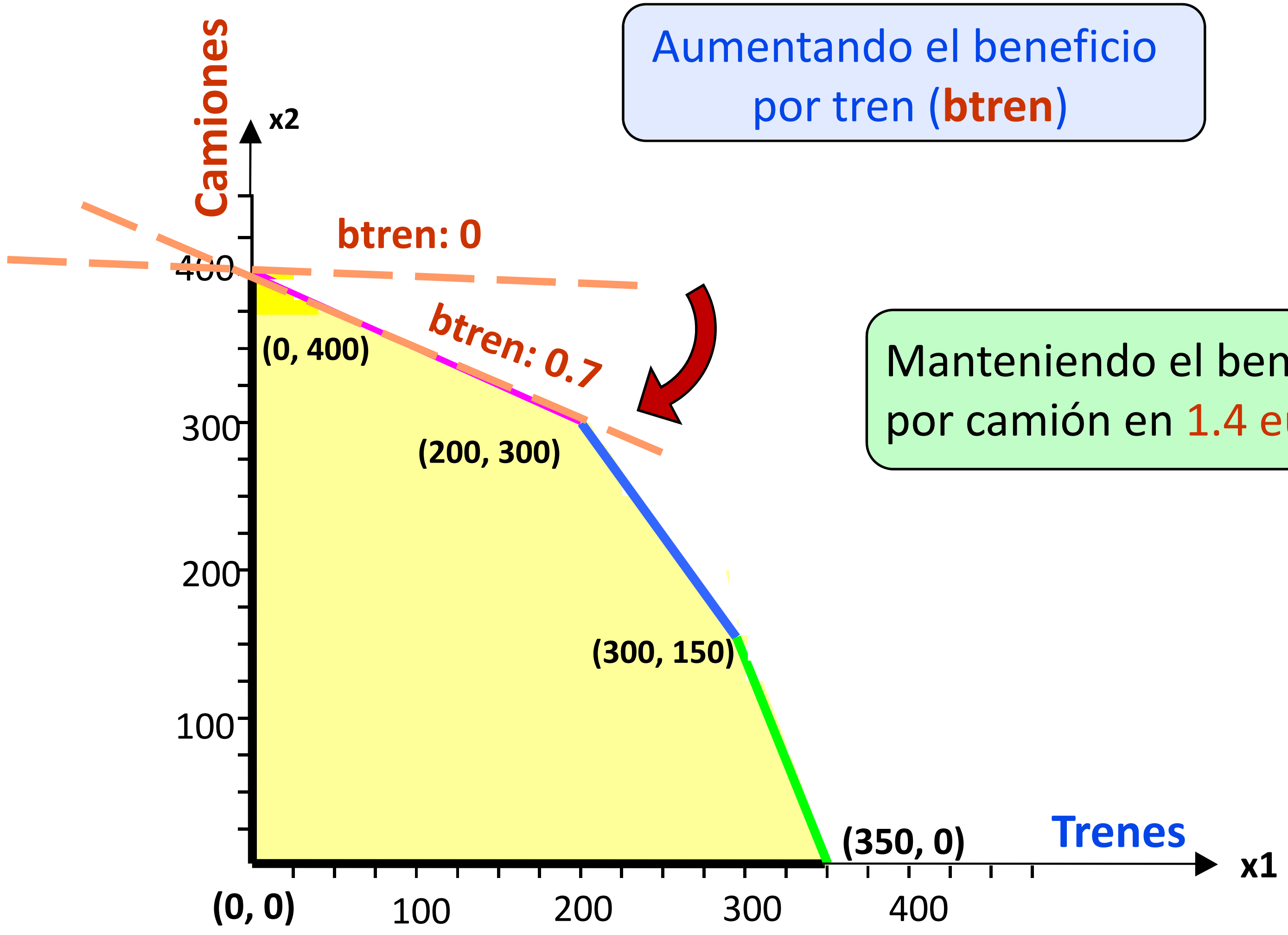
2

Sensibilidades gráficas

Sensibilidades gráficas (i)

Cambios en coeficientes de la función objetivo (i)

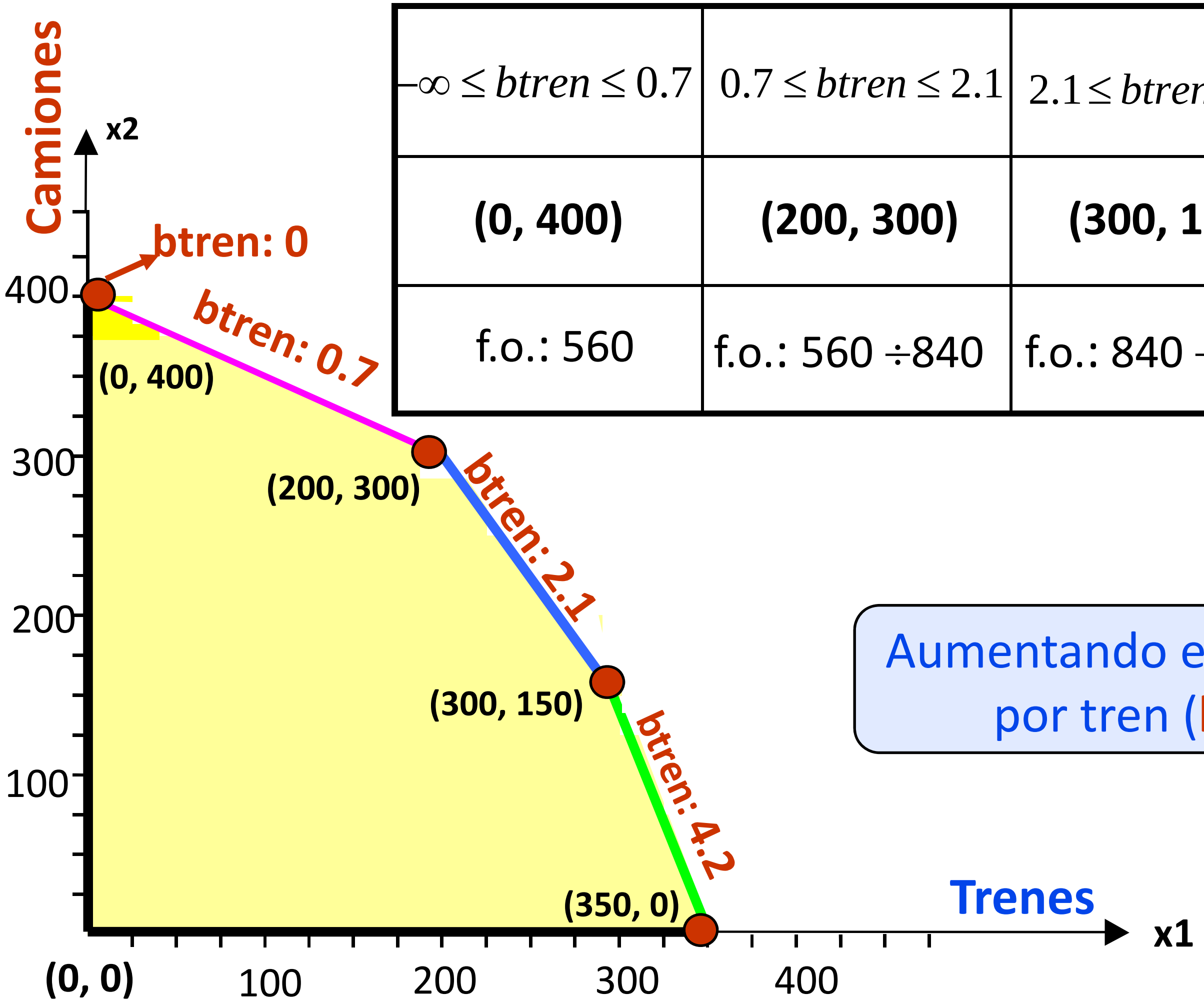
Aumentando el beneficio por tren (**btren**)



Manteniendo el beneficio por camión en 1.4 euros

Sensibilidades gráficas (ii)

Cambios en coeficientes de la función objetivo (ii)



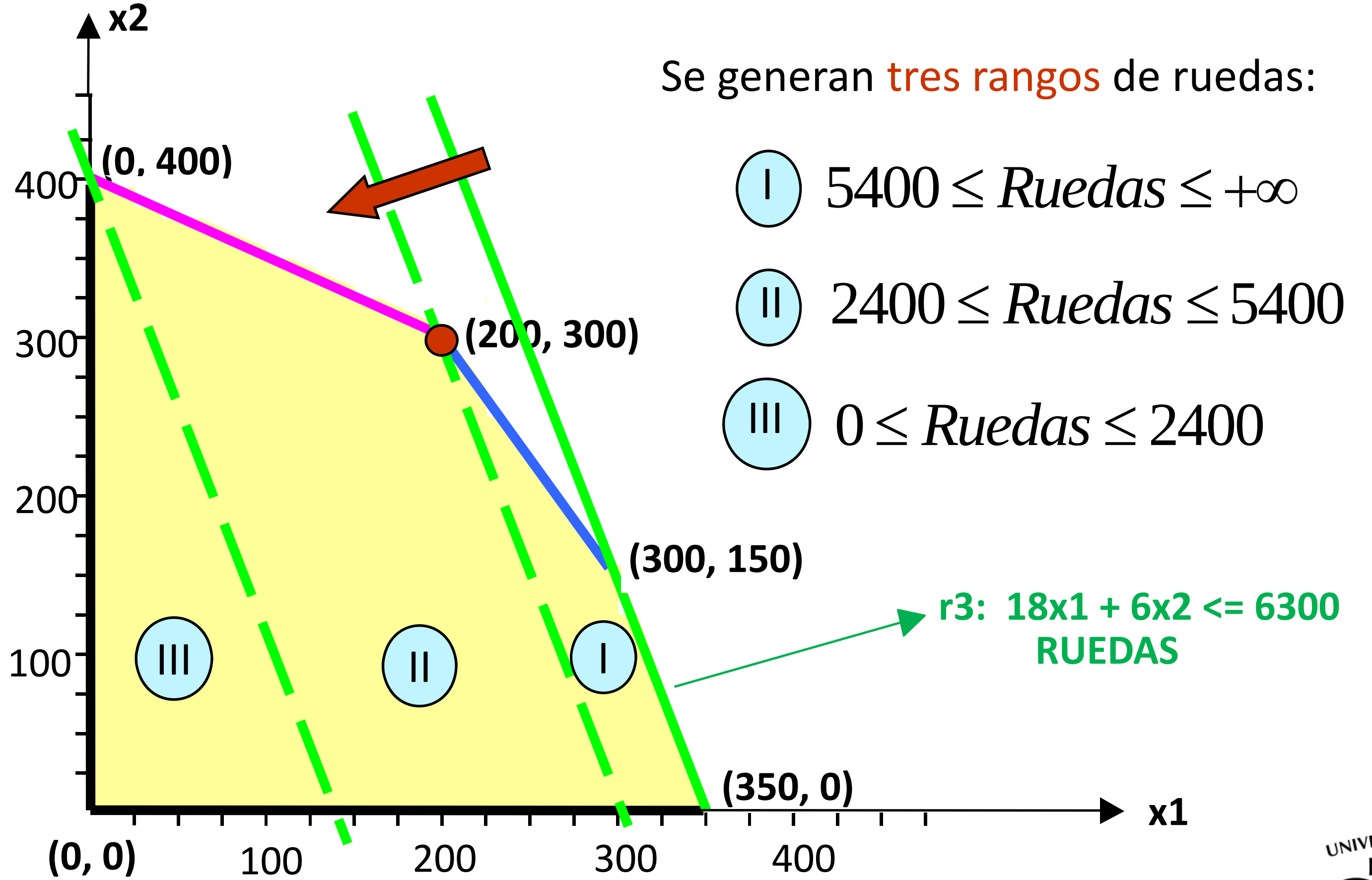
$-\infty \le btren \le 0.7$	$0.7 \le btren \le 2.1$	$2.1 \le btren \le 4.2$	$4.2 \le btren \le +\infty$
(0, 400)	**(200, 300)**	**(300, 150)**	**(350, 0)**
f.o.: 560	f.o.: 560 ÷840	f.o.: 840 ÷1470	f.o.: 147 ÷∞

Aumentando el beneficio por tren (**btren**)

Sensibilidades gráficas (iii)

Cambios en las restricciones de existencias (i)

Reduciendo el número de existencias de ruedas y manteniendo la función objetivo



Se generan tres rangos de ruedas:

I $5400 \leq Ruedas \leq +\infty$

II $2400 \leq Ruedas \leq 5400$

III $0 \leq Ruedas \leq 2400$

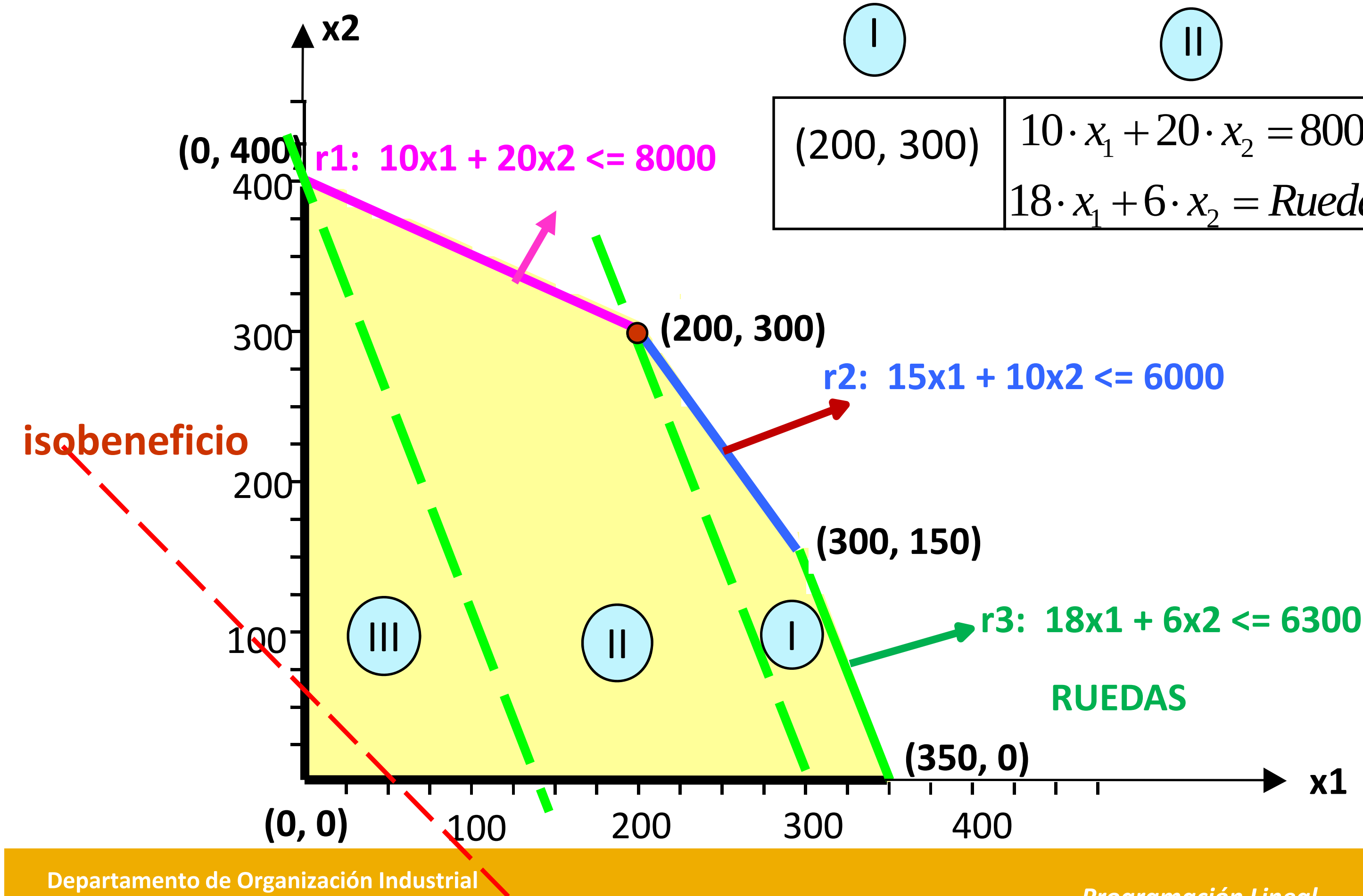
UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Sensibilidades gráficas (iv)

Cambios en las restricciones de existencias (i)

La **solución** en cada uno de los rangos es:

I	II	III
(200, 300)	$10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 = 8000$ $18 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = Ruedas$	$x_1 = 0$ $18 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = Ruedas$



Sensibilidades gráficas (v)

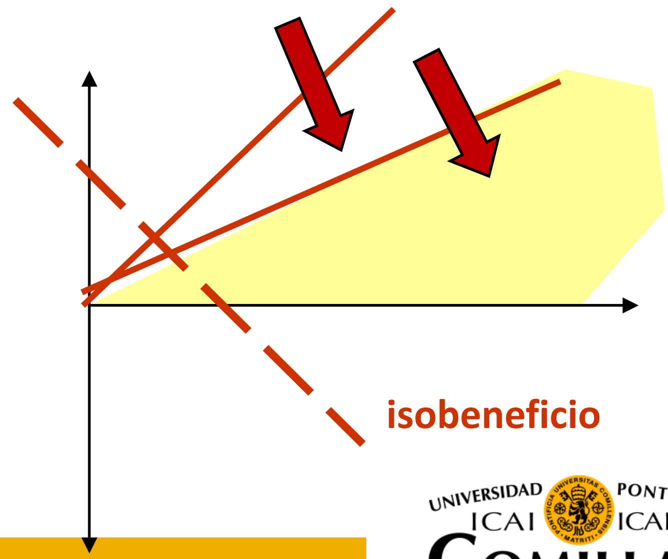
Solución no acotada

No siempre existe una **solución acotada** para un problema de optimización

En el ejemplo del artesano se obtiene una solución no acotada si:

- No se limitan las existencias de tornillos, bloques y ruedas
- Si el proveedor de componentes obliga a que se adquieran al menos 4 bloques y 4 ruedas por cada 4 tornillos

$$(10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2)/4 \le (15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2)/4$$
$$(10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2)/4 \le (18 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2)/4$$



UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Solución gráfica
Sensibilidades gráficas
Método Simplex
Metodología Simplex
Dualidad
Análisis de sensibilidad
Método simplex dual

3

Método simplex

Método Simplex (i)

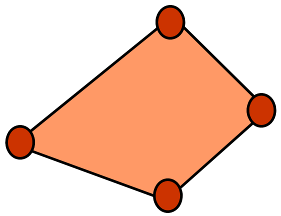
Geometría de la programación lineal

- Poliedro: Región definida por la intersección de un conjunto finito de hiperespacios

$$\text{hiperespacios}\begin{cases}\sum_j a_{ij}\cdot x_j \le b_i\\ \sum_j a_{ij}\cdot x_j \ge b_i\end{cases}$$

- La región factible de un problema de programación lineal es un poliedro

- Vértice de un poliedro: punto que no se expresa como combinación lineal convexa de dos puntos distintos de un poliedro



Si existe un óptimo en un problema de programación lineal, éste se encuentra en un VÉRTICE

Método Simplex (ii)

- **Forma estándar**

$$\min\ Z = c^T \cdot x$$
$$A \cdot x = b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in R^n;\ A \in R^{mxn};\ c \in R^n; b \in R^m$$

Problema del artesano

$$\begin{aligned}
&Min\,Z = -1.6 \cdot x_1 - 1.4 \cdot x_2 + 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + 0 \cdot h_3\\
&sujeto\,a:\\
&10 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + h_1 = 8000\\
&15 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + h_2 = 6000\\
&18 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + h_3 = 6300\\
&x_1, x_2, h_1, h_2, h_3 \geq 0
\end{aligned}$$

El método simplex requiere de iteraciones proporcionales al número de restricciones *m* y el tiempo de resolución es proporcional a m^3

$$c^T = (-1.6, -1.4, 0, 0, 0)$$
$$x^T = (x_1, x_2, h_1, h_2, h_3)$$
$$A = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{bmatrix}$$

Método Simplex (iii)

Transformaciones a la forma estándar

- **Función objetivo :** $\max Z \rightarrow \min -Z$

- **Restricciones $\leq$:** Se introduce una variable de holgura u_i

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij} \cdot x_j + u_i = b_i \qquad \boxed{b_i \geq 0}$$

- **Restricciones $\geq$:** Se introduce una variable de holgura o exceso v_i

$$\sum_j a_{ij} \cdot x_j \geq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij} \cdot x_j - v_i = b_i \qquad \boxed{b_i \geq 0}$$

- **Variables negativas :** $-\infty \leq x_j \leq 0 \Rightarrow x_j = -y_j\,;\;\; 0 \leq y_j \leq +\infty$

- **Variables negativas acotadas :** $L_j \leq x_j \leq 0 \Rightarrow x_j = y_j + L_j\,;\;\; 0 \leq y_j \leq -L_j$

- **Variables libres :** Se sustituye por 2 variables $x_j = x_j^+ - x_j^-$

$$0 \leq x_j^+ \leq \infty \qquad 0 \leq x_j^- \leq \infty$$

Método Simplex (iv)

Tipos de Soluciones

- **Solución Factible:** Satisface todas las restricciones
  Pertenece a la región factible

- **Solución Infactible:** Viola al menos una restricción
  No pertenece a la región factible

- **Solución Básica Factible:** Tiene *m* variables básicas asociadas a la matriz no singular de restricciones A de rango *m* que toman valor # 0 y el resto = 0

- **Solución Óptima :** Solución básica factible con mejor valor de la f.o.

Método Simplex (v)

Teorema fundamental de la Programación Lineal

- Si admite solución factible, ésta es Solución Básica

- Si admite solución óptima finita, ésta es Solución Básica Óptima

4

Metodología Simplex

UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Métodología Simplex (i)

Descomposición en componentes BASICAS y NO BASICAS

$$x^T = [x_B, x_N]^T \begin{cases} x_B \in R^m \text{ vector de variables BASICAS} \\ x_N \in R^{n-m} \text{vector de variables NO BASICAS} \end{cases}$$

$$A = [B, N]^T \begin{cases} B \in R^{mxm} \text{ matriz BASE} \\ N \in R^{mxn-m} \text{ matriz NO BASICA} \end{cases}$$

$$c^T = [c_B, c_N]^T \begin{cases} c_B \in R^m \text{ coeficientes de variables BASICAS} \\ c_N \in R^{n-m} \text{coeficientes de variables NO BASICAS} \end{cases}$$

Métodología Simplex (ii)

Reformulación del problema

$$A \cdot x = b$$

$$B \cdot x_B + N \cdot x_N = b \quad \rightarrow \; x_B = B^{-1}\left(b - N\,x_N\right) = B^{-1}\,b - B^{-1}\,N\,x_N$$

Función objetivo

$$Z = c_B^T\,x_B + c_N^T\,x_N = c_B^T\,B^{-1}\,b + \left[c_N^T - c_B^T\,B^{-1}N\right]\,x_N$$

Al tomar valor nulo las variables no básicas se tiene:

$$x_B = B^{-1}\,b$$

$$Z = c_B^T\,x_B = c_B^T\,B^{-1}\,b$$

Métodología Simplex (iii)

Los costes reducidos

$$\hat{C}_N^{\,T} = C_N^{\,T} - c_B^{\,T} B^{-1} N \Rightarrow$$ Vector de costes reducidos

$$\hat{c}_j = c_j - c_B^{\,T} B^{-1} a_j = c_j - z_j$$

a_j :columna de la variable x_j en A

Los costes reducidos en la función objetivo:

$$Z = c_B^{\,T} x_B + \sum_{j \in I_N} \hat{c}_j\, x_j = \hat{z} + \sum_{j \in I_N} \hat{c}_j\, x_j = \hat{z} + \sum_{j \in I_N} \left(c_j - z_j \right) x_j$$

- El coste reducido indica el <u>cambio en la f.o.</u> debido a un incremento unitario de la variable
- En el óptimo todos los costes reducidos de las variables no básicas son ≥ 0 (estándar)
- Los costes reducidos de las <u>variables básicas</u> son <u>siempre 0</u>
- Si el coste reducido de una variable <u>no básica en el óptimo es 0</u> ⇒ <u>múltiples óptimos</u>

Métodología Simplex (iv)

Metodología en el problema del artesano:

$$x_B = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad c_N = \begin{pmatrix} -1.6 \\ -1.4 \end{pmatrix} \quad c_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{pmatrix} \qquad x_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Solución inicial

$(x_1, x_2) = (0, 0)$

Costes reducidos: $\hat{c}_N^{\ T} = c_N^{\ T} - c_B^{\ T} B^{-1} N = \left(-1.6, -1.4\right)$

Cambios en las variables básicas:

$$x_B = B^{-1} b - B^{-1} N \, x_N \qquad x_B = \begin{pmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \\ 18 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Métodología Simplex (v)

Evolución de la función objetivo del artesano:

La función objetivo cambia de valor al cambio de las variables básicas

Ejemplo: $$Z = c_B^{\,T} B^{-1} b + \hat{c}_N^{\,T} x_N = 0 + (-1.6, -1.4)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1.6 \cdot x_1 + -1.4 \cdot x_2$$

La f.o. disminuye al aumentar cualquiera de las variables no básicas → La base actual NO es óptima

- La prueba de optimalidad consiste en comprobar si existe alguna variable con coste reducido negativo

  ① Si no existieran, la base actual es óptima

  ② Si existen, se selecciona entre ellas la variable básica entrante cuyo coste reducido tenga mayor valor absoluto

Ejemplo: La x_1 tiene coste reducido –1.6 y por ello es la variable entrante

Métodología Simplex (vi)

Incremento de las variables NO BASICAS:

Las variables NO BÁSICAS se pueden incrementar hasta que las variables BÁSICAS incumplan una o varias restricciones

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\, x_N = \hat{b} - B^{-1}a_t\, x_t = \hat{b} - y_t\, x_t$$

a_t :columna de la matriz A correspondiente a la variable x_t

$$\left(x_B\right)_i = \hat{b}_i - y_{it}\, x_t \quad ; \quad i \in I_N$$

- Si $y_{it} > 0 \Rightarrow \left(x_B\right)_i$ Disminuye cuando x_t se incrementa hasta $\dfrac{\hat{b}_i}{y_{it}}$ (hasta que se anula)
- Si $y_{it} \leq 0 \Rightarrow \left(x_B\right)_i$ Aumenta o permanece

Métodología Simplex (vii)

Máximo incremento de variables NO BASICAS:

La variable NO BÁSICA elegida como variable BÁSICA ENTRANTE se incrementa hasta que la primera variable BÁSICA se anula

La variable BÁSICA SALIENTE es la que primero se anula

$$\bar{x}_t = \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{\hat{b}_i}{y_{it}} : y_{it} > 0\right\}$$

Ejemplo artesano:

$$y_1 = B^{-1}a_{x1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_1 = \min\left\{\frac{8000}{10}, \frac{6000}{15}, \frac{6300}{18},\right\} = \min\{800, 400, \underline{\underline{350}}\}$$

h_3

$\boxed{h_3 \text{ es la variable básica saliente}}$

Métodología Simplex (viii)

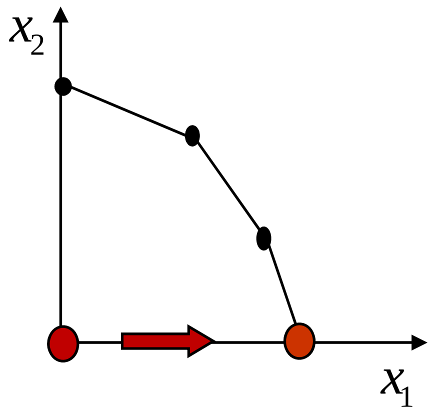
Actualización de las variables BASICAS y la F.O.:

$$x_B = B^{-1} b$$

$$\hat{Z} = c_B^{\ T}\ x_B$$

Ejemplo: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.\overset{\frown}{5} \\ 0 & 1 & -0.8\overset{\frown}{3} \\ 0 & 0 & 0.0\overset{\frown}{5} \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.\overset{\frown}{5} \\ 0 & 1 & -0.8\overset{\frown}{3} \\ 0 & 0 & 0.0\overset{\frown}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4500 \\ 750 \\ 350 \end{bmatrix}$$



Solución <u>1ª iteración</u>: (350, 0) → Función objetivo = -560

Métodología Simplex (ix)

PASOS del método SIMPLEX (i)

① **Inicialización**: Solución básica factible inicial

$$x_B = \hat{b} = B^{-1} b \geq 0$$

$$\hat{z} = c_B{}^T x_B$$

② **Prueba de optimalidad:** Se calculan los costes reducidos

$$\hat{c}_N{}^T = c_N{}^T - c_B{}^T B^{-1} N$$

- Si todos los costes reducidos son ≥ 0, la base es óptima
- Si existe algún coste reducido <0 se selecciona var. básica entrante aquella cuyo coste reducido negativo tenga mayor valor absoluto x_t

PASOS del método SIMPLEX (ii)

③ Iteración

$y_t = B^{-1} a_t$: columna pivote de x_t

$$\frac{\hat{b}_s}{y_{st}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{y_{it}} : y_{it} > 0 \right\}$$: variable básica saliente x_s

Si todas las $y_{it} \le 0$ el problema resulta no acotado

④ Pivotamiento

- Actualización de la matriz B^{-1}
- Actualización del vector de variables básicas x_B
- Volver al paso ②

Métodología Simplex (xi)

Pasos del simplex al problema de artesano:

Iteración 2

$$x_B = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} h_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x_B = \begin{pmatrix} 4500 \\ 750 \\ 350 \end{pmatrix}$$

Costes reducidos:

$$\hat{c}_N^{\,T} = c_N^{\,T} - c_B^{\,T} B^{-1} N = (0, -1.4) - (0, 0, -1.6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.\widehat{5} \\ 0 & 1 & -0.8\widehat{3} \\ 0 & 0 & 0.0\widehat{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 0 & 10 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \left(0.0\widehat{8}, \underline{\underline{-0.8\widehat{6}}}\right)$$

Se selecciona la variable x_2 como variable básica entrante

$$y_t = B^{-1} a_{x_2} = \begin{pmatrix} 16.\widehat{6} \\ 5 \\ 0.3 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_t = \min\left\{ \frac{4500}{16.\widehat{6}}, \frac{750}{5}, \frac{350}{0.3} \right\} = \min\left\{270, \underline{\underline{150}}, 1166.\widehat{6}\right\}$$

Se selecciona la variable h_2 como variable básica saliente

Métodología Simplex (xii)

Pasos del simplex al problema de artesano:

Iteración 2 (cont.)

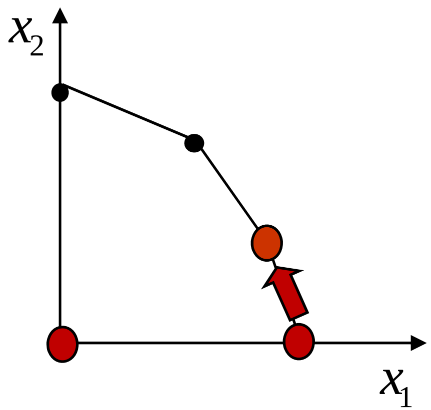
$$x_B = \begin{pmatrix} h_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -3.\widehat{3} & 2.\widehat{2} \\ 0 & 0.2 & -0.1\widehat{6} \\ 0 & -0.0\widehat{6} & 0.\widehat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Solución Iteración 2ª

$$(x_1, x_2) = (300, 150)$$

Función objetivo: -690

Las soluciones van cambiando por vértices adyacentes



La función objetivo siempre mejora o permanece

Métodología Simplex (xiii)

Pasos del simplex al problema de artesano:

Iteración 3

$$x_N = \begin{pmatrix} h_3 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Costes reducidos:

$$\hat{c}_N^{\,T} = c_N^{\,T} - c_B^{\,T} B^{-1} N = (0,0) - (0,-1.4,-1.6) \begin{pmatrix} 1 & -3.\widehat{3} & 2.\widehat{2} \\ 0 & 0.2 & -0.16 \\ 0 & -0.0\widehat{6} & 0.\widehat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\underline{\underline{-0.0\widehat{5}}}, 0.17\widehat{3})$$

Se selecciona la variable h_3 como variable básica entrante

$$y_t = B^{-1} a_{h_3} = \begin{pmatrix} 2.\widehat{2} \\ -0.1\widehat{6} \\ 0.\widehat{1} \end{pmatrix} \qquad \bar{x}_t = \min\left\{ \frac{2000}{2.\widehat{2}}, nulo, \frac{300}{0.\widehat{1}} \right\} = \min\{\underline{\underline{900}},\ nulo,\ 2700\}$$

Se selecciona la variable h_1 como variable básica saliente

UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Métodología Simplex (xiv)

Pasos del simplex al problema de artesano:

Iteración 3 (cont.)

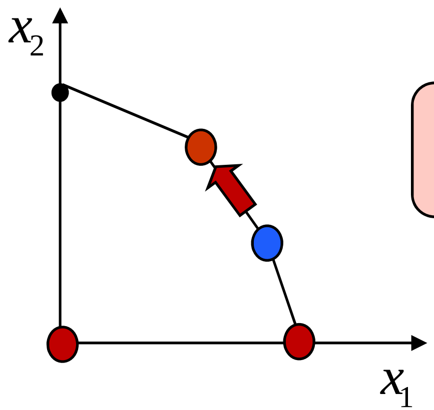
$$x_B = \begin{pmatrix} h_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0.45 & -1.5 & 1 \\ 0.075 & -0.05 & 0 \\ -0.05 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Solución Iteración 3ª

Función objetivo: -740

$$(x_1, x_2) = (200, 300)$$

Sabemos gráficamente que es el óptimo



Falta comprobarlo

Iteración 4

Métodología Simplex (xv)

Pasos del simplex al problema de artesano:

Iteración 4

$$x_B = \begin{pmatrix} h_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad x_B = \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Costes reducidos:

$$\hat{c}_N^{\,T} = c_N^{\,T} - c_B^{\,T} B^{-1} N = (0,0) - (0,-1.4,-1.6) \begin{pmatrix} 0.45 & -1.5 & 1 \\ 0.075 & -0.05 & 0 \\ -0.05 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0.025, 0.09)$$

No hay costes reducidos negativos

Por tanto se ha alcanzado el ÓPTIMO

en la iteración anterior

Métodología Simplex (xvi)

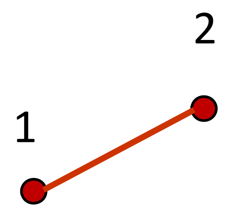
Múltiples óptimos:

Se detectan múltiples óptimos cuando en el óptimo existen variables no básicas cuyos **costes reducidos** son **nulos**

Para que sean diferentes óptimos, la variable no básica con coste reducido nulo ha de tomar valor no nulo al entrar en la base

Ejemplo: Dos soluciones óptimas $\left(x_1^1, x_2^1\right)$ $\left(x_1^2, x_2^2\right)$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad \begin{cases} x_1 = \lambda \cdot x_1^1 + (1-\lambda) \cdot x_1^2 \\ x_2 = \lambda \cdot x_2^1 + (1-\lambda) \cdot x_2^2 \end{cases}$$



Métodología Simplex (xvii)

Forma tabular:

Se expresa el problema de optimización en una tabla con la siguiente estructura:

Var.básicas	z	x_N	x_B	Cotas	
$-z$	-1	c_N^T	c_B^T	0	Función objetivo
x_B	0	N	B	b	Restricciones

Se resta de la función objetivo las restricciones multiplicadas por $c_B^T B^{-1}$

Se multiplican las restricciones por B^{-1}

Var.básicas	z	x_N	x_B	Cotas	
$-z$	-1	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	0	$-c_B^T B^{-1} b$	Costes reducidos
x_B	0	$B^{-1} N$	I	$B^{-1} b$	Valores solución

Metodología simplex (xviii)

Eliminación gaussiana:

Sirve para actualizar la tabla de una a otra iteración

´Se pone un 1 en el elemento pivote y un 0 en el resto de la columna’

- Dividir la fila pivote por el elemento pivote y_{st}
- Restar a las demás filas la nueva fila pivote multiplicada por el elemento que se anula de la columna pivote

Iteración 1

	z	x1	x2	h1	h2	h3	Cotas	Relación	
-z	-1	-1.6	-1.4	0	0	0	0		+1.6
h1	0	10	20	1	0	0	8000	8000/10	-10
h2	0	15	10	0	1	0	6000	6000/15	-15
h3	0	18	6	0	0	1	6300	6300/18	/18

Variable básica saliente

Variable básica entrante

El elemento pivote resulta y_{31}

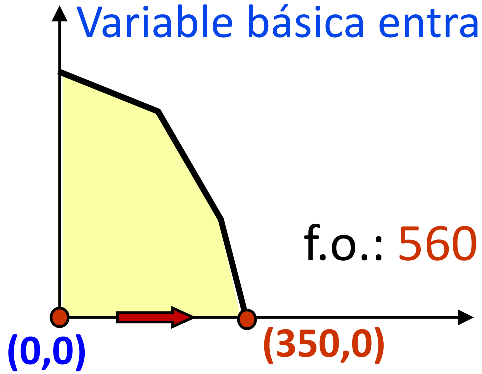
Metodología simplex (xix)

Iteración 2

	z	x1	x2	h1	h2	h3	Cotas	Relación	
-z	-1	0	$\underline{-0.8\widehat{6}}$	0	0	$0.0\widehat{8}$	560		$+0.8\widehat{6}$
h1	0	0	$16.\widehat{6}$	1	0	$-0.\widehat{5}$	4500	$\frac{4500}{16.\widehat{6}}=270$	$-16.\widehat{6}$
h2	0	0	5	0	1	-5/6	750	<u>150</u>	/5
x1	0	1	1/3	0	0	1/18	350	1050	-1/3

Variable básica saliente

Variable básica entrante



El elemento pivote resulta y_{22}

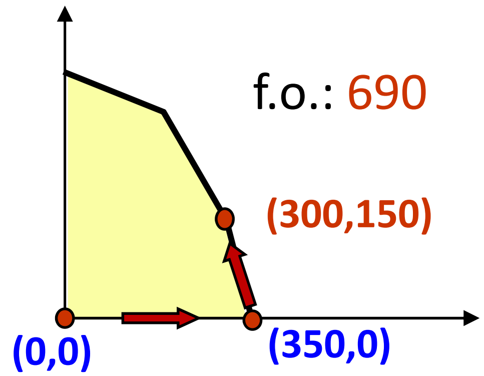
Metodología simplex (xx)

Iteración 3

Variable básica saliente

	z	x1	x2	h1	h2	h3	Cotas	Relación	
-z	-1	0	0	0	$0.17\overset{\frown}{3}$	$-0.0\overset{\frown}{5}$	690		$-0.0\overset{\frown}{5}$
h1	0	0	0	1	$-3.\overset{\frown}{3}$	$2.\overset{\frown}{2}$	2000	900	$/\,2.\overset{\frown}{2}$
x2	0	0	1	0	1/5	-1/6	150	nulo	+1/6
x1	0	1	0	0	-1/15	1/9	300	2700	-1/9

Variable básica entrante



El elemento pivote resulta y_{12}

Metodología simplex (xxi)

Iteración 4

	z	x1	x2	h1	h2	h3	Cotas
-z	-1	0	0	0.025	0.09	0	740
h3	0	0	0	0.45	-1.5	1	900
x2	0	0	1	0.075	-0.05	0	300
x1	0	1	0	-0.05	0.1	0	200

Todos los costes reducidos son positivos o nulos por lo que el óptimo ha sido alcanzado

Solución óptima: (200, 300)
Función objetivo: 740

Metodología simplex (xxii)

Solución básica factible inicial

- En las restricciones ≤ la base está formada por las variables de holgura h_i
- En las restricciones ≥ se introducen variables de exceso e_i y variables artificiales a_i
- En las restricciones = se introducen variables artificiales

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + h_i = b_i$$

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j - e_i + a_i = b_i$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + a_i = b_i$$

Metodología simplex (xxiii)

Solución básica factible inicial (cont.)

- Las variables artificiales y las variables de holgura (en restricciones $\leq$) constituyen la base inicial del Simplex

- Las soluciones con variables artificiales no son factibles

- Si no se pueden eliminar las variables artificiales $\Rightarrow$ problema INFACTIBLE

Metodología simplex (xxiv)

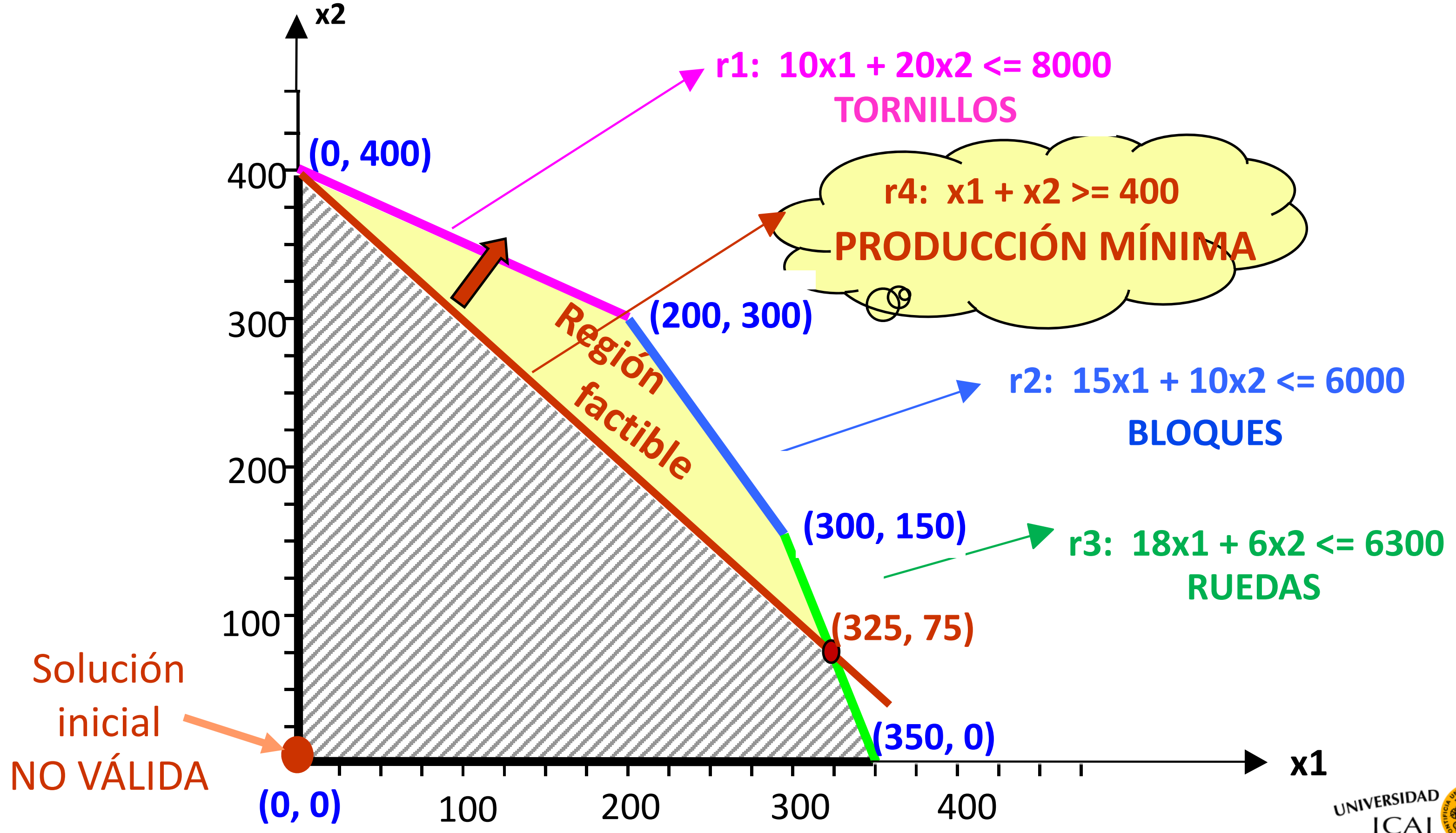
Métodos de anulación de variables artificiales

- **Método de la M mayúscula**
  - Introduce variables artificiales en la f.o. penalizadas con un coeficiente elevado, M
  - Pueden existir problemas numéricos en su resolución
- **Método de las dos fases**
  - La fase I tiene por f.o. la suma de las variables artificiales
  - Si la fase I acaba con la f.o. nula, el problema es factible y se obtiene una solución básica factible
  - La fase II restablece la f.o. original y parte de la solución básica factible del final de la fase I

Metodología simplex (xxv)

Ejemplo del método de las dos fases

En el ejemplo del artesano se introduce la restricción de que el número total de juguetes fabricados debe ser al menos de 400



UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID

Metodología simplex (xxvi)

Ejemplo del artesano(cont.i)

$$Min \;\; a_1$$

$$\begin{aligned} sujeto\ a: \quad & 10x_1 + 20x_2 + h_1 && = 8000 \\ & 15x_1 + 10x_2 + \quad h_2 && = 6000 \\ & 18x_1 + \;6x_2 + \qquad h_3 && = 6300 \\ & x_1 + x_2 \qquad\qquad - e_1 + a_1 && = \;400 \\ & x_1, x_2, h_1, h_2, h_3, e_1, a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Fase I (iteración 0)

Var. básicas	z	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	cotas
-z	-1	0	0	0	0	0	0	1	
h1	0	10	20	1	0	0	0	0	8000
h2	0	15	10	0	1	0	0	0	6000
h3	0	18	6	0	0	1	0	0	6300
a1	0	1	1	0	0	0	-1	1	400

-1

Metodología simplex (xxvii)

iteración 1

Var. básicas	z	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	cotas	**Relación**
-z	-1	-1	-1	0	0	0	1	0	-400	
h1	0	10	20	1	0	0	0	0	8000	800
h2	0	15	10	0	1	0	0	0	6000	400
h3	0	18	6	0	0	1	0	0	6300	350
a1	0	1	1	0	0	0	-1	1	400	400

iteración 2

Var. básicas	z	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	cotas	**Relación**
-z	-1	0	-2/3	0	0	1/18	1	0	-50	
h1	0	0	50/3	1	0	-5/9	0	0	4500	270
h2	0	0	5	0	1	-15/18	0	0	750	150
x1	0	1	1/3	0	0	1/18	0	0	350	1050
a1	0	0	2/3	0	0	-1/18	-1	1	50	75

Metodología simplex (xxviii)

iteración 3

Var. básicas	z	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	cotas
-z	-1	0	0	0	0	0	0	1	0
h1	0	0	0	1	0	$0.8\overset{\frown}{3}$	25	-25	3250
h2	0	0	0	0	1	-15/36	7.5	-7.5	375
x1	0	1	0	0	0	1/12	1/2	-1/2	325
x2	0	0	1	0	0	-1/12	-3/2	3/2	75

Fase II

iteración 1

Var. básicas	z	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	cotas
-z	-1	-1.6	-1.4	0	0	0	0	0	
h1	0	0	0	1	0	$0.8\overset{\frown}{3}$	25	-25	3250
h2	0	0	0	0	1	-15/36	7.5	-7.5	375
x1	0	1	0	0	0	1/12	1/2	-1/2	325
x2	0	0	1	0	0	-1/12	-3/2	3/2	75

+1.6•

+1.4•

Metodología simplex (xxix)

Fase II

iteración 2

Var. básicas	z	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	cotas	Relación
-z	-1	0	0	0	0	$0.01\overline{6}$	-1.3	1.3	625	
h1	0	0	0	1	0	$0.8\overline{3}$	25	-25	3250	130
h2	0	0	0	0	1	-15/36	7.5	-7.5	375	50
x1	0	1	0	0	0	1/12	1/2	-1/2	325	650
x2	0	0	1	0	0	-1/12	-3/2	3/2	75	

iteración 3

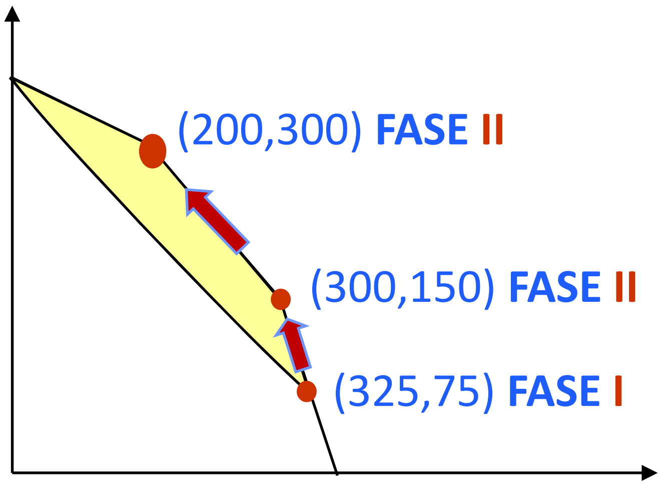
Var. básicas	z	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	cotas	Relación
-z	-1	0	0	0	$0.17\overline{3}$	$-0.0\overline{5}$	0	0	690	
h1	0	0	0	1	$-3.\overline{3}$	$2.\overline{2}$	0	0	2000	900
e1	0	0	0	0	2/15	-1/18	1	-1	50	
x1	0	1	0	0	-1/15	1/9	0	0	300	2700
x2	0	0	1	0	1/5	-1/6	0	0	150	

Metodología simplex (xxx)

Fase II

iteración 4

Var. básicas	z	x1	x2	h1	h2	h3	e1	a1	cotas
-z				0.025	0.09	0	0	0	**740**
h3	0	0	0	0.45	-3/2	1	0	0	900
e1	0	0	0	0.025	0.05	0	1	-1	100
x1	0	1	0	-0.05	0.1	0	0	0	200
x2	0	0	1	0.075	-0.05	0	0	0	300



5

Dualidad

Dualidad (i)

PRIMAL (m x n)	DUAL (n x m)
$\max\limits_{x} z = c^T x$ $Ax \le b$ $x \ge 0$	$\min\limits_{y} y_0 = b^T y$ $A^T y \ge c$ $y \ge 0$
$\max\limits_{x_j} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1,\dots,m$ $x_j \ge 0 \quad j = 1,\dots,n$	$\min\limits_{y_i} y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad j = 1,\dots,n$ $y_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,m$

Dualidad (ii)

PRIMAL (m x n)	DUAL (n x m)
$Max\ Z = 1.6\,x_1 + 1.4\,x_2$ $sujeto\ a:\ 10\,x_1 + 20\,x_2 \leq 8000$ $15\,x_1 + 10\,x_2 \leq 6000$ $18\,x_1 + 6\,x_2 \leq 6300$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Min\ W = 8000\,y_1 + 6000\,y_2 + 6300\,y_3$ $sujeto\ a:\ 10\,y_1 + 15\,y_2 + 18\,y_3 \geq 1.6$ $20\,y_1 + 10\,y_2 + 6\,y_3 \geq 1.4$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$
$Max\ Z = \begin{bmatrix} 1.6 & 1.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 10 \\ 18 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{bmatrix}$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Min\ W = \begin{bmatrix} 8000 & 6000 & 6300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 10 & 15 & 18 \\ 20 & 10 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.4 \end{bmatrix}$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Dualidad (iii)

TABLA DE TRANSFORMACIÓN

min		max
Variable		Restricción
≥ 0	⟷	$\leq$
≤ 0	⟷	$\geq$
no restringida	⟷	$=$
Restricción		Variable
$\geq$	⟷	≥ 0
$\leq$	⟷	≤ 0
$=$	⟷	no restringida

Dualidad (iv)

Teorema y propiedades:

"El dual del problema dual es el problema primal"

Propiedad débil de la dualidad:

Si x es una solución factible del primal e y es solución factible del dual, se verifica que $c^T x \leq b^T y$

Propiedad fuerte de la dualidad:

Si $\hat{x}$ es una solución óptima del primal e $\hat{y}$ es solución óptima del dual, se verifica que $c^T x = b^T y$

Dualidad (v)

Propiedad de las soluciones básicas complementarias

En cada iteración del método simplex se encuentra una solución básica factible del primal y una solución básica complementaria infactible del dual

$$c^T x = b^T y$$

Propiedad de la solución básica óptima complementaria

En la iteración final se encuentra simultáneamente la solución básica óptima $\hat{x}$ del primal y la básica óptima complementaria $\hat{y}$ del dual

$$c^T \hat{x} = b^T \hat{y}$$

$$\hat{z} = \hat{w}$$

En el óptimo, los valores de los costes reducidos de las variables de holgura y de exceso del DUAL corresponden con los valores óptimos del PRIMAL

Dualidad (vi)

Propiedad de la complementariedad de holguras

Si una solución óptima del PRIMAL tiene una variable de holgura o exceso >0, la solución DUAL complementaria tiene valor cero en la variable dual asociada a esa restricción y viceversa

$$c^T x = b^T y$$

Teorema de la dualidad

- Si un problema tiene soluciones óptimas factibles entonces también las tiene su dual
- Si un problema tiene soluciones factibles y función objetivo no acotada, el otro problema no tiene soluciones factibles
- Si un problema no tiene soluciones factibles, el otro o tampoco tiene o no tiene función objetivo acotada

Dualidad (vii)

Fase I

Resolución del problema DUAL del artesano

Iter 0	z	y1	y2	y3	y4	y5	a1	a2	Cotas
-z	-1						1	1	
a1	0	10	15	18	-1	0	1	0	1.6
a2	0	20	10	6	0	-1	0	1	1.4

-1 -1

Forma estándar

Iter 1	z	y1	y2	y3	y4	y5	a1	a2	Cotas	Relación
-z	-1	-30	-25	-24	1	1	0	0	-3.0	
a1	0	10	15	18	-1	0	1	0	1.6	0.16
a2	0	20	10	6	0	-1	0	1	1.4	0.07

Dualidad (viii)

Fase I

Iter 2	z	y1	y2	y3	y4	y5	a1	a2	Cotas	Relación
-z	-1	0	-10	-15	1	-1/2	0	3/2	-0.9	
a1	0	0	10	15	-1	1/2	1	-1/2	0.9	0.06
y1	0	1	1/2	3/10	0	-1/20	0	1/20	0.07	0.23

Iter 3	z	y1	y2	y3	y4	y5	a1	a2	Cotas
-z	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
y3	0	0	2/3	1	-1/15	1/30	1/15	-1/30	0.06
y1	0	1	3/10	0	1/50	-3/50	-1/50	3/50	0.052

Solución inicial factible

Dualidad (ix)

Fase II

-8000

-6300

Iter 1	z	y1	y2	y3	y4	y5	a1	a2	Cotas
-z	-1	8000	6000	6300	0	0	0	0	0
y3	0	0	2/3	1	-1/15	1/30	1/15	-1/30	0.06
y1	0	1	3/10	0	1/50	-3/50	-1/50	3/50	0.052

Función objetivo original

Iter 2	z	y1	y2	y3	y4	y5	a1	a2	Cotas	Relación
-z	-1	0	-600	0	260	270	-260	-270	-794	
y3	0	0	2/3	1	-1/15	1/30	1/15	-1/30	0.06	0.09
y1	0	1	3/10	0	1/50	-3/50	-1/50	3/50	0.052	$0.17\overset{\frown}{3}$

Forma estándar

Dualidad (ix)

Fase II

Iter 3	z	y1	y2	y3	y4	y5	a1	a2	Cotas
-z	-1	0	0	900	200	300	-200	-300	-740
y2	0	0	1	3/2	-1/10	1/20	1/10	-1/20	0.09
y1	0	1	0	-9/20	1/20	-3/40	-1/20	3/40	0.025

Solución ÓPTIMA (Costes reducidos ≥ 0 en variables no artificiales)

- Los costes reducidos de las variables de holgura y exceso del DUAL son las soluciones óptimas de las variables del PRIMAL
- Los costes reducidos de las variables del DUAL son las soluciones óptimas de las variables de holgura y exceso del PRIMAL
- Las soluciones óptimas de las variables del DUAL son los costes reducidos de las variables de holgura y exceso del PRIMAL

Dualidad (xi)

Esquemáticamente:

		Variables dual	Variables holgura dual	
Primera Fila	**Costes reducidos**	**Solución variables holgura primal**	**Solución variables primal**	
Resto de filas	**Variables básicas**			**Costes reducidos holgura primal**

		Variables primal	Variables holgura primal	
Primera Fila	**Costes reducidos**	**Solución variables holgura dual**	**Solución variables dual**	
Resto de filas	**Variables básicas**			**Costes reducidos holgura dual**

Solución gráfica
Sensibilidades gráficas
Método Simplex
Metodología Simplex
Dualidad
Análisis de sensibilidad
Método simplex dual

5

Análisis de sensibilidad

Análisis de Sensibilidad (i)

Partiendo de la solución óptima, se estudian los efectos sobre ella debidos a cambios en cualquier parámetro del problema: A, b ó c

$$\overline{B}, \overline{N}, \overline{C_B}^T, \overline{C_N}^T$$

Fases:

① Introducción de los cambios en la tabla simplex

② Adecuación a la forma estándar de la tabla

③ Prueba de factibilidad (var. básicas no negativas)

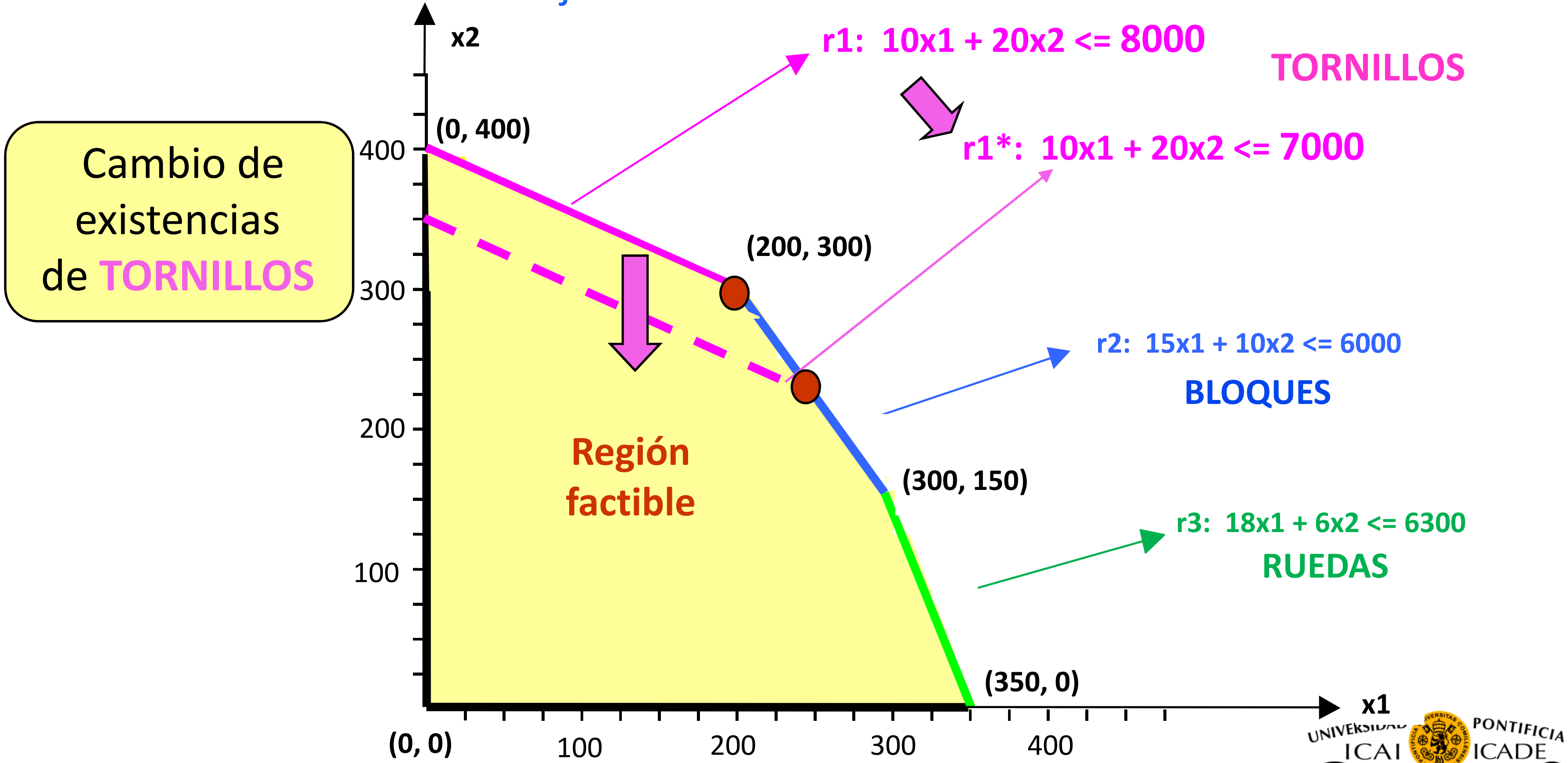
④ Prueba de optimalidad (costes reducidos no negativos var. no básicas)

⑤ Nueva iteración método simplex o método simplex dual

Análisis de Sensibilidad (ii)

Cambios en cotas de las restricciones

- Pueden afectar a:
  - la factibilidad de la solución óptima alcanzada anterior
  - la función objetivo



Análisis de Sensibilidad (iii)

Cambios en cotas de las restricciones (cont.)

$$\boxed{X_B = B^{-1} \cdot \bar{b} = B^{-1} \cdot (b + \Delta b) = X_B^0 + \Delta X_B}$$

Última tabla simplex

$$X_B = \begin{pmatrix} h_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.45 & -1.5 & 1 \\ 0.075 & -0.05 & 0 \\ -0.05 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 8000 \\ 6000 \\ 6300 \end{pmatrix}$$

$$X_B^0 = \begin{pmatrix} 900 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} \qquad \Delta X_B = \begin{pmatrix} 0.45 \cdot \Delta b_1 - 1.5 \cdot \Delta b_2 + \Delta b_3 \\ 0.075 \cdot \Delta b_1 - 0.05 \cdot \Delta b_2 \\ -0.05 \cdot \Delta b_1 + 0.1 \cdot \Delta b_2 \end{pmatrix}$$

Rango de variación $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3$

$$\begin{cases} h_3 = 900 + 0.45 \cdot \Delta b_1 - 1.5 \cdot \Delta b_2 + \Delta b_3 \geq 0 \\ x_2 = 300 + 0.075 \cdot \Delta b_1 - 0.05 \cdot \Delta b_2 \geq 0 \\ x_1 = 200 - 0.05 \cdot \Delta b_1 + 0.1 \cdot \Delta b_2 \geq 0 \end{cases}$$

Análisis de Sensibilidad (iv)

Cambios en coeficientes de variables no básicas

- No afectan a la factibilidad pero sí a la optimalidad
- Los coeficientes de las variables no básicas son:

$$\hat{C}_N{}^T = \overline{C}_N{}^T - C_B{}^T \cdot B^{-1} \cdot \overline{N}$$

- Si $\hat{C}_N{}^T \geq 0$ la solución sigue siendo óptima
- Si $\hat{C}_N{}^T < 0$ la var. no básica es var. básica entrante

$$\hat{C}_N{}^T = \overline{C}_N{}^T - C_B{}^T \cdot B^{-1} \cdot N \geq 0 \Rightarrow$$

Intervalo de variación de C_N para el cual se mantiene solución óptima

Análisis de Sensibilidad (v)

Introducción de una variable nueva

- Se calcula su coste reducido:
  - Si es $\leq$ 0 se introduce en la base y
  - Se calcula $B^{-1} \cdot a_j$ añadiéndose como columna de la tabla
  - Se continúan las iteraciones del simplex

Análisis de Sensibilidad (vi)

Cambio en un coeficiente en la f.o. de una variable básica

$$\hat{C}_N{}^T = C_N{}^T - \overline{C}_B{}^T \cdot B^{-1} \cdot N$$

Si algún coste reducido resulta $\leq$ 0 entonces se sigue iterando

Ejemplo:

El artesano juguetero puede devolver al proveedor de tornillos, bloques y ruedas aquellos componentes que le sobren. El proveedor le devuelve 0.01 €/tornillo, 0.05 €/bloque y 0.03 €/rueda.

Partiendo de la solución óptima anterior ¿Cambia el óptimo?

Análisis de Sensibilidad (vii)

Ejemplo (cont.):

Cambian coeficientes de variables básicas y no básicas

$$\hat{C}_N^{\,T} = \overline{C}_N^{\,T} - \overline{C}_B^{\,T} \cdot B^{-1} \cdot N$$

$$X_N = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad \overline{C}_N^{\,T} = (-0.01, -0.05) \quad X_B = \begin{pmatrix} h_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \overline{C}_B^{\,T} = (-0.03, -1.6, -1.4)$$

$$\hat{C}_N^{\,T} = (-0.01, -0.05) - (-0.03, -1.4, -1.6) \begin{pmatrix} 0.45 & -1.5 & 1 \\ 0.075 & -0.05 & 0 \\ -0.05 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0.0285, -\underline{\underline{0.005}})$$

La solución no es óptima, la h_2 es variable básica entrante

Análisis de Sensibilidad (viii)

Ejemplo (cont.):

	z	x1	x2	h1	h2	h3	Cotas	Relación
-z	-1	0	0	0.0285	-0.005	0	767	
h3	0	0	0	0.45	-1.5	1	900	
x2	0	0	1	0.075	-0.05	0	300	
x1	0	1	0	-0.05	0.1	0	200	2000

	z	x1	x2	h1	h2	h3	Cotas
-z	-1	0.05	0	0.026	0	0	777
h3	0	15	0	1.2	0	1	1200
x2	0	0.5	1	0.05	0	0	400
h2	0	10	0	-0.5	1	0	2000

F.O.: **777**

Solución óptima: (x1,x2,h1,h2,h3) = (0, 400, 0, 2000, 1200)

Análisis de Sensibilidad (ix)

Cambio en un coeficiente de una variable básica en B

- La tabla se pone en la forma estándar con eliminación gaussiana
- Estos cambios pueden hacer perder factibilidad y/o optimalidad

Introducción de nuevas restricciones

- Se comprueba si la nueva restricción se satisface con la solución
  - Si la satisface, la solución sigue siendo óptima
  - Si no la satisface, se introduce la restricción en la tabla
    - Su variable de holgura o artificial es variable básica entrante
    - Se aplica eliminación gaussiana y se sigue con"simplex dual"

Nota: La variable básica asociada a la nueva restricción toma valores ≤ 0

6

Método simplex dual

Método simplex dual (i)

- Es otro procedimiento análogo al método simplex
- Se aplica a problemas con formulación primal o dual
- Se utiliza cuando:
  - Se introducen muchas variables artificiales para la primera solución básica factible
  - La solución óptima por análisis de sensibilidad se hace infactible
- Funcionamiento
  - Manejan soluciones básicas que cumplen optimalidad según el método simplex (costes reducidos ≥ 0)
  - Estas soluciones son infactibles (variables básicas ≤ 0)

Método simplex dual (ii)

Procedimiento:

① Inicialización: Se parte de una solución básica que cumpla el criterio de optimalidad (costes reducidos ≥ 0)

Si la solución resulta factible, se ha alcanzado el óptimo, si no se itera

② Iteración:

- Se determina la variable básica saliente (variable con valor negativo de mayor valor absoluto)
- Se determina la variable básica entrante (aquella variable con coeficiente < 0 en la fila pivote que minimice el valor absoluto entre el coste reducido y el coeficiente de la fila pivote)

$$\min_{1\leq j\leq n}\left\{\left|\frac{c_j - z_j}{y_{kj}}\right| : y_{kj} < 0\right\}$$

Si no hubiera elementos < 0 el dual sería no acotado y el primal infactible

③ Se actualiza la tabla por eliminación gaussiana y vuelve al ② hasta que la solución resulta factible y por tanto óptima

Método simplex dual (iii)

Ejemplo:

Resolver el problema dual del artesano con el método simplex dual

$$\begin{aligned}
&Min \quad 8000\cdot y_1 + 6000\cdot y_2 + 6300\cdot y3 \\
&sujeto\ a: \\
&\qquad 10\cdot y_1 + 15\cdot y_2 + 18\cdot y_3 \geq 1.6 \\
&\qquad 20\cdot y_1 + 10\cdot y_2 + \ 6\cdot y_3 \geq 1.4 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Sin variables artificiales

$$\begin{aligned}
&Min \quad 8000\cdot y_1 + 6000\cdot y_2 + 6300\cdot y3 \\
&sujeto\ a: \\
&10\cdot y_1 + 15\cdot y_2 + 18\cdot y_3 - y_4 \qquad = 1.6 \\
&20\cdot y_1 + 10\cdot y_2 + \ 6\cdot y_3 \qquad - y_5 = 1.4 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Min \quad 8000\cdot y_1 + 6000\cdot y_2 + 6300\cdot y3 \\
&sujeto\ a: \\
&-10\cdot y_1 - 15\cdot y_2 - 18\cdot y_3 + y_4 \qquad = -1.6 \\
&-20\cdot y_1 - 10\cdot y_2 - \ 6\cdot y_3 \qquad + y_5 = -1.4 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Método simplex dual (iv)

Ejemplo(cont.i):

	z	y1	y2	y3	y4	y5	Cotas
Relación		800	400	350	-	0	
-z	-1	8000	6000	6300	0	0	0
y4	0	-10	-15	-18	1	0	-1.6
y5	0	-20	-10	-6	0	1	-1.4

	z	y1	y2	y3	y4	y5	Cotas
Relación		270	150	-	1050	-	
-z	-1	4500	750	0	350	0	-560
y3	0	$0.\overset{\frown}{5}$	$0.8\overset{\frown}{3}$	1	-1/18	0	$0.0\overset{\frown}{8}$
y5	0	$-16.\overset{\frown}{6}$	-5	0	-1/3	1	$-0.8\overset{\frown}{6}$

Método simplex dual (v)

Ejemplo(cont.ii):

	z	y1	y2	y3	y4	y5	Cotas
Relación		900	-	-	2700	900	
-z	-1	2000	0	0	300	150	-690
y3	0	$-2.\overline{2}$	0	1	$-0.\overline{1}$	$-0.1\overline{6}$	$-0.0\overline{5}$
y2	0	$3.\overline{3}$	1	0	$-0.0\overline{6}$	-0.2	$0.17\overline{3}$

Valores óptimos primal

	z	y1	y2	y3	y4	y5	Cotas
-z	-1	0	0	900	200	300	-740
y1	0	1	0	-0.45	0.05	-0.075	0.025
y2	0	0	1	1.5	-0.1	0.05	0.09

Costes reducidos primal

ÓPTIMO

Programación lineal paramétrica

- **Cambios simultáneos en coeficientes de la f.o.**

Se supone una función objetivo $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Se desea conocer el cambio en la función objetivo $\hat{z}(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j + \alpha_j \theta\right) x_j$

al modificar θ, conocidos los pesos α_j para cada variable x_j

1. Resolver con $\theta = 0$ con el método simplex
2. Mediante análisis de sensibilidad introducir $\Delta c_j = \alpha_j \theta$
3. Modificar la ecuación de la f.o. para hacer 0 los coeficientes de las variables básicas en la f.o.. Aplicar la condición de optimalidad (coef. variables no básicas >= 0) para obtener el rango de θ que mantiene la misma base óptima
4. Incrementar θ hasta anular un coeficiente de variable no básica. Ésta será la variable básica entrante
5. Encontrar la nueva base óptima aplicando el simplex y volver a 3

Se cambia el óptimo pero no la región factible

Programación lineal paramétrica

- **Cambios simultáneos en cotas de las restricciones**

  Se desea conocer el cambio en la f.o. óptima $\hat{z}$ al cambiar θ en las cotas de las restricciones $\Delta b_i = \alpha_i \theta$ supuestos conocidos los pesos α_i

  Los cambios en las cotas son equivalentes a cambios en coeficientes de la función objetivo en el problema dual

  1. Resolver con el simplex para $\theta = 0$
  2. Mediante análisis de sensibilidad introducir $\Delta b_i = \alpha_i \theta$
  3. Expresar la condición de factibilidad de las variables básicas o, lo que es equivalente, la condición de optimalidad de las variables del dual (cotas de las restricciones >=0)
  4. Incrementar θ hasta anular las cotas de las restricciones (haciéndose infactible). Esa será la variable básica saliente en el simplex dual
  5. Iterar el algoritmo simplex dual y volver al paso 2

Los distintos valores de θ determinan regiones factibles habiendo en cada θ una de ellas una base óptima. El proceso acaba con un intervalo final de donde ya no cambia la base o bien ya la base resulta infactible