ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Optimización lineal

Andrés Ramos
Universidad Pontificia Comillas
http://www.iit.comillas.edu/aramos/
Andres.Ramos@comillas.edu

CONTENIDO

- ➢ INTRODUCCIÓN
- ❑ MÉTODO SIMPLEX
- ❑ ADDITIONAL DEVELOPMENTS (master)
- ❑ DUALIDAD
- ❑ ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
- ❑ INTERIOR POINT METHOD (master)
- ❑ COMPARISON AMONG CPLEX ALGORITHMS (master)

Programación lineal. *Linear programming* LP

- Es la aplicación por excelencia de la IO, en particular de la optimización. En cada momento se están ejecutando miles de aplicaciones basadas en LP. Éstas utilizan en cada instante más tiempo de ordenador que los demás tipos de problemas de optimización simultáneamente.
- (LP) L de Lineal: todas las ecuaciones involucradas en el problema matemático son *lineales*.
- Ejemplo característico: Asignación de recursos limitados, es decir, selección de las decisiones (niveles) óptimas que son necesarias para realizar las actividades.
  - ✓ Explotación de la generación eléctrica: selección de las potencias producidas por cada grupo para que el coste variable de la operación sea mínimo.

Ejemplo: planificación de la producción

Vidriería S.A. fabrica productos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas. Tiene tres fábricas. La fábrica 1 produce marcos de aluminio y piezas metálicas, la 2 marcos de madera y la 3 produce el vidrio y ensambla los productos.

A causa de la pérdida de ingresos, la Dirección ha decidido cambiar la línea de productos. Se van a suprimir los no rentables y a lanzar otros dos nuevos que tienen gran potencial de venta:

- ✓ Producto núm. 1: puerta de vidrio con marco de aluminio
- ✓ Producto núm. 2: ventana de vidrio con marco de madera

El primer producto requiere ser procesado en las fábricas 1 y 3, mientras que el segundo necesita de la 2 y la 3. La División Comercial estima que se pueden vender tantas puertas y ventanas como se puedan producir. Pero, dado que ambos productos compiten por los recursos de la fábrica 3, se desea saber la mezcla que maximiza los beneficios de la empresa.

Planificación de la producción (i)

- *Identificación del problema*:
  - ✓ Determinar las tasas de producción para los dos productos que maximicen el beneficio total de la empresa dadas las capacidades de producción de las fábricas. (Cada producto se fabrica en lotes de 20 unidades y se define la tasa de producción como el número de lotes por semana). Puede no producirse nada de un producto y lo máximo posible de otro.
- *Datos necesarios*:
  - ✓ Número de horas de tiempo de producción disponibles por semana en cada fábrica para los nuevos productos (el resto de tiempo están ocupadas en la fabricación de los productos actuales)
  - ✓ Número de horas de tiempo de producción de cada fábrica necesarias para fabricar cada lote de cada producto
  - ✓ Beneficio neto por lote de cada nuevo producto fabricado. El beneficio por lote se mantiene constante independientemente del número de lotes fabricados.

Planificación de la producción (ii)

	HORAS DE TIEMPO DE PRODUCCIÓN POR LOTE		HORAS DISPONIBLES POR SEMANA
Fábrica	Producto 1	Producto 2	
1	1	-	4
2	-	2	12
3	3	2	18
Beneficio por lote (€)	300	500	

Planificación de la producción (iii)

- *Formulación*

  x_1 = número de lotes por semana del producto 1

  x_2 = número de lotes por semana del producto 2

  z = beneficios por semana (en cientos de €)

$$\begin{array}{llll}
\max & z = 3x_1 + 5x_2 & & \\
x_1 & & & \le 4 \\
 & 2x_2 & & \le 12 \\
3x_1 & +2x_2 & & \le 18 \\
x_1, x_2 \ge 0 & & &
\end{array}$$

- Solución óptima: $(x_1,x_2) = (2, 6)$ $z = 36$

Formulación genérica

Función objetivo lineal

incremento en *z* resultante de un incremento en el nivel de actividad *j*

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$$

$$\max z = c^T x$$

$$Ax \le b$$

$$x \ge 0$$

Matriz de restricciones

cantidad de recurso *i* consumido por cada unidad de actividad *j*

Variables continuas

ACTIVIDADES

Restricciones lineales

RECURSOS

Nomenclatura

- *Función objetivo **lineal**: medida cuantitativa de funcionamiento (bondad) del sistema z*
  - ✓ Beneficios, costes, flujo de mercancías
- ***RECURSOS** m (restricciones **lineales**, **filas**) b_i $i = 1, \ldots, m$* (RHS)
  - ✓ Dinero, máquinas, equipos, vehículos, personal
- ***ACTIVIDADES** n (variables de decisión continuas **reales**, **columnas**) x_j $j=1, \ldots, n$*
  - ✓ Inversiones en proyectos, anuncios en periódicos, mercancías transportadas entre cada pareja origen – destino, producciones de los grupos

Hipótesis

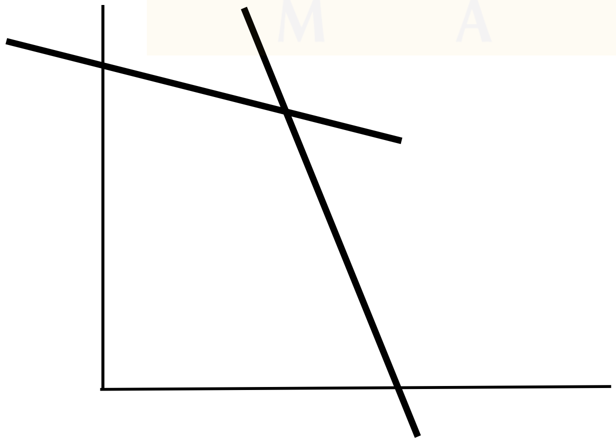
- *Proporcionalidad, linealidad*
  - ✓ La contribución de cada actividad x_j al valor de la función objetivo z es proporcional al nivel de la actividad, $c_j x_j$. La contribución de cada actividad x_j al valor de la parte izquierda de cada restricción es proporcional al nivel de la actividad, $a_{ij} x_j$.
- *Aditividad*
  - ✓ Cada ecuación en un problema LP es la suma de las contribuciones individuales de las respectivas actividades.
- *Divisibilidad, continuidad*
  - ✓ Cualquier variable puede tomar cualquier valor, no necesariamente entero, que satisfaga las restricciones incluyendo las de no negatividad.
- *Certidumbre*
  - ✓ Los parámetros (constantes) de un problema LP se suponen conocidos con certidumbre.

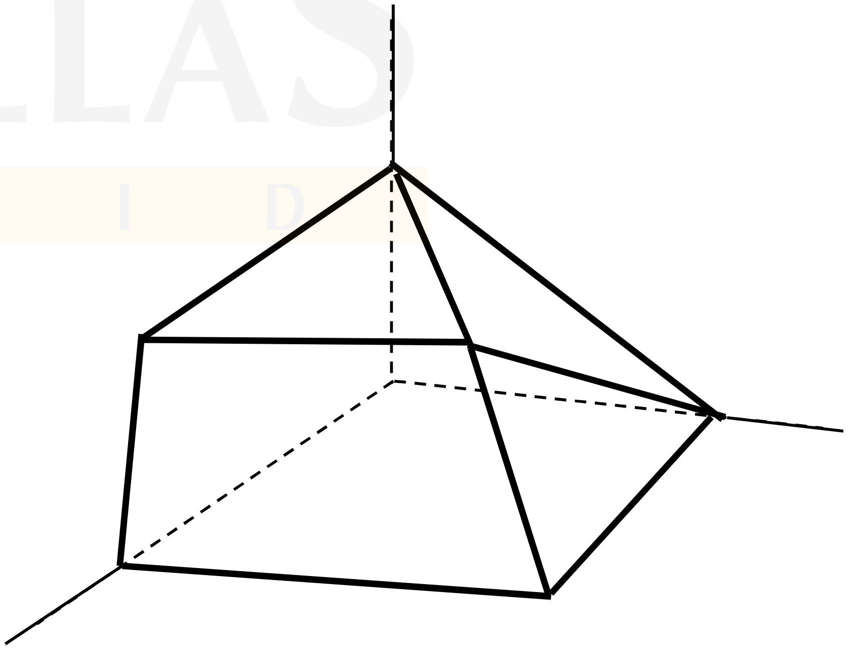
Geometría

- Hiperplano
  - ✓ Cada ecuación del problema. Un hiperplano divide el espacio en dos semiespacios

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

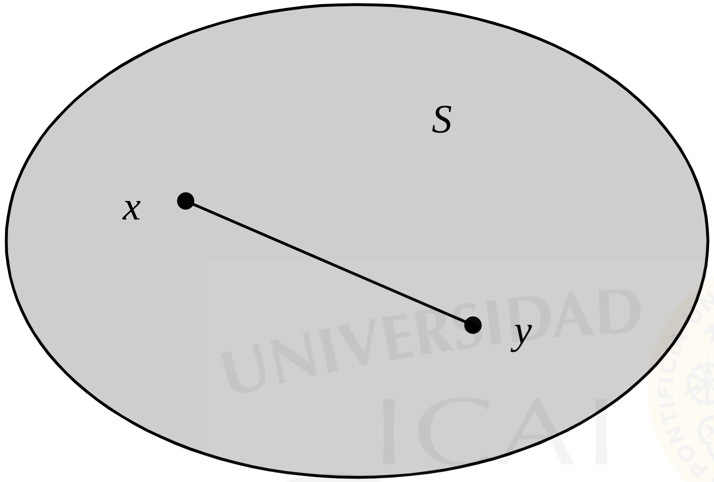
- Poliedro
  - ✓ Región definida por la intersección de un conjunto finito de semiespacios. Un poliedro es un conjunto convexo
- Politopo
  - ✓ Poliedro no vacío y acotado



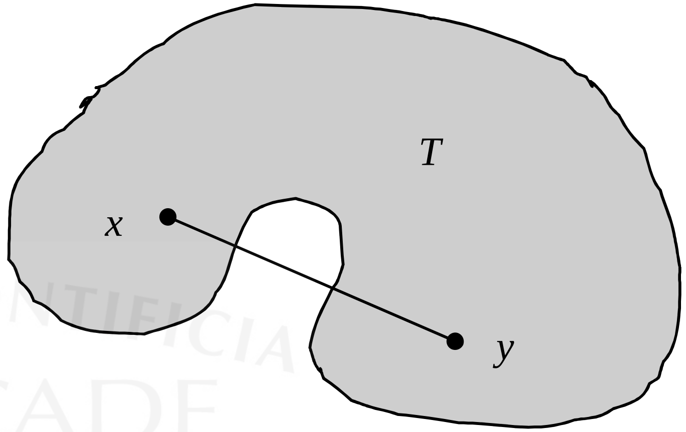


¿Qué tienen en común estos vehículos?

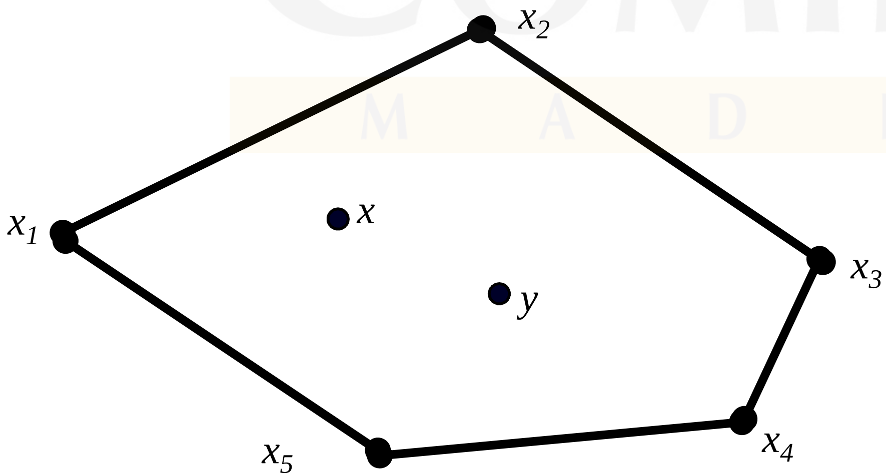
Convexidad (región)



S es convexo



T no es convexo



$$x = \sum_i \lambda_i x_i$$

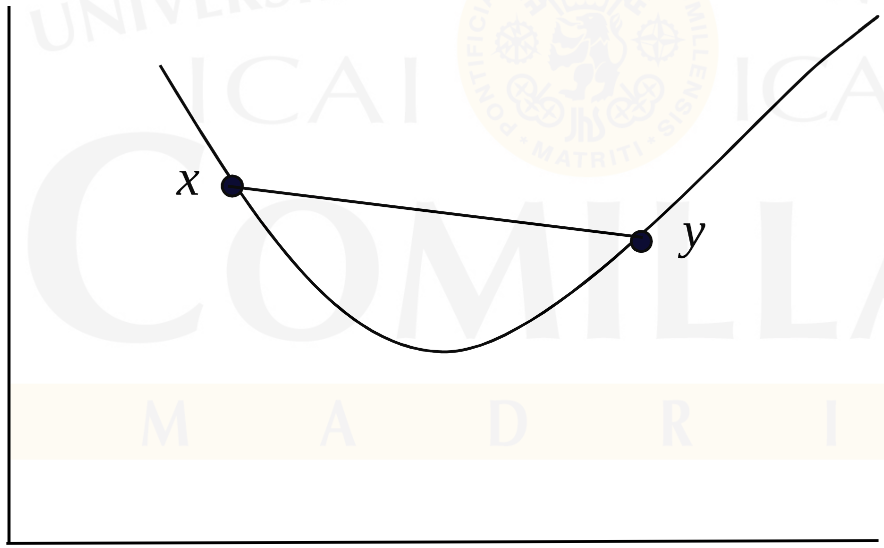
$$\sum_i \lambda_i = 1$$

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$$

Convexidad (función)

- Una función es convexa si cumple

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$



Geometría

- Vértice o punto extremo
  - ✓ Intersección de n hiperplanos.
  - ✓ No puede ponerse como combinación lineal convexa de dos puntos diferentes del conjunto.
  - ✓ Cualquier punto de un politopo se puede expresar como combinación lineal convexa de los vértices del mismo
- Arista
  - ✓ Segmento obtenido por solución de n-1 hiperplanos, siendo sus extremos soluciones factibles vértices
- Contorno
  - ✓ Contiene las soluciones factibles que están en uno o más hiperplanos

Propiedades de las soluciones factibles vértices

- Si admite una solución factible, admite al menos una solución óptima factible. Si la región factible es un politopo, tiene al menos un vértice.
- Si hay sólo una solución óptima ésta debe ser una solución factible vértice. Si hay múltiples (en una región factible acotada) al menos dos deben ser soluciones factibles vértices adyacentes.
- Si admite una solución óptima finita, admite al menos vértice óptimo
- El óptimo está en un vértice del politopo.
- Número finito de soluciones factibles vértices
- Número total de ecuaciones m (de =), número de variables n, $m < n$
- Número de vértices

$$\boxed{C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

- Si m=20 n=50 número máximo = 520 10^6, método simplex examina ≈ 20 vértices

Optimización lineal

- Forma estándar

$$\min_x c^T x$$

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

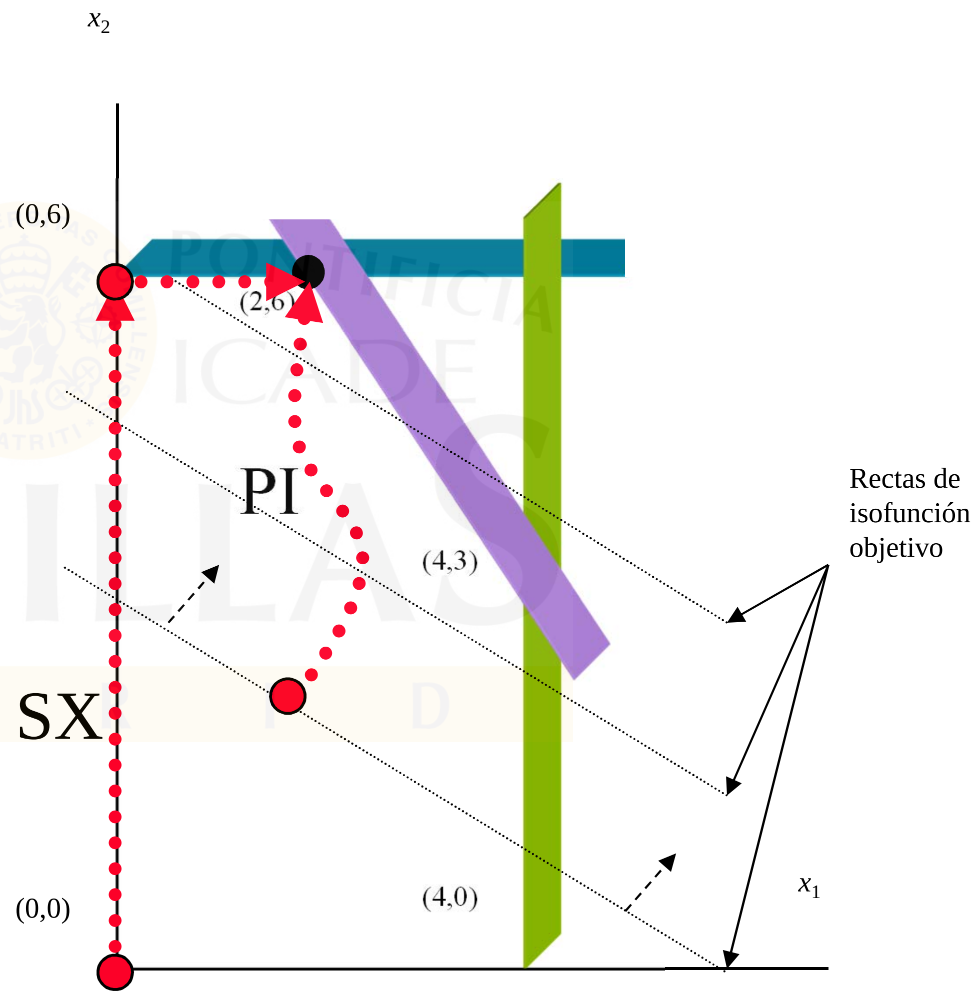
$$b \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

- Métodos de resolución
  - ✓ simplex (primal y dual)
  - ✓ punto interior (primal-dual predictivo-correctivo, proyectivo, escalado afín)

Caso ejemplo

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = 3x_1 + 5x_2 & \\
x_1 & \le 4 \\
2x_2 & \le 12 \\
3x_1 + 2x_2 & \le 18 \\
x_1, x_2 & \ge 0
\end{aligned}
$$



CONTENIDO

- INTRODUCCIÓN
- ➤ MÉTODO SIMPLEX
- ADDITIONAL DEVELOPMENTS (master)
- DUALIDAD
- ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
- INTERIOR POINT METHOD (master)
- COMPARISON AMONG CPLEX ALGORITHMS (master)

Método simplex. Conceptos básicos

- Es uno de los diez algoritmos más influyentes en el desarrollo de la ciencia y de la ingeniería del siglo XX

- Procedimiento algebraico con conceptos geométricos subyacentes. Genera una secuencia de iteraciones factibles moviéndose de un vértice a otro adyacente con mejor función objetivo.
- Se centra únicamente en las soluciones factibles vértices.
- Cuando es posible la inicialización se elige el origen como primer vértice.
- Dado un vértice es rápido moverse a uno adyacente. Para alcanzar la solución el simplex se mueve por las aristas de la región factible.

Método simplex. Algoritmo gráfico

1. *Inicialización*

   Elección de un vértice como solución inicial

2. *Prueba de optimalidad con la solución actual*
   - Si es óptima (las tasas de mejora de la f.o. en las aristas del vértice actual son negativas) se acaba.
   - Si no es óptima se sigue a 3.

3. *Iteración*
   - Movimiento hacia un vértice adyacente que sea una solución mejor
   - Se elige entre las aristas del vértice la que lleva a una mejora mayor en la f.o.
   - Se mueve hasta encontrar una nueva restricción
   - Se determina el nuevo vértice

4. Ir a 2.

Transformación a forma estándar

- Se supone un problema formulado en su forma estándar
- Existen transformaciones para convertir un problema cualquiera a su forma estándar

$$\begin{array}{lrr} \max & z = 3x_1 + 5x_2 & \\ x_1 & & \le 4 \\ & 2x_2 & \le 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & \le 18 \\ & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{llllll} \min z = -3x_1 - 5x_2 & & & & & \\ x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\ & 2x_2 & & +x_4 & & = 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \ge 0 \end{array}$$

- En cada restricción de tipo $\le$ se añade una variable de holgura.
- En cada restricción de tipo $\ge$ se añade una variable de exceso.

- Sistema de m ecuaciones (3) con n incógnitas (5), donde $m < n$

Transformación a forma estándar (i)

❑ Función objetivo

- ✓ Dirección de maximización se trata como una minimización del valor negativo.

$$\boxed{\max z = -\min -z}$$

❑ Restricciones

- ✓ En las restricciones de tipo $\leq$ se introduce una *variable de holgura* $\boxed{u_i \geq 0}$

$$\boxed{\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + u_i = b_i}$$

- ✓ En las restricciones de tipo $\geq$ se introduce una *variable de exceso* $\boxed{v_i \geq 0}$

$$\boxed{\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \Rightarrow \sum_j a_{ij} x_j - v_i = b_i}$$

Transformación a forma estándar (ii)

❑ Variables

- ✓ Si una variable es negativa y no acotada inferiormente $\boxed{-\infty \le x_j \le 0}$ simplemente se utiliza su valor opuesto $\boxed{x_j = -y_j}$ siendo $\boxed{0 \le y_j \le \infty}$

- ✓ Si la variable negativa está acotada inferiormente por un valor $\boxed{L_j < 0}$ $\boxed{L_j \le x_j \le 0}$ se desplaza en dicha cantidad $\boxed{x_j = y_j + L_j}$ siendo $\boxed{0 \le y_j \le -L_j}$

- ✓ Si la variable es libre (no acotada inferior ni superiormente, $\boxed{-\infty \le x_j \le \infty}$) se sustituye por dos variables que corresponderán a su componente positiva y negativa. $\boxed{x_j = x_j^+ - x_j^-}$ Siendo $\boxed{0 \le x_j^+ \le \infty}$ $\boxed{0 \le x_j^- \le \infty}$

Caso ejemplo

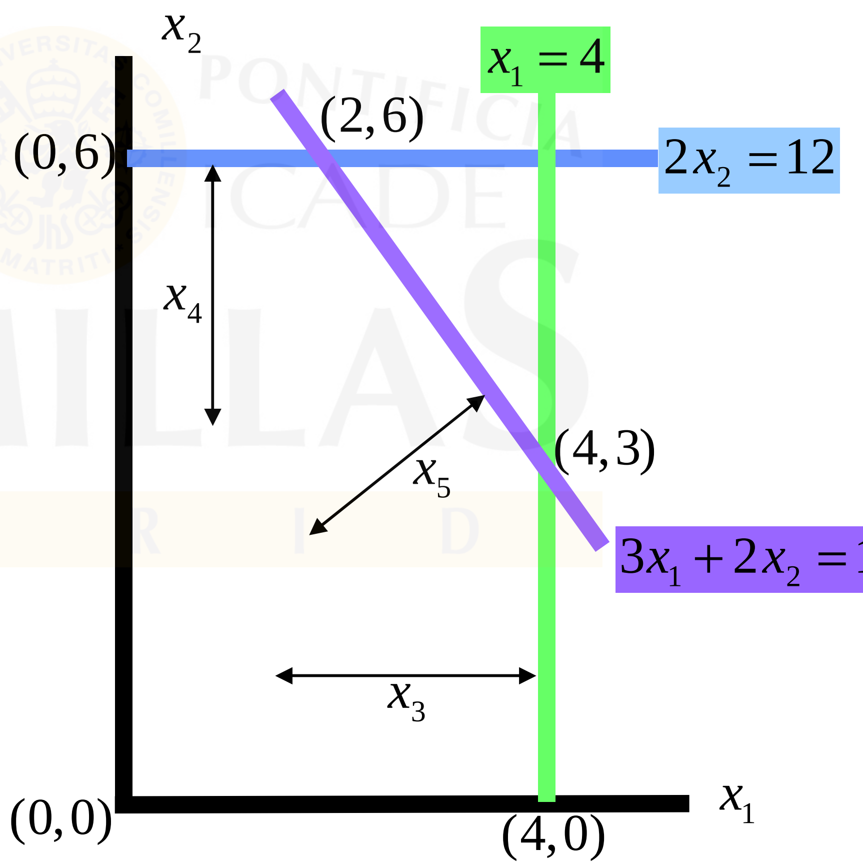
$$
\begin{array}{llllll}
\min z = -3x_1 - 5x_2 & & & & & \\
x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\
 & 2x_2 & & +x_4 & & = 12 \\
3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
c = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}
\qquad
A = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot \\ 3 & 2 & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}
\qquad
b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}
$$

Variables de holgura y exceso

- Significado: distancia a la restricción correspondiente
- Variable holgura = 0 → restricción activa

$$\begin{array}{llllll}
\min z = -3x_1 - 5x_2 & & & & & \\
x_1 & & +x_3 & & & = 4 \\
 & 2x_2 & & +x_4 & & = 12 \\
3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = 18 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}$$



Solución básica

- Si se fijan *n-m* variables a 0, el resto (*m*) quedan determinadas por el sistema de ecuaciones

$$\boxed{x_1 = x_2 = 0} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 12 - 2x_2 \\ x_5 &= 18 - 3x_1 - 2x_2 \end{aligned}}$$

- Variables con valor = 0, no básicas x_1, x_2
- Variables con valor ≠ 0, básicas x_3, x_4, x_5
- Esto es un vértice del poliedro

- Partición: separación entre variables básicas y no básicas

Partición

***

$$x^T = [x_B \quad x_N]^T$$

$$A = [B \quad N]$$

$$c^T = [c_B \quad c_N]^T$$

$$x_B \in \mathbb{R}^m$$

$$x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$B \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

$$N \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$$

$$c_B \in \mathbb{R}^m$$

$$c_N \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$Ax = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}(b - Nx_N) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_N &\equiv 0 \\ x_B &= \hat{b} = B^{-1}b \end{aligned}}$$

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1} b + \left[c_N^T - c_B^T B^{-1} N \right] x_N$$

$$\boxed{\hat{z} = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B}$$

Partición

- Dada una base (partición) se puede calcular:
  - ✓ el valor de las variables básicas y no básicas y
  - ✓ el valor de la función objetivo
- Columnas de la matriz base son los vectores ortogonal a los planos correspondientes
- Calcular el valor de las variables básicas:
  - ✓ Resolver un sistema de ecuaciones lineales
  - ✓ Invertir una matriz

Efecto de incremento de variable no básica

- ¿Qué pasa si se aumenta el valor de una variable no básica, por ejemplo, x_2?
- Restricciones:
  - ✓ Las variables básicas pueden cambiar

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 12 - 2x_2 \\ x_5 &= 18 - 3x_1 - 2x_2 \end{aligned}}$$

  - ✓ Mantener factibilidad: interesa que siempre se cumpla la restricción de $x_j \geq 0$
- Función objetivo
  - ✓ La función objetivo puede cambiar

$$\boxed{z = -3x_1 - 5x_2}$$

  - ✓ Mejorara la f.o.: Interesa que mejore

- ¿Qué significa aumentar una variable no básica?
  - ✓ Moverse por una arista del poliedro

Adyacencia

- Dos soluciones factibles vértices son adyacentes si la línea que los conecta es una arista, es decir, si todas excepto una de sus variables no básicas son iguales. Cada solución factible vértice tiene *n-m* soluciones factibles vértices adyacentes.
- Moverse de una solución básica factible a otra adyacente es cambiar de una variable no básica a básica y al contrario para otra variable

Iteración del simplex

1. Determinar en cuánto mejora la f.o. si se aumenta marginalmente cada variable no básica
2. Elegir la variable no básica que más mejora la f.o.
3. Incrementarla al máximo sin violar la condición $\boxed{x_j \geq 0}$, es decir hasta que alguna variable básica se haga 0.
4. Intercambiar la variable no básica por la variable básica

Coste reducido

- Definimos:

$$w^T \equiv c_B^T B^{-1}$$

$$Y \equiv B^{-1} N$$

$$\hat{c}_N^T \equiv c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - w^T N = c_N^T - c_B^T Y$$

- Particularizando para una variable no básica concreta

$$\hat{c}_j \equiv c_j - c_B^T B^{-1} a_j = c_j - w^T a_j = c_j - c_B^T y_j = c_j - z_j$$

- Coste reducido $\hat{c}_j = c_j - z_j$: derivada direccional de una variable no básica. Es decir, cuánto aumenta la f.o. si aumenta marginalmente la variable no básica

$$z = \hat{z} + \sum_{j \in I_N} \hat{c}_j x_j = \hat{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

- Criterio de selección: variable no básica con coste reducido negativo de mayor valor absoluto, variable básica entrante.

Costes reducidos

- Si el coste reducido de una variable no básica es cero en la solución óptima entonces pueden existir múltiples soluciones óptimas, siendo al menos dos de ellas soluciones vértices.
- En el óptimo de un problema de minimización todos los costes reducidos de las variables no básicas son positivos o nulos.
- Los costes reducidos de las variables básicas son cero.

Pivotamiento

- Intercambio entre variables en la partición
  - ✓ Incremento de la variable no básica, variable básica entrante x_t
  - ✓ Modificación de las variables básicas
  - ✓ Determinación de variable básica que se hace 0, variable básica saliente

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 \\ x_4 &= 12 - 2x_2 \\ x_5 &= 18 - 3x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

- Sea a_t la columna de la matriz A asociada a la VBE x_t
- Sea $y_t = B^{-1}a_t$

$$(x_B)_i = \hat{b}_i - y_{it}x_t \qquad x_t = \hat{b}_i / y_{it} \qquad y_{it} > 0 \qquad \hat{b}_i > 0$$

- La variable x_t puede aumentar su valor hasta $\overline{x}_t = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{y_{it}} : y_{it} > 0 \right\}$
- Nueva función objetivo $\hat{z} = \hat{z} + \hat{c}_t \overline{x}_t$
- Nuevos valores de las variables básicas $x_B = \hat{b} - y_t \overline{x}_t$

Método simplex (i)

1. *Inicialización*

   ✓ Se supone que se dispone de una matriz base B correspondiente a una *solución básica factible inicial* $x_B = \hat{b} = B^{-1}b \geq 0$ y una función objetivo $\hat{z} = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B$

2. *Prueba de optimalidad*

   ✓ Cálculo de *costes reducidos* $\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T Y$. Si todos los costes reducidos son no negativos la base actual es óptima. En caso contrario, se selecciona como *variable básica entrante* VBE x_t una variable con coste reducido estrictamente negativo.

   ✓ La prueba de optimalidad es local pero como los problemas de programación lineal son convexos, la solución óptima será global.

3. *Iteración*

   ✓ Sea $y_t = B^{-1} a_t$, la *columna pivote* t correspondiente a la variable básica entrante. Se busca la *fila pivote* s que verifica

   $$\frac{\hat{b}_s}{y_{st}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{y_{it}} : y_{it} > 0 \right\}$$

   y determina la *variable básica saliente* VBS x_s y el *elemento pivote* y_{st}.

   ✓ Si $y_{it} \leq 0$ para toda fila i entonces el problema es no acotado.

Método simplex (ii)

4. *Pivotamiento*

- ✓ Actualización de la matriz B^{-1} y del vector de variables básicas y volver al paso 2.

Paralelismo entre interpretación geométrica y algebraica

1. Vértice factible inicial	1. Solución básica factible inicial
2. Selección de arista	2. Selección de variable básica entrante
3. Movimiento a lo largo de la arista	3. Incremento de la variable básica entrante
4. Alcanzar un nuevo vértice adyacente	4. La variable básica saliente se hace cero
5. Nuevo vértice factible	5. Nueva solución básica factible

Maximización, múltiples óptimos, convergencia

- El método simplex maneja dirección de maximización cambiando criterio de optimalidad ($\boxed{\hat{c}_N^T \leq 0}$) y criterio de entrada en la base (aquélla con coste reducido estrictamente positivo de mayor valor).
- Múltiples óptimos (SOLUCIONES ALTERNATIVAS)
  - ✓ Cuando existe al menos variable no básica con coste reducido 0 y entra en la base con valor diferente de 0. Estas soluciones se pueden identificar eligiendo éstas como variables básicas entrantes.
  - ✓ Cada solución óptima es combinación lineal convexa de soluciones factibles vértices (soluciones básicas factibles óptimas).
- Convergencia asegurada si no hay degeneración.

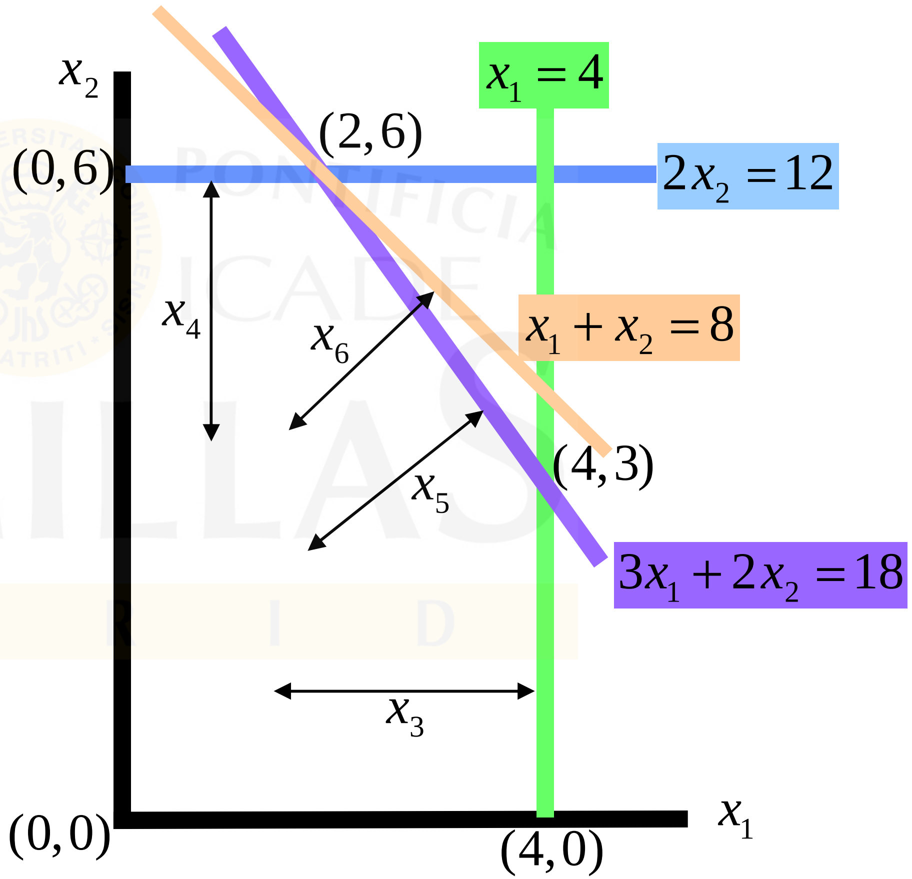
Casos especiales

- Conflicto entre variables básicas entrantes
  - ✓ Variables con el mismo coste reducido en la ecuación de la f.o., se puede elegir cualquiera
- Conflicto entre variables básicas salientes, DEGENERACIÓN
  - ✓ Variables básicas que se hacen simultáneamente 0 al incrementar la variable básica entrante. Las variables básicas no salientes toman valor 0 (degeneradas).
  - ✓ Si estas variables básicas degeneradas siguen con valor 0 en otra iteración la variable básica entrante no puede incrementar su valor y tampoco la f.o.
  - ✓ Si la f.o. no se incrementa se puede producir un CICLO (moverse por una secuencia de bases que definen el mismo punto extremo). Resoluble mediante procedimientos especiales (método lexicográfico).
- Inexistencia de variable básica saliente, SOLUCIÓN NO ACOTADA
  - ✓ Variable básica entrante puede incrementarse indefinidamente sin anular ninguna variable básica actual. Los coeficientes de la columna pivote son negativos o cero.

Degeneración

- La variable x_6 es degenerada (variable básica con valor 0)

$$
\begin{array}{llllllll}
\min z = -3x_1 - 5x_2 & & & & & & & \\
x_1 & & +x_3 & & & & & = 4 \\
 & 2x_2 & & +x_4 & & & & = 12 \\
3x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & & & = 18 \\
x_1 & +x_2 & & & & +x_6 & & = 8 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & & \geq 0
\end{array}
$$



Caracterización de soluciones

- *Solución factible*
  - Solución que satisface todas las restricciones. Puntos del interior y contorno de la región factible.
- *Solución infactible*
  - Solución que viola al menos una restricción. Puntos exteriores a la región factible.
- *Solución básica factible (VÉRTICE)*
  - Solución factible localizada en un vértice de la región factible, no se puede expresar como combinación lineal de otras dos soluciones factibles
  - *Base* matriz cuadrada no singular de rango máximo en A. Las variables de las columnas que forman la matriz base son *básicas*, el resto *no básicas*.
  - Cada variable sólo puede ser *básica* o *no básica*
  - Número de variables básicas = m Variables básicas > 0,
  - Número de variables no básicas = n-m Variables no básicas = 0
  - El valor de las variables básicas (vértice) se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales m x m.
- *Solución básica factible DEGENERADA*
  - Alguna de las m variables básicas = 0
- *Solución óptima*
  - Solución factible vértice con el valor más favorable de la función objetivo
  - Puede haber múltiples soluciones óptimas. Es una situación muy frecuente en la realidad.
- *Solución no acotada*

Forma tabular (i)

***

- Manera sencilla de presentar el método y hacer pequeños ejemplos

- Tabla en la iteración inicial

Variables básicas	Z	x_N	x_B	Cotas
$-Z$	-1	c_N^T	c_B^T	0
x_B	0	N	B	b

- Tabla en una iteración cualquiera

Variables básicas	z	x_N	x_B	Cotas
$-z$	-1	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	0	$-c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	$B^{-1}N$	I	$B^{-1}b$

- Sólo se necesita la B^{-1} para calcular todos los bloques de la tabla.

Obtención de solución básica factible inicial

- Para conseguir la matriz identidad en las variables básicas se suman variables artificiales en cada restricción de tipo $\geq$ o $=$.
- Variables de holgura y artificiales forman la base inicial
- Si las variables artificiales toman valor > 0 la solución básica es infactible
- Fase I del método simplex obtiene una solución básica factible inicial. Su f.o. es la minimización de la suma de variables artificiales.
- Fase II: problema original a partir de solución básica factible de Fase I.
- Si al final de la Fase I alguna variable artificial > 0, problema infactible

Forma tabular (ii)

***

- En la iteración inicial se escogen como variables básicas las de holgura y artificiales (tienen coeficiente 0 en la f.o. y 1 en las restricciones). La matriz base B es la matriz identidad I.
- Tabla en la iteración inicial

Variables básicas	z	x'_N	x'_B	Cotas
$-z$	-1	c'^T_N	0	0
x_B	0	N'	I	b

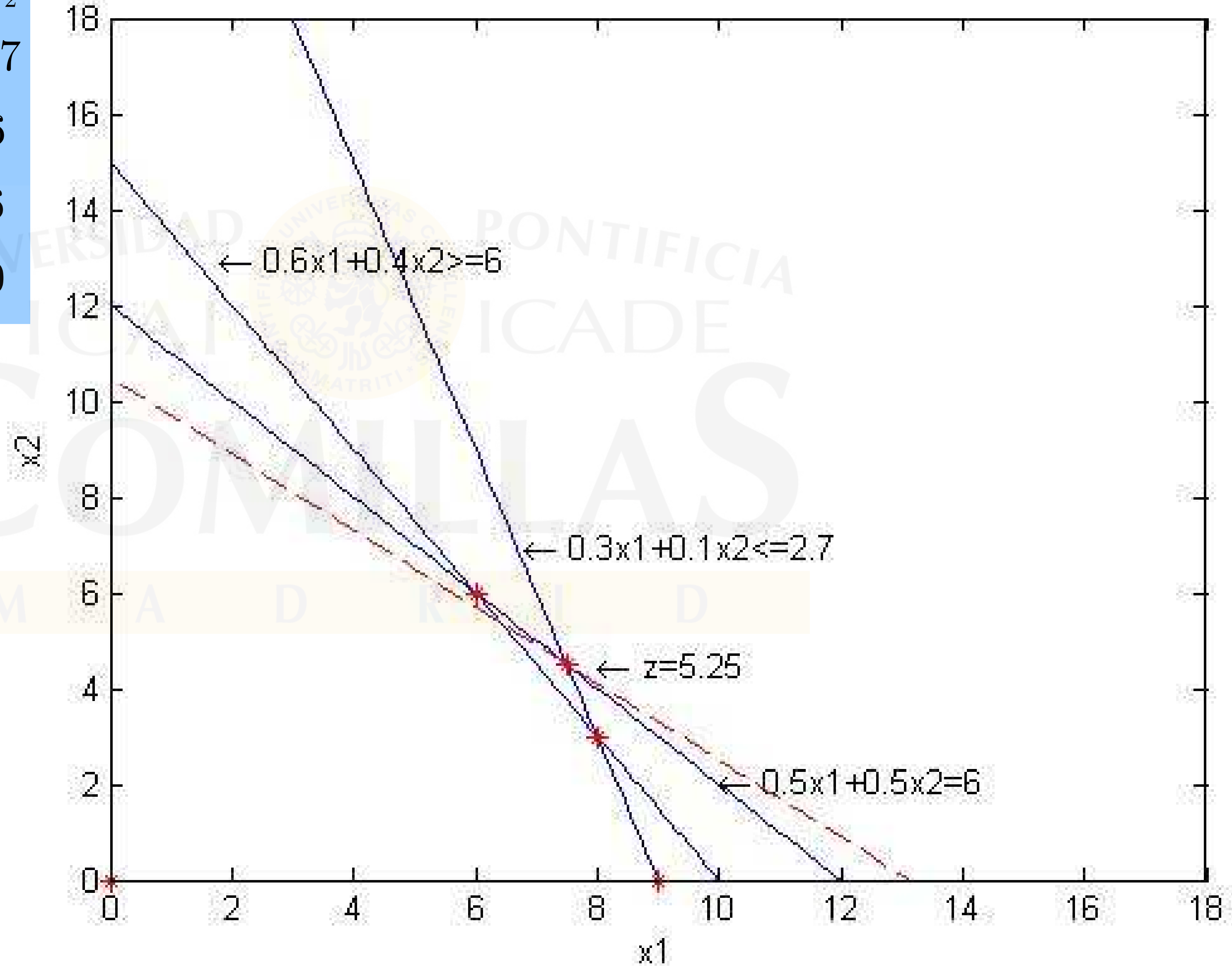
- Tabla en una iteración cualquiera

Variables básicas	z	x'_N	x'_B	Cotas
$-z$	-1	$c'^T_N - c^T_B B^{-1} N'$	$-c^T_B B^{-1}$	$-c^T_B B^{-1} b$
x_B	0	$B^{-1} N'$	B^{-1}	$B^{-1} b$

- La matriz B^{-1} describe las manipulaciones hechas con las restricciones a partir de su situación inicial. Se encuentra bajo las variables básicas iniciales.

Método de las dos fases

$$\begin{array}{llr} \min z = 0.4x_1 & +0.5x_2 & \\ 0.3x_1 & +0.1x_2 & \leq 2.7 \\ 0.5x_1 & +0.5x_2 & = 6 \\ 0.6x_1 & +0.4x_2 & \geq 6 \\ x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$



Recapitulación método simplex

- Problema matemático en forma estándar (variables de holgura y de exceso)
- Método simplex
  - ✓ Algoritmo gráfico (movimiento de vértice a vértice por aristas del contorno de la región factible)
  - ✓ Algoritmo algebraico (resolución iterativa de un sistema de ecuaciones lineales cambiando de base). Solución básica formada por variables básicas ($\neq 0$) y no básicas ($= 0$)
- Solución algoritmo algebraico
  - ✓ Matricial (expresión de toda la información en función de B^{-1})
  - ✓ Tabular
  - ✓ Simplex revisado
- Solución básica factible inicial por método de las dos fases si hay variables artificiales

Convergencia

- Converge en un número finito de iteraciones
- Caso peor
  - ✓ convergencia exponencial
- Caso medio
  - ✓ número de iteraciones proporcional al número de restricciones m
  - ✓ tiempo de solución proporcional a m^3

CONTENIDO

- INTRODUCCIÓN
- MÉTODO SIMPLEX
- ADDITIONAL DEVELOPMENTS (master)
- DUALIDAD
- ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
- INTERIOR POINT METHOD (master)
- COMPARISON AMONG CPLEX ALGORITHMS (master)

Desarrollos adicionales

- Método simplex revisado
- Forma producto de la inversa
- Factorización de la matriz base
- Estrategias de cálculo de costes reducidos

Método simplex revisado

- Calcula en cada iteración sólo la información que necesita estrictamente en dicha iteración
- Se ahorra en cálculo y en memoria
- Tablas anteriores $(m+1)$x$(n+1)$, tabla simplex revisado $(m+1)$x$(m+1)$

x'_B	**Valores**
$w^T = c_B^T B^{-1}$	$\hat{z} = c_B^T B^{-1} b$
B^{-1}	$\hat{b} = B^{-1} b$

- En cada iteración se calculan los costes reducidos de las variables no básicas y la columna pivote fuera de la tabla.
- El pivotamiento se hace sobre la tabla actual, suponiendo que existe una columna adicional (realmente no es añadida) que es la columna pivote

Forma producto de la inversa

- Esfuerzo computacional del método simplex: cálculos relacionados con la inversa de la matriz base B^{-1}
- Matriz base B es cuasivacía, pero matriz inversa B^{-1} es densa.
- Tanto B como B^{-1} cambian poco en cada iteración luego se pueden actualizar sin necesidad de recalcularlas desde cero

Método simplex

1. Calcular costes reducidos de VNB
2. Seleccionar VBE x_t y calcular elementos columna pivote y_{it}
3. Determinar VBS x_s. Elemento pivote y_{st}
   - Determinar cotas restricciones $\hat{b}_i$ con elementos de columna pivote $y_{it} > 0$
   - Determinar el mínimo $\dfrac{\hat{b}_s}{y_{st}} = \min\limits_{1 \le i \le m} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i}{y_{it}} : y_{it} > 0 \right\}$
   - Actualización de la inversa
     - Se suma a la ecuación *i* la ecuación *s* multiplicada por $-\dfrac{y_{it}}{y_{st}}$ para i=1,…,m $i \neq s$
     - La ecuación *s* se divide por el elemento pivote

$$(\bar{B}^{-1})_{ij} = \begin{cases} (B^{-1})_{ij} - \dfrac{y_{it}}{y_{st}} (B^{-1})_{sj} & i \neq s \\[2ex] \dfrac{1}{y_{st}} (B^{-1})_{sj} & i = s \end{cases}$$

Actualización de las matrices *B* y *B*$^{-1}$

$\overline{B} = BF$

F se obtiene a partir de la matriz identidad reemplazando la columna *s* por y_t

$$F = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{y_t} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad y_t = B^{-1} a_t$$

$\overline{B}^{-1} = EB^{-1}$

$$E = F^{-1} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\eta} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \eta = \begin{bmatrix} -y_{1t}/y_{st} \\ \vdots \\ 1/y_{st} \\ \vdots \\ -y_{mt}/y_{st} \end{bmatrix}$$

Actualización de la matriz B^{-1}

- La inversa de la base B^{-1} en cualquier iteración k se puede poner como un producto de matrices elementales

$$B_k^{-1} = E_{k-1} E_{k-2} \cdots E_2 E_1$$

Pre y postmultiplicación de la matriz B^{-1}

- Realmente no se necesita la inversa B^{-1} sino pre $w^T = c_B^T B^{-1}$ o postmultiplicar $\hat{b} = B^{-1} b$, $y_t = B^{-1} a_t$ ésta por vectores
- Postmultiplicación por un vector. Transformación hacia delante (FTRAN)

$$B_k^{-1} a = E_{k-1}(E_{k-2}(E_{k-3}(\cdots(E_2(E_1 a))\cdots)))$$

- Premultiplicación por un vector. Transformación hacia atrás (BTRAN)

$$c^T B_k^{-1} = ((\cdots(((c^T E_{k-1}) E_{k-2}) E_{k-3})\cdots) E_2) E_1$$

Post y premultiplicación de matriz elemental

- Sea E una matriz elemental con un vector η en su columna s

$$Ea = \begin{pmatrix} 1 & & \eta_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \eta_s & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \eta_m & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + a_s \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_s \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

- El término s es reemplazado por el escalar $c^T\eta$

$$c^T E = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s & \cdots & c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \eta_1 & & \\ & 1 & & \vdots & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \eta_s & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & \eta_m & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{s-1} & c^T\eta & c_{s+1} & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

Factorización de la matriz base *B*

- Los cálculos se pueden hacer también pre $w^T B = c_B^T$ o postmultiplicando la matriz base por vectores $B\hat{b} = b$ $By_t = a_t$
- La matriz base se puede factorizar, expresar como producto de matrices $B = LU$, siendo *L* y *U* matrices triangulares inferior y superior. Estas matrices son cuasivacías como la matriz *A*.
- Los sistemas de ecuaciones previos se resuelven en dos etapas

$$B\hat{b} = b \qquad LU\hat{b} = b$$

- Si $\hat{b}_1 = U\hat{b}$ primero se resuelve el sistema triangular hacia delante para calcular $\hat{b}_1$

$$L\hat{b}_1 = b$$

- Y luego se resuelve el sistema triangular hacia atrás para calcular $\hat{b}$ $U\hat{b} = \hat{b}_1$
- También se puede utilizar la factorización de Cholesky $B = R^T R$

Factorización de la matriz base *B*

- Inicialmente la matriz base B es la identidad. De la misma forma las matrices L y U son también la identidad.
- La matriz base cambia (se actualiza) al realizar iteraciones del simplex. De la misma forma se hace con las matrices triangulares.
- Después de un cierto número de iteraciones (por ejemplo, 100) deja de ser eficiente la actualización a partir de matrices elementales. En ese momento se refactoriza la matriz base, es decir, se calculan de nuevo la matrices triangulares L y U correspondientes y se empieza de nuevo el proceso de actualización.
- En la iteración final también se suele realizar una refactorización.

Estrategias de cálculo de costes reducidos (*pricing*)

- Cálculo de todos los costes reducidos (*full pricing*)
  - ✓ Menor número de iteraciones, mayor cálculo en cada una
- Cálculo de algunos (*partial pricing*)
  - ✓ Se calcula sólo un subconjunto y se elige la VBE. Si no hay ninguna se calcula otro subconjunto hasta que se encuentre una VBE o se está en el óptimo
- Mayor mejora por *incremento unitario* de la VBE por la arista de máxima pendiente (*steepest-edge*)

Coste reducido

$$\hat{c}_t = \min_{j \in x_N} \frac{\hat{c}_j}{\sqrt{\left\| B^{-1} N e_j \right\|^2 + 1}} = \min_{j \in x_N} \frac{\hat{c}_j}{\sqrt{\left\| B^{-1} a_j \right\|^2 + 1}}$$

Escala de la arista

- Método Devex realiza una aproximación de la escala en lugar de su cálculo exacto

Manejo de cotas superiores $0 \le x_j \le u_j$

- No tratar estas cotas como restricciones tiene ventajas computacionales. En el método simplex implica no sobrepasar las cotas cuando la variable básica entrante se incrementa hasta alcanzar un nuevo vértice.

$x_j = u_j - y_j$ $\quad$ $0 \le x_j \le u_j$ $\quad$ $0 \le y_j \le u_j$

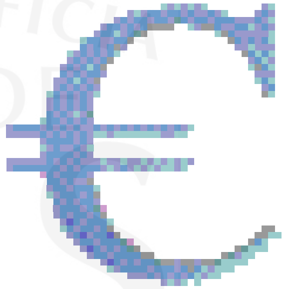
- Si $x_j = 0$ $\quad$ x_j es no básica
- Si $x_j = u_j$ $\quad$ $y_j = 0$ $\quad$ y_j es no básica

- La variable básica saliente es la primera que alcanza su cota 0 (se haría negativa) al incrementar la variable básica entrante. Ahora esta condición se extiende a su cota 0 o a su cota u_j. Cuando se alcanza la cota superior se cambia la variable x_j a y_j como nueva variable no básica.

CONTENIDO

- INTRODUCCIÓN
- MÉTODO SIMPLEX
- ADDITIONAL DEVELOPMENTS (master)
- DUALIDAD
- ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
- INTERIOR POINT METHOD (master)
- COMPARISON AMONG CPLEX ALGORITHMS (master)

Two perspectives of the world: Engineers vs. Economists



Purchasing decision

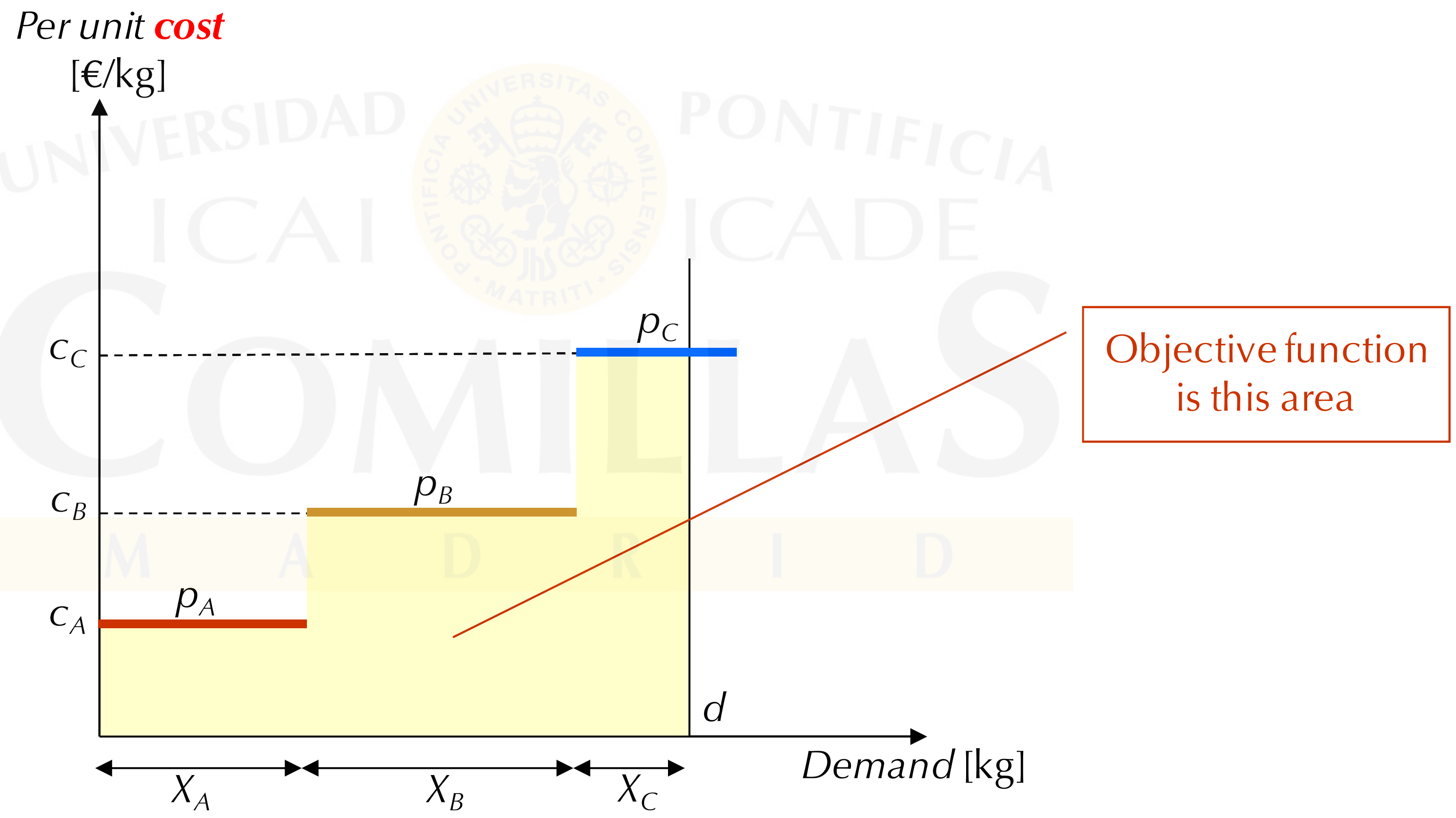
- The Purchasing Director of the department store **The English Suit** (TES) is interested in the procurement of a certain amount of Manchego cheese, called d, from different cheese factories for the next discount campaign. At the moment he has three suppliers available, A, B and C. He has contacted with the Operations Engineers of the factories that have given him the per unit cost and production capacity of each factory, which correspond respectively to c_i and p_i, and are expressed in €/kg and kg.
- Assess the optimization problem to be solved by the TEC Purchasing

Purchasing decision. Specification

- **Parameters/Data**:
  - ✓ d estimated cheese demand **[kg]**
  - ✓ c_i cheese per unit cost of each factory i **[€/kg]**
  - ✓ p_i production capacity of each factory i **[kg]**

- **Decisions** to be made/**Variables**
  - ✓ X_i how much cheese to purchase to each factory i **[kg]**

Purchasing decision. Graphical representation



Purchasing decision. Mathematical formulation (i)

- **Objective function**:
  - ✓ Minimize the procurement cost by TES **[€]**

$$\min_{X_A, X_B, X_C} \; c_A X_A + c_B X_B + c_C X_C$$

- **Constraints**:
  - ✓ Satisfy the estimated cheese demand **[kg]** $X_A + X_B + X_C \geq d$
  - ✓ Observe the limits of each factory **[kg]**

$$X_A \leq p_A$$
$$X_B \leq p_B$$
$$X_C \leq p_C$$

  - ✓ Make a rational purchase **[kg]**

$$X_A \geq 0$$
$$X_B \geq 0$$
$$X_C \geq 0$$

Purchasing decision. Mathematical formulation (ii)

- The whole cost minimization problem is formulated as:

$$\min_{X_A, X_B, X_C} z = c_A X_A + c_B X_B + c_C X_C$$

$$X_A + X_B + X_C \geq d$$

$$X_A \leq p_A$$

$$X_B \leq p_B$$

$$X_C \leq p_C$$

$$X_A, X_B, X_C \geq 0$$

Selling decision

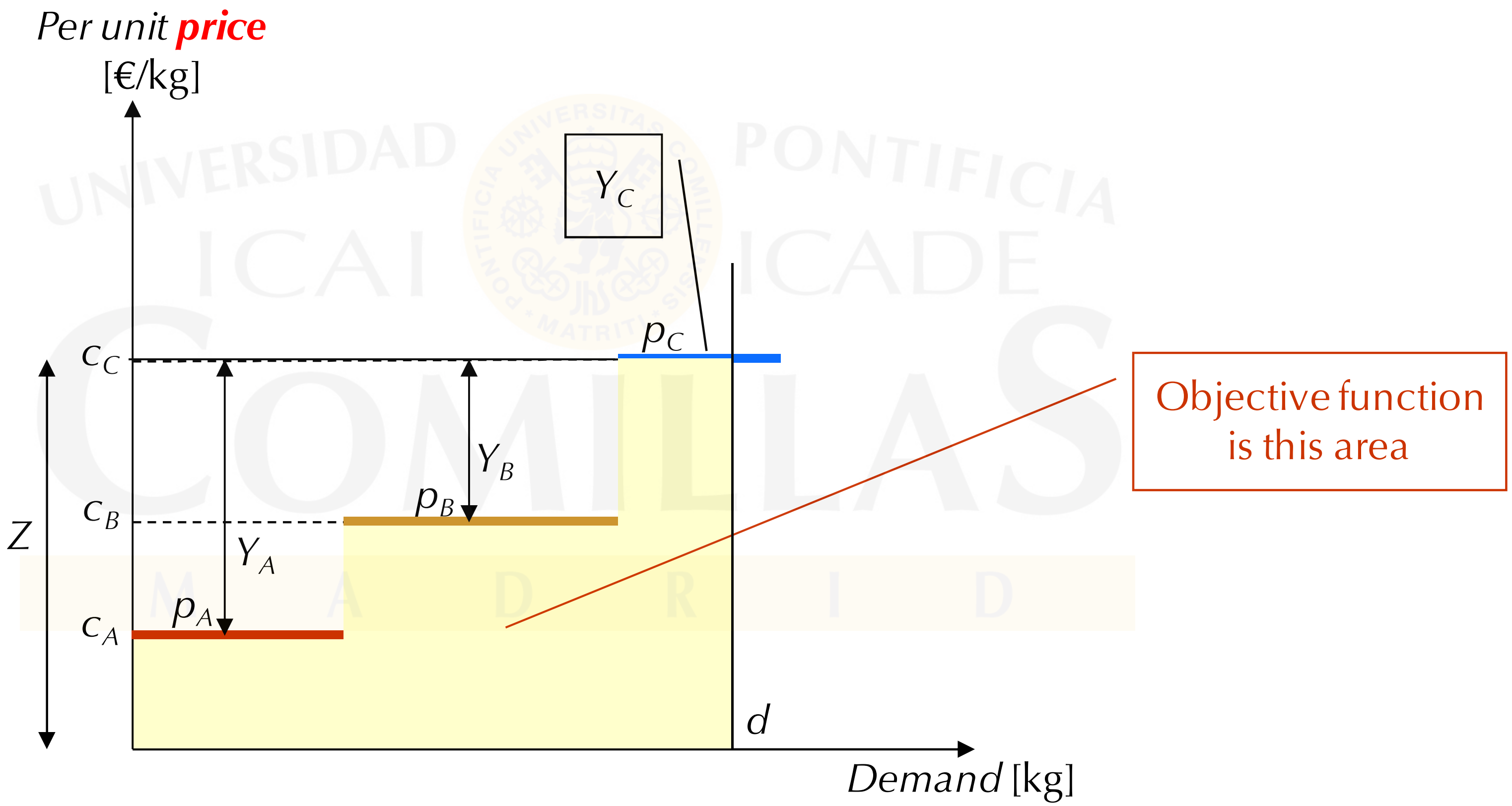
- Three companies devoted to producing Manchego cheese have constituted an association, the **Manchego Cheese Association** (MCA), to join efforts in commercializing their products. The Economy Director of this association has been contacted by an important department store interested in purchasing d kg of cheese for the next month. The Director knows the per unit cost c_i and capacity p_i of each factory.
- Assess the optimization problem to be solved by the MCA Economy Director. selling price that maximizes its profits.

Selling decision. Specification

- **Parameters/Data**:
  - ✓ d estimated cheese demand **[kg]**
  - ✓ c_i cheese per unit cost of each factory i **[€/kg]**
  - ✓ p_i production capacity of each factory i **[kg]**

- **Decisions** to be made/**Variables**
  - ✓ Z cheese per unit price **[€/kg]**
  - ✓ Y_i penalty by limit in each factory i **[€/kg]**

Selling decision. Graphical representation



Selling decision. Mathematical formulation (i)

❑ Objective function:

- ✓ Maximize the profits of producers' association **[€]**

$$\max_{Z,Y_A,Y_B,Y_C} y_0 = dZ - p_A Y_A - p_B Y_B - p_C Y_C$$

❑ Constraints:

- ✓ Companies want the maximum marginal price below their marginal (per unit) cost **[€/kg]**

  It is a perfect competitive market. If a factory sells above its variable cost it will be out of the market

$$Z - Y_A \le c_A$$

$$Z - Y_B \le c_B$$

$$Z - Y_C \le c_C$$

- ✓ Prices/penalties have to be rational **[€/kg]**

$$Z, Y_A, Y_B, Y_C \ge 0$$

Determine the set of marginal prices that minimizes the total price of available resources such that the cost assigned to each product is greater or equal than the per unit margin of this product

Selling decision. Mathematical formulation (ii)

- The whole profit maximization problem is formulated as:

$$\max_{Z,Y_A,Y_B,Y_C} y_0 = dZ - p_A Y_A - p_B Y_B - p_C Y_C$$

$$Z - Y_A \le c_A$$

$$Z - Y_B \le c_B$$

$$Z - Y_C \le c_C$$

$$Z, Y_A, Y_B, Y_C \ge 0$$

Aesthetic relations

- **PRIMAL**: TES cost minimization
- DUAL: MCA profit maximization

$$\min_{X_A, X_B, X_C} z = c_A X_A + c_B X_B + c_C X_C$$
$$X_A + X_B + X_C \geq d$$
$$-X_A \geq -p_A$$
$$-X_B \geq -p_B$$
$$-X_C \geq -p_C$$
$$X_A, X_B, X_C \geq 0$$

$$\max_{Z, Y_A, Y_B, Y_C} y_0 = dZ - p_A Y_A - p_B Y_B - p_C Y_C$$
$$Z - Y_A \leq c_A$$
$$Z - Y_B \leq c_B$$
$$Z - Y_C \leq c_C$$
$$Z, Y_A, Y_B, Y_C \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & -1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & -1 \end{pmatrix}$$

Aesthetic relations

- PRIMAL problem
- DUAL problem

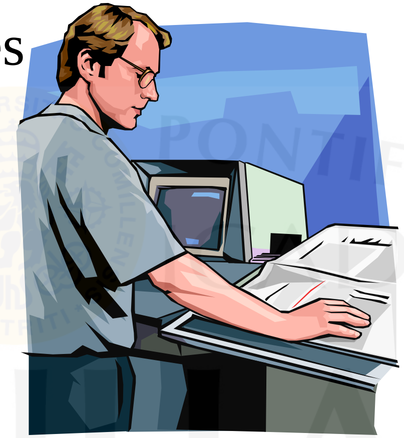
  - ✓ Minimization
  - ✓ RHS
  - ✓ O.F. coefficients
  - ✓ Constraint matrix
  - ✓ # of variables
  - ✓ # of constraints

- Primal dual

  - primal problem cost minimization quantities
  - dual problem profit maximization prices

Two perspectives

- Engineers:
  - ✓ Decide **quantities**: how much cheese to produce in each factory **[kg]**
  - ✓ Work with **primal** variables



- Economists:
  - ✓ Decide **prices**: what price to ask for a kg of cheese **[€/kg]**
  - ✓ Work with **dual** variables

Behavioral relations

- Objective function at the optimal solution of primal and dual problems coincide $z^* = y_0^*$

- How much does the total cost increase when the expected cheese demand increases in one unit **[€/kg]**? Z

  Marginal cost of increasing output

- How much does the total cost decrease when the production capacity of factory A increases in one unit **[€/kg]**? Y_A

Cost minimization problem. Explicit formulation

```
parameters
d   estimated cheese demand          [kg]
cA  cheese per unit cost of factory A [€ per kg]
cB  cheese per unit cost of factory B [€ per kg]
cC  cheese per unit cost of factory C [€ per kg]
pA  production capacity  of factory A [kg]
pB  production capacity  of factory B [kg]
pC  production capacity  of factory C [kg]

positive variables
xA how much cheese to purchase to factory A [kg]
xB how much cheese to purchase to factory B [kg]
xC how much cheese to purchase to factory C [kg]

variable
z  procurement cost [€]

equations
of   Minimize the procurement cost      [€]
ecd  Satisfy the estimated cheese demand [kg]
ecA  Observe the limits of factory A     [kg]
ecB  Observe the limits of factory B     [kg]
ecC  Observe the limits of factory C     [kg] ;

of  .. z =e= cA*xA + cB*xB + cC*xC ;
ecd .. xA + xB + xC =g= d ;
ecA .. xA =l= pA ;
ecB .. xB =l= pB ;
ecC .. xC =l= pC ;

model cm / all / ;

* assign values to the parameters

cA =   8 ;
cB =  10 ;
cC =  12 ;
pA = 100 ;
pB = 120 ;
pC = 150 ;
d  = 300 ;

solve cm minimizing z using lp
```

$$\min_{X_A,X_B,X_C} \quad z = c_A X_A + c_B X_B + c_C X_C$$

$$X_A + X_B + X_C \geq d$$

$$-X_A \geq -p_A$$

$$-X_B \geq -p_B$$

$$-X_C \geq -p_C$$

$$X_A, X_B, X_C \geq 0$$

Profit maximization problem. Explicit formulation

```
parameters
d   estimated cheese demand              [kg]
cA  cheese per unit cost of factory A  [€ per kg]
cB  cheese per unit cost of factory B  [€ per kg]
cC  cheese per unit cost of factory C  [€ per kg]
pA  production capacity  of factory A  [kg]
pB  production capacity  of factory B  [kg]
pC  production capacity  of factory C  [kg]

positive variables
yA penalty by limit in factory A [€ per kg]
yB penalty by limit in factory B [€ per kg]
yC penalty by limit in factory C [€ per kg]
z  cheese per unit price         [€ per kg]

variable
y0 profits [€]

equations
of   Maximize the profits                                  [€]
ecA Company A want the maximum price below their per unit cost [€ per kg]
ecB Company B want the maximum price below their per unit cost [€ per kg]
ecC Company C want the maximum price below their per unit cost [€ per kg] ;

of  .. y0 =e= d*z - pA*yA - pB*yB - pC*yC ;
ecA .. z - yA =l= cA ;
ecB .. z - yB =l= cB ;
ecC .. z - yC =l= cC ;

model pm / all / ;

* assign values to the parameters

cA =   8 ;
cB =  10 ;
cC =  12 ;
pA = 100 ;
pB = 120 ;
pC = 150 ;
d  = 300 ;

solve pm maximizing y0 using lp
```

$$\max_{Z,Y_A,Y_B,Y_C} y_0 = dZ - p_A Y_A - p_B Y_B - p_C Y_C$$

$$Z - Y_A \leq c_A$$

$$Z \quad - Y_B \leq c_B$$

$$Z \quad\quad - Y_C \leq c_C$$

$$Z, Y_A, Y_B, Y_C \geq 0$$

Cost minimization problem. Algebraic formulation

```
sets
i factories / A, B, C /

parameters
d    estimated cheese demand                [kg]        / 300              /
c(i) cheese per unit cost of each factory i [€ per kg] / A   8, B  10, C  12 /
p(i) production capacity  of each factory i [kg]        / A 100, B 120, C 150 /

positive variables
x(i) how much cheese to purchase to each factory i [kg]

variable
z    procurement cost [€]

equations
of     Minimize the procurement cost        [€]
ecd    Satisfy the estimated cheese demand [kg]
ec(i)  Observe the limits of each factory  [kg] ;

of     .. z =e= sum[i, c(i)*x(i)] ;
ecd    .. sum[i, x(i)] =g= d ;
ec(i)  .. x(i) =l= p(i) ;

model cm / all /

solve cm minimizing z using lp
```

$$\min_{X_i} z = \sum_i c_i X_i$$

$$\sum_i X_i \geq d$$

$$X_i \leq p_i \qquad \forall i$$

$$X_i \geq 0$$

Profit maximization problem. Algebraic formulation

```
sets
i factories / A, B, C /

parameters
d    estimated cheese demand                [kg]         / 300              /
c(i) cheese per unit cost of each factory i [€ per kg] / A   8, B  10, C  12 /
p(i) production capacity  of each factory i [kg]       / A 100, B 120, C 150 /

positive variables
y(i) penalty by limit in each factory i [€ per kg]
z    cheese per unit price              [€ per kg]

variable
y0   profits [€]

equations
of     Maximize the profits                                  [€]
ec(i) Company i want the maximum price below their per unit cost [€ per kg] ;

of     .. y0 =e= d*z - sum[i, p(i)*y(i)] ;
ec(i) .. z - y(i) =l= c(i) ;

model pm / all /

solve pm maximizing y0 using lp
```

$$\max_{Z,Y_i} y_0 = dZ - \sum_i p_i Y_i$$

$$Z - Y_i \le c_i \qquad \forall i$$

$$Z, Y_i \ge 0$$

Model results

- Values (levels) of variables
- Values (levels) of constraints

- Dual variables (shadow prices, Lagrange multipliers)
  - ✓ Marginal values (utility or cost) of (relaxing) constraints
  - ✓ Dimension: $\boxed{\dfrac{\text{o.f. dimension}}{\text{constraint dimension}}}$
  - ✓ Its value is only valid in the neighborhood of the optimal solution
- Reduced costs
  - ✓ Marginal values of variables
  - ✓ Dimension: $\boxed{\dfrac{\text{o.f. dimension}}{\text{variable dimension}}}$
  - ✓ Its value is only valid in the neighborhood of the optimal solution

Problema dual

- Problema estándar primal (P) $\min z = c^T x$; $Ax = b$; $x \geq 0$

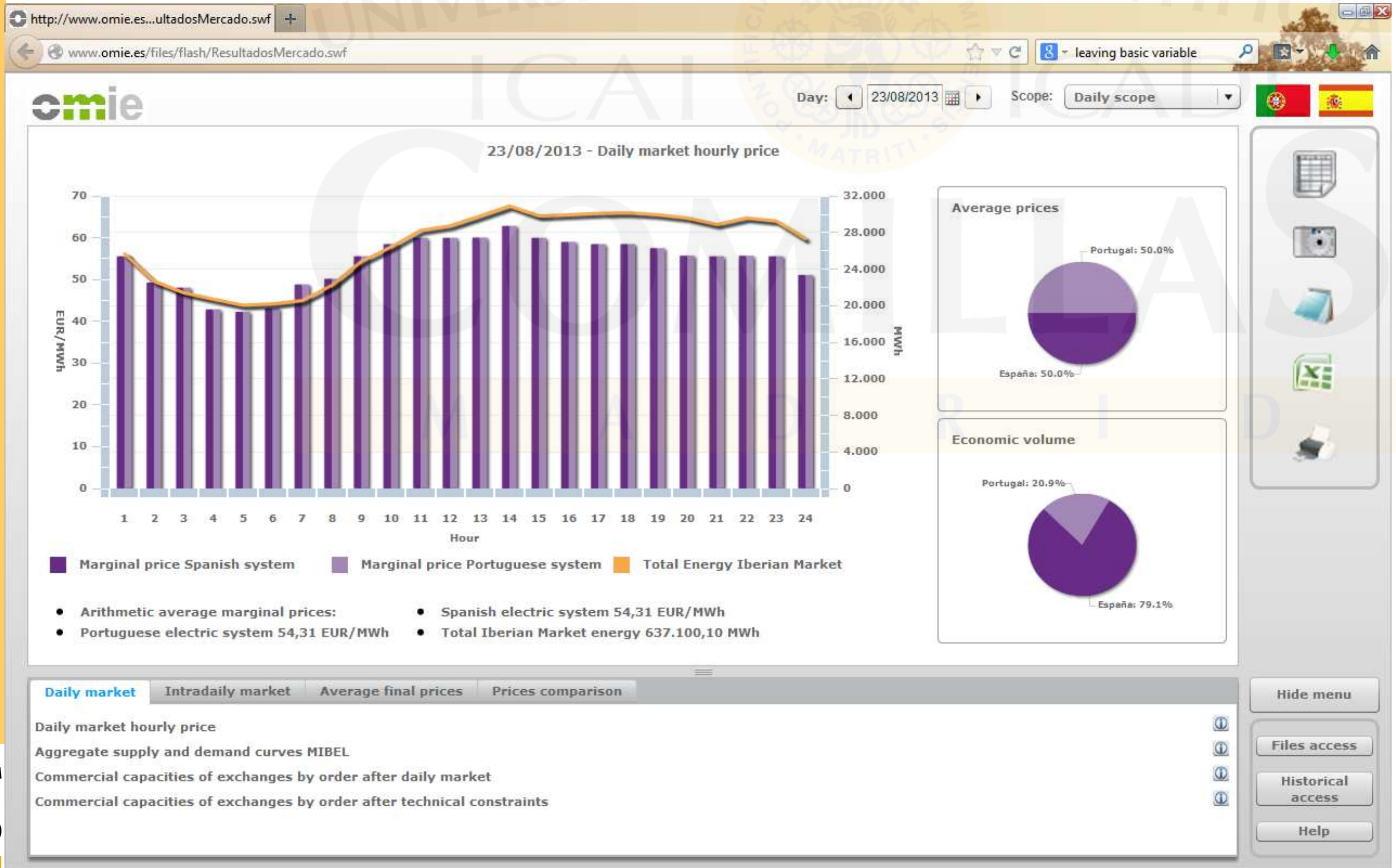
- Cota inferior de este problema
  - ✓ Operamos con las filas de la matriz, las multiplicamos por algún valor $y^T Ax = y^T b$ las sumamos entre ellas de modo que no se superen los coeficientes de la función objetivo $y^T A \leq c^T$, en tal caso el lado derecho resultante de tales operaciones sería una cota inferior para el valor de la función objetivo $y^T b \leq c^T x$.
  - ✓ Esa cota queremos que sea lo más alta posible.

- Problema dual (D) $\max y_0 = b^T y$; $A^T y \leq c$

- y son las variables duales

Interpretación económica

- Precio sombra (variable dual, multiplicador simplex, precio de equilibrio, precio justo) del recurso i (y_i) mide el valor marginal del recurso, es decir, el incremento marginal de z al aumentar marginalmente el recurso b_i.



Fuente: OMIE

Relaciones primal dual

- Cualquier problema LP denominado *primal* tiene asociado a él otro problema también LP llamado *dual*
- Primal mxn, Dual nxm
- Para cualquier problema primal y su dual, todas las relaciones entre ellos son simétricas porque el dual de su dual es el primal
- Obtención de uno a partir del otro

min		max
Variable		**Restricción**
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
no restringida	$\Leftrightarrow$	$=$
Restricción		**Variable**
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	no restringida

Ejemplo (i)

Primal	Dual
$\begin{array}{lllll} \max z = 3x_1 + 5x_2 & & & & \\ x_1 & & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & & \leq & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & \leq & 18 \\ x_1, & x_2 & & \geq & 0 \end{array}$	$\begin{array}{lllll} \min y_0 = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 & & & & \\ y_1 & & +3y_3 & \geq & 3 \\ & 2y_2 & +2y_3 & \geq & 5 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \geq & 0 \end{array}$
$\begin{array}{l} \max z = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$	$\begin{array}{l} \min y_0 = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 3 \\ \cdot & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$

Ejemplo (ii)

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1,x_2,x_3} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ge b_2\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\\
&x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \text{ libre}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max_{y_1,y_2,y_3} y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3\\
&y_1a_{11} + y_2a_{21} + y_3a_{31} \le c_1\\
&y_1a_{12} + y_2a_{22} + y_3a_{32} \ge c_2\\
&y_1a_{13} + y_2a_{23} + y_3a_{33} = c_3\\
&y_1 \le 0, y_2 \ge 0, y_3 \text{ libre}
\end{aligned}$$

Ejemplo de sistemas de energía eléctrica

- Minimización de costes de explotación

$$
\begin{array}{lllll}
\min\limits_{P_1,P_2,P_3} & c_1P_1 + c_2P_2 + c_3P_3 & & & \\
P_1 & +P_2 & +P_3 & \geq d & : \lambda \\
P_1 & & & \leq \overline{P}_1 & : \mu_1 \\
 & P_2 & & \leq \overline{P}_2 & : \mu_2 \\
 & & P_3 & \leq \overline{P}_3 & : \mu_3 \\
P_1, & P_2, & P_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

- Maximización de la función de utilidad

$$
\begin{array}{llllll}
\max\limits_{\lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_3} & d\lambda + \overline{P}_1\mu_1 + \overline{P}_2\mu_2 + \overline{P}_3\mu_3 & & & & \\
\lambda & +\mu_1 & & & \leq c_1 & : P_1 \\
\lambda & & +\mu_2 & & \leq c_2 & : P_2 \\
\lambda & & & +\mu_3 & \leq c_3 & : P_3 \\
\lambda \geq 0 & \mu_1, & \mu_2, & \mu_3 & \leq 0 &
\end{array}
$$

Propiedades básicas de la dualidad (max P, min D)

- Propiedad de la simetría
  - ✓ Para cualquier problema primal y su dual, todas las relaciones entre ellos son simétricas porque el dual de su dual es el primal.
- Propiedad débil de la dualidad
  - ✓ Si x es una solución factible del primal e y es una solución factible del dual, se verifica que $c^T x \le b^T y$
- Propiedad fuerte de la dualidad
  - ✓ Si x^* es una solución óptima del primal e y^* es una solución óptima del dual, se verifica que $c^T x^* = b^T y^*$
- Propiedad de soluciones básicas complementarias
- Propiedad de solución básica óptima complementaria
  - ✓ En la iteración final se encuentra simultáneamente la solución básica óptima x^* del primal y la básica óptima complementaria y^* del dual y se verifica $c^T x^* = b^T y^*$ $z^* = y_0^*$

Propiedad soluciones básicas complementarias

- En cada iteración del método simplex se encuentra una solución básica (vértice) factible del primal y una solución básica complementaria infactible del dual tal que $c^T x = b^T y$ o $z = y_0$

  Si no es óptima para el primal no es factible para el dual.
- Solución dual complementaria $y^T \equiv c_B^T B^{-1}$
- Las variables duales son los coeficientes de las variables básicas iniciales en la función objetivo cambiados de signo.

DERIVADAS FO CON RESPECTO VAR PRIMAL

Variables básicas	z	x'_N	x'_B	Cotas
$-z$	-1	$c'^T_N - c_B^T B^{-1} N'$	$-c_B^T B^{-1}$	$-c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	$B^{-1}N'$	B^{-1}	$B^{-1}b$

VARIABLES DEL PRIMAL

VARIABLES DEL DUAL

Variables básicas	z	x'_N	x'_B	Cotas
$-z$	-1	–variables duales de exceso y de holgura	–variables duales originales	$-c_B^T B^{-1} b$
x_B	0	$B^{-1}N'$	B^{-1}	$B^{-1}b$

DERIVADAS FO CON RESPECTO VAR DUAL

Propiedad complementariedad de holguras (i)

- Si una solución óptima del primal tiene una variable de holgura o exceso > 0 en una restricción (es decir, es variable básica > 0), la variable dual asociada a esa restricción tiene valor 0.
- Si una variable de holgura o exceso del primal es 0 en el óptimo, la variable dual asociada a dicha restricción puede tener valor distinto de 0 (positivo o negativo según corresponda al tipo de restricción y de función objetivo –maximización o minimización–) en el óptimo del problema dual.
- Si una variable original del primal (no las de holgura, exceso o artificiales) en el óptimo tiene valor > 0, su correspondiente restricción del dual no tiene holgura (es decir, su variable asociada del dual es 0).

Propiedad complementariedad de holguras (ii)

- Primal (P) $\begin{aligned}&\min z = c^T x\\ &Ax = b\\ &x \geq 0\end{aligned}$

- Dual (D)

$$\begin{aligned}&\max y_0 = b^T y\\ &A^T y \leq c\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}&\max y_0 = b^T y\\ &A^T y + s = c\\ &s \geq 0\end{aligned}$$

- Propiedad complementariedad de holguras $x_j s_j = 0 \quad j = 1,\ldots,n$

- Sean puntos factibles de (P) y (D) $\begin{aligned}&Ax = b && x \geq 0\\ &A^T y + s = c && s \geq 0\end{aligned}$

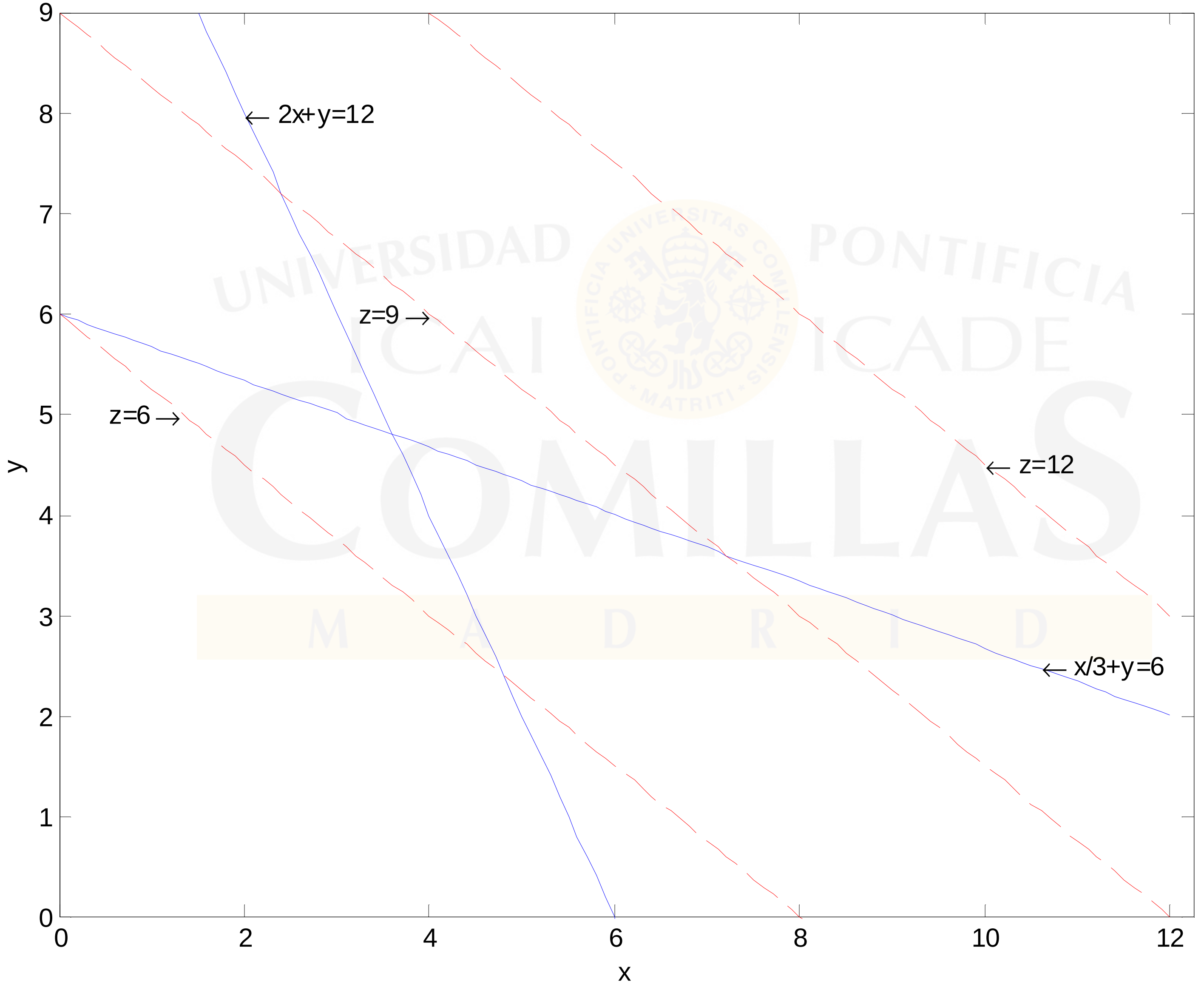
- Intervalo de dualidad (*duality gap*)

$$c^T x - b^T y = (A^T y + s)^T x - b^T y = y^T Ax + s^T x - b^T y = x^T s = \sum_{j=1}^{n} x_j s_j$$

Teorema de dualidad

- Las únicas relaciones posibles entre primal y dual son:
  - ✓ Si un problema tiene soluciones óptimas factibles entonces también las tiene el otro. Se pueden aplicar las propiedades débil y fuerte de dualidad.
  - ✓ Si un problema tiene soluciones factibles y función objetivo no acotada, el otro problema no tiene soluciones factibles.
  - ✓ Si un problema no tiene soluciones factibles, el otro o no tiene soluciones factibles o no tiene función objetivo acotada.
- Lema de Farkas: exactamente uno de los dos sistemas de ecuaciones siguientes tiene solución
  - ✓ Sistema 1: $A^T x = b$ $x \geq 0$
  - ✓ Sistema 2: $A^T y \leq 0$ $b^T y > 0$

Ejemplo 1 (i)



$$\max_{x,y} z = \frac{3}{4}x + y$$

$$\frac{x}{3} + y \le 6$$

$$2x + y \le 12$$

$$x, y \ge 0$$

Tabla del método simplex

VBE

	x	y	u	v		
z	-0.75	-1			0	
u	0.33	1	1		6	6
v	2	1		1	12	12

VBS

VBE

z	-0.41666	0	1	0	-6	
u	1.67	0	-1	1	6	3.6
y	0.333	1	1	0	6	18

VBS

Var dual R1

Var dual R2

z	0	0	0.75	0.25	-7.5
x	1	0	-0.6	0.6	3.6
y	0	1	1.2	-0.2	4.8

$$\max_{x,y} z = \frac{3}{4}x + y$$

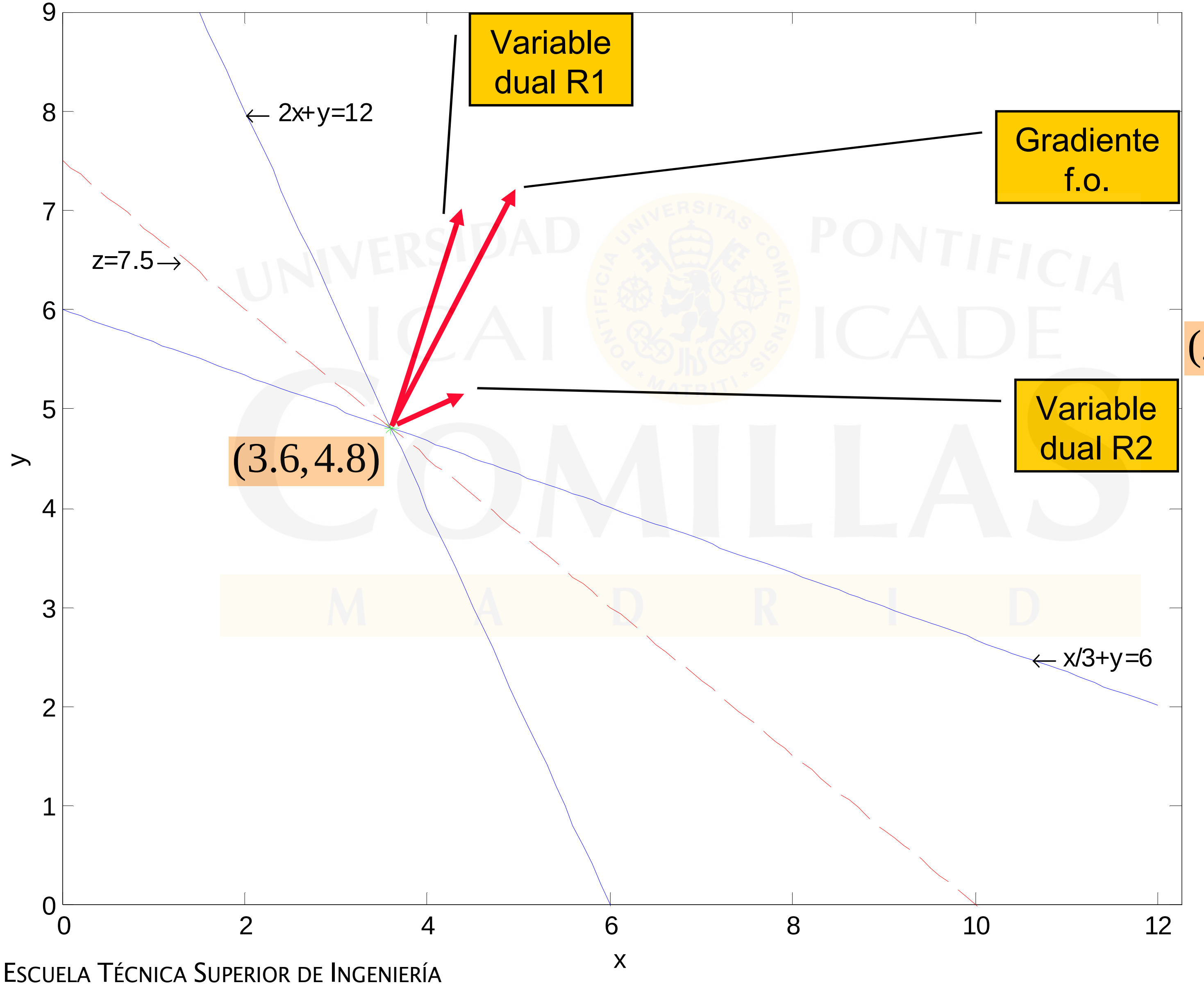
$$\frac{x}{3} + y \le 6 \qquad : \pi_1$$

$$2x + y \le 12 \qquad : \pi_2$$

$$x, y \ge 0$$

$$(\pi_1, \pi_2) = (0.75, 0.25)$$

Ejemplo 1 (ii)



$$\max_{x,y} z = \frac{3}{4}x + y$$

$$\frac{x}{3} + y \le 6 \qquad : \pi_1$$

$$2x + y \le 12 \qquad : \pi_2$$

$$x, y \ge 0$$

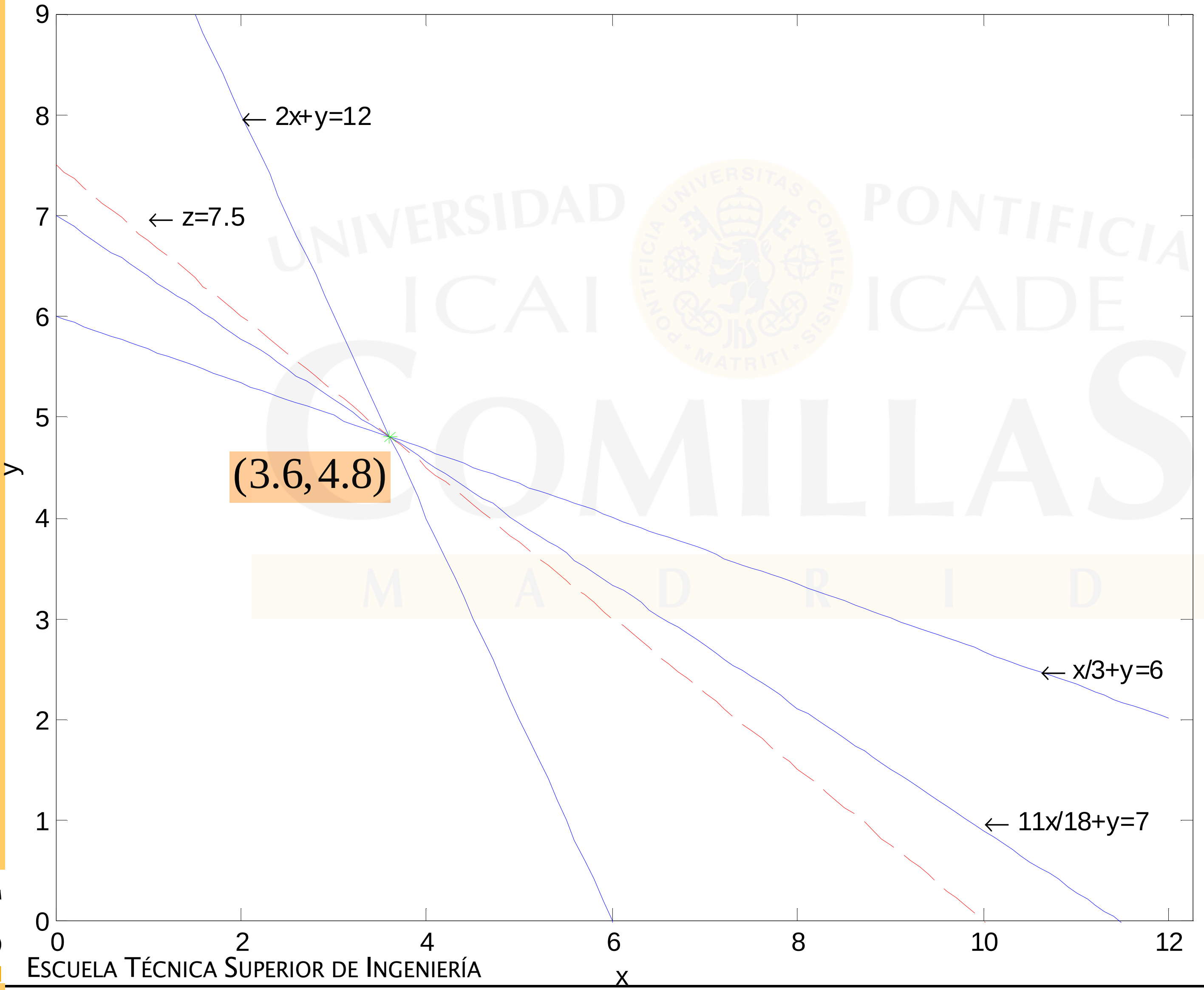
$$(\pi_1, \pi_2) = (0.75, 0.25)$$

Interpretación geométrica de las variables duales

- Variables de holgura:
  - ✓ Distancia por exceso (valor negativo) o defecto (valor positivo) a cada restricción de desigualdad
- Variables artificiales:
  - ✓ Distancia por exceso (valor negativo) o defecto (valor positivo) a cada restricción de igualdad
- Costes reducidos:
  - ✓ Derivadas direccionales de las variables
  - ✓ Proyección del gradiente de la función objetivo sobre el eje de la variable correspondiente
- Variables duales:
  - ✓ Costes reducidos de las variables de holgura y de las variables artificiales
  - ✓ Proyección del gradiente de la función objetivo sobre el vector ortogonal a la restricción correspondiente

Ejemplo 2

- Se introduce una nueva restricción que pasa por el óptimo



$$\max_{x,y} z = \frac{3}{4}x + y$$

$$\frac{x}{3} + y \le 6$$

$$2x + y \le 12$$

$$\frac{11}{18}x + y \le 7$$

$$x, y \ge 0$$

Tabla de método simplex

	x	y	u	v	w		
z	-0.75	-1					
u	0.33	1	1			6	6
v	2	1		1		12	12
w	0.611	1			1	7	7

z	-0.42	0	1	0	0	6	
y	0.333	1	1	0	0	6	18
v	1.667	0	-1	1	0	6	3.6
w	0.278	0	-1	0	1	1	3.6

A) elijo v como VBS

z	0	0	0.75	0.25	0	-7.5
y	0	1	1.2	-0.2	0	4.8
x	1	0	-0.6	0.6	0	3.6
w	0	0	-0.83	-0.17	1	0

B) elijo w como VBS

z	0	0	-0.5	0	1.5	-7.5
y	0	1	2.2	0	-1.2	4.8
v	0	0	5	1	-6	0
x	1	0	-3.6	0	3.6	3.6

z	0	0	0	0.1	0.9	-7.5
y	0	1	0	-0.44	1.44	4.8
u	0	0	1	0.2	-1.2	0
x	1	0	0	0.72	-0.72	3.6

Degeneración en primal

- En el problema anterior, el punto (3.6,4.8) queda determinado por cualquier pareja de las tres restricciones.
- Hay 5 variables (2 originales y 3 de holgura). Como hay 3 restricciones hay 3 variables básicas con valores x=3.6, y=4.8 y u=0 ó v=0 ó w=0, pero sólo una. Luego, hay una variable básica con valor 0 (solución degenerada).
- Degeneración en primal es igual a múltiples óptimos en dual. Estos valores son soluciones óptimas del dual y, a priori, se podría obtener cualquiera de ellas.

  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0, 0.1, 0.9)$ $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.75, 0.25, 0)$

- El primal tiene una región factible menor (por tener una restricción más), luego el dual tiene región factible mayor

¿Problema primal o dual: cuál de los dos se resuelve?

- Tiempo de solución por método simplex revisado $\approx m^3$

- Número de iteraciones por método simplex revisado $\approx 2m$

- Si $m \ll n$ resolver el problema primal

- Si $m \gg n$ resolver el problema dual
  1. pasar del primal al dual
  2. resolver el dual
  3. pasar del dual al primal

CONTENIDO

- ❑ INTRODUCCIÓN
- ❑ MÉTODO SIMPLEX
- ❑ ADDITIONAL DEVELOPMENTS (master)
- ❑ DUALIDAD
- ➢ ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
- ❑ INTERIOR POINT METHOD (master)
- ❑ COMPARISON AMONG CPLEX ALGORITHMS (master)

Análisis de sensibilidad

- Efectos sobre la solución óptima debidos a cambios en a_{ij}, b_i y c_j.
- NO se hace aplicando de nuevo el método simplex.
- **Procedimiento completo:**
- y^* , B^{-1*} no cambian aunque cambien b , c y A
  - ✓ $b \rightarrow \bar{b}$ $c \rightarrow \bar{c}$ $A \rightarrow \bar{A}$
  - ✓ se recalcula la tabla final para los nuevos valores $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{A}$ o de forma incremental
  - ✓ sólo se efectúan los cambios asociados a los cambios en los elementos correspondientes de $\bar{b}$, $\bar{c}$ y $\bar{A}$
  - ✓ preparación de la tabla del simplex para resolver por eliminación de Gauss
  - ✓ prueba de factibilidad (todas las variables básicas no negativas)
  - ✓ prueba de optimalidad (coeficientes no negativos en ecuación 0)
  - ✓ nueva iteración del simplex

Cambios en cotas de restricciones (i)

- Nueva función objetivo $\bar{z} = y^T \bar{b}$
- Nuevos valores de las soluciones óptimas $\bar{\hat{b}} = B^{-1}\bar{b}$
  - ✓ Puede afectar la factibilidad de la solución
- Caso ejemplo habitual
  - ✓ Variables duales $y^* = \begin{bmatrix} \cdot & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$
  - ✓ Inversa de la matriz base

$$B^{-1*} = \begin{bmatrix} 1 & 0.33 & -0.33 \\ \cdot & 0.5 & \cdot \\ \cdot & -0.33 & 0.33 \end{bmatrix}$$

- Cambio de cotas de las restricciones $b \to \bar{b}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Cambios en cotas de restricciones (ii)

- Nueva función objetivo $z = y^T \bar{b} = \begin{bmatrix} \cdot & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = 54$
- Nuevos valores de las soluciones óptimas

$$\hat{\bar{b}} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0.33 & -0.33 \\ \cdot & 0.5 & \cdot \\ \cdot & -0.33 & 0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- INFACTIBLE por variable básica negativa, se aplica el **método** simplex dual

Intervalo de valores factibles de b_i

- Intervalo de valores para los que la solución básica factible óptima se mantiene factible cambiando únicamente el valor de b_i en el problema.

$$\bar{\hat{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.5 \\ -0.33 \end{bmatrix} \Delta b_2 \geq 0$$

$$2 + 0.33\Delta b_2 = 0 \qquad \Delta b_2 = -2/0.33 = -6$$

$$6 + 0.5\Delta b_2 = 0 \qquad \Delta b_2 = -6/0.5 = -12$$

$$2 - 0.33\Delta b_2 = 0 \qquad \Delta b_2 = 2/0.33 = 6$$

$$-6 \leq \Delta b_2 \leq 6$$

$$\bar{b}_2 = 12 + \Delta b_2$$

$$6 \leq \bar{b}_2 \leq 18$$

Cambio en coeficiente de una variable no básica

- Coeficientes de x_j: $c_j, a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$,
- $c_j \to \bar{c}_j$ $\quad N_j \to \bar{N}_j$ columna j de la matriz A
- NO afectan la factibilidad de la solución.
- $\bar{c}'^T_N - c_B^T B^{-1} \bar{N}'$ coeficientes de x_j en la f.o.
- $B^{-1}\bar{N}'$ coeficientes de x_j en las restricciones
- ¿Óptima?
  - ✓ En primal $y^* \bar{N}_j - \bar{c}_j \geq 0$
  - ✓ En dual $\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_{ij} y_i \geq \bar{c}_j$ siendo j conocida
- Si no es óptima x_j es la variable básica entrante nueva y se sigue con el simplex.

Intervalo de valores de optimalidad de c_j

- Intervalo de valores de c_j para que la solución siga siendo óptima cambiando únicamente c_j.

$$\hat{c}_N^T = \overline{c}_N'^T - c_B^T B^{-1} \overline{N}' \geq 0$$

- Coste reducido de la variable no básica x_j $\quad \hat{c}_j \equiv c_j - z_j$
  - ✓ mínima cantidad que tiene que reducirse el "coste" de x_j para que interese realizar esa actividad (incrementar desde 0).
  - ✓ máximo incremento permisible de c_j para mantener la solución básica factible como óptima.

Introducción de una nueva variable

- Se supone que la nueva variable x_j a introducir ya estaba en el problema original y tenía todos sus coeficientes = 0 (y todavía los son en la tabla final) y que x_j es una variable no básica.

- Este cambio se convierte en cambio del coeficiente de una variable no básica.

Cambio en coeficiente de variable básica

- Difiere del caso de variable no básica porque requiere poner la tabla del simplex en forma adecuada para eliminación gaussiana (coeficientes 1 en fila correspondiente y 0 en el resto).

- Esto puede causar pérdida de factibilidad (método simplex dual) y/o optimalidad (método simplex).

Introducción de nueva restricción

- Se comprueba si se satisface para la solución óptima.
  1. Si lo hace, ésta sigue siendo óptima.
  2. Si no, se introduce la restricción en la tabla final del simplex con la variable de holgura, por exceso o artificial necesaria que se toma como variable básica.

     Se prepara la tabla para eliminación gaussiana y se sigue el método simplex dual.

Método simplex dual

- Opera en el primal como si el método simplex se aplicara simultáneamente al dual.
- Se utilizará:
  - ✓ Cuando se necesita introducir muchas variables artificiales para construir una solución básica factible inicial
  - ✓ En análisis de sensibilidad

Comparación entre simplex primal y dual

- Método simplex dual: se mueve por fuera de la región factible con valor de la f.o. mejores que en el óptimo. Entra en la región factible y al mismo tiempo consigue optimalidad.

Método Simplex Primal	**Método Simplex Dual**
Maneja soluciones básicas factibles y se mueve hacia la solución óptima (trata de satisfacer la condición de optimalidad)	Maneja soluciones básicas que satisfacen la condición de optimalidad (dual) y se mueve hacia la solución óptima tratando de conseguir factibilidad (dual)
Columna derecha ≥ 0	Ecuación f.o. ≥ 0
Ecuación f.o. < 0 (excepto en el óptimo)	Columna derecha < 0 (excepto en el óptimo)

Variable básica saliente	Variable básica entrante del dual
Variable negativa de mayor valor absoluto	Mayor coeficiente negativo en f.o. del dual
Variable básica entrante	Variable básica saliente del dual
Coef ecuación de f.o. que antes alcanza 0	Variable del dual que alcanza 0

Método simplex dual

1. Inicialización

   Problema en forma estándar (min, restricciones tipo =, variables ≥)

   Solución básica inicial cuyas variables básicas tienen coeficientes 0 en la ecuación f.o. y las no básicas coeficientes ≥ 0.

2. Prueba de optimalidad

   Comprobar si variables básicas ≥ 0. SÍ ⇒ solución óptima. NO ⇒ siguiente iteración

3. Siguiente iteración

   ✓ Determinar *variable básica saliente* (*fila pivote*): variable básica negativa con mayor valor absoluto

   ✓ Determinar *variable básica entrante* (*columna pivote*): variable no básica cuyo coeficiente en la ecuación de f.o. alcanza antes 0.

   ✓ Se comprueba entre las variables no básicas con coeficiente < 0 en fila pivote y se selecciona el menor cociente entre su coeficiente en la ecuación de la f.o. y esa fila.

$$\min\left\{\left|\frac{c_j - z_j}{y_{kj}}\right| : y_{kj} < 0\right\}$$

   ✓ Si no hay ningún elemento < 0 en la fila pivote el problema dual es no acotado y, por tanto, el primal es infactible.

   ✓ Determinar la nueva solución básica: preparación para resolver por eliminación gaussiana.

CONTENIDO

- ❑ INTRODUCCIÓN
- ❑ MÉTODO SIMPLEX
- ❑ ADDITIONAL DEVELOPMENTS (master)
- ❑ DUALIDAD
- ❑ ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
- ➢ INTERIOR POINT METHOD (master)
- ❑ COMPARISON AMONG CPLEX ALGORITHMS (master)

Propiedad de complementariedad de holguras

- Primal (P) $$\begin{aligned} \min z = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$
- Dual (D) $$\begin{aligned} \max y_0 = b^T y \\ A^T y + s = c \\ s \geq 0 \end{aligned}$$
- Propiedad de complementariedad de holguras para la solución óptima $x_j s_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n$

Método de punto interior primal-dual (i)

- Moverse por una secuencia de soluciones estrictamente factibles en problemas primal y dual tratando de que se verifiquen las condiciones de complementariedad de holguras.
- Específicamente, se trata de encontrar $x(\mu)$, $y(\mu)$ y $s(\mu)$ para $\mu > 0$ que satisfagan

$$\left.\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geq 0 \\ A^T y + s &= c \\ s &\geq 0 \end{aligned}\right\} \leftarrow (m+n) \text{ ecuaciones lineales de factibilidad}$$

$$x_j s_j = \mu \quad \forall j \leftarrow n \text{ ecuaciones no lineales de complementariedad}$$

- El parámetro μ se va reduciendo hasta lograr la convergencia. Mientras $\mu > 0$ la condición $x_j s_j = \mu$ implica que $x > 0$ y $s > 0$, es decir, que ambos son puntos estrictamente factibles. Reducción del intervalo de dualidad (*duality gap*) hasta alcanzar el valor cero en la solución óptima $c^T x - b^T y = x^T s = n\mu$

Método de punto interior primal-dual. Método de Newton (ii)

- Método de Newton de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales

$$x^{k+1} \leftarrow x^k + \Delta x^k$$
$$y^{k+1} \leftarrow y^k + \Delta y^k$$
$$s^{k+1} \leftarrow s^k + \Delta s^k$$

- Encontrar direcciones de movimiento Δx^k , Δy^k y Δs^k que garantizan estricta factibilidad $x^k > 0$, $s^k > 0$

$$A\left(x^k + \Delta x^k\right) = b \quad \rightarrow \quad A\Delta x^k = 0$$

$$A^T\left(y^k + \Delta y^k\right) + s^k + \Delta s^k = c \quad \rightarrow \quad A^T \Delta y^k + \Delta s^k = 0$$

$$x_j^{k+1} s_j^{k+1} = (x_j^k + \Delta x_j^k)(s_j^k + \Delta s_j^k) = \mu^{k+1} \rightarrow s_j^k \Delta x_j^k + x_j^k \Delta s_j^k + \boxed{\Delta x_j^k \Delta s_j^k} = \mu^{k+1} - x_j^k s_j^k$$

- Linealización: si incrementos son pequeños $\Delta x_j^k \Delta s_j^k$ es despreciable tenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$s_j^k \Delta x_j^k + x_j^k \Delta s_j^k = \mu^{k+1} - x_j^k s_j^k$$

Método de punto interior primal-dual. Sistema de ecuaciones en incrementos (iii)

- Denominamos $X = \mathrm{diag}(x)$, $S = \mathrm{diag}(s)$ y $e = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^T$

$$\begin{matrix} x = Xe \\ s = Se \end{matrix} \Longrightarrow XSe = \mu e$$

$$\left.\begin{aligned} S\Delta x + X\Delta s &= \boxed{\mu} e - XSe \\ A\Delta x &= 0 \\ A^T\Delta y + \Delta s &= 0 \end{aligned}\right\}$$ (m+2n) sistema de ecuaciones lineales

- El parámetro μ se elige en cada iteración

Método de punto interior primal-dual. Cálculo de incrementos (iv)

- A partir de la tercera ecuación $\Delta s = -A^T \Delta y$
- Sustituyendo en la primera $S\Delta x - XA^T \Delta y = \mu e - XSe$
- Premultiplicando por AS^{-1} y aprovechando que $A\Delta x = 0$ se calcula Δy

$$-AS^{-1}XA^T \Delta y = AS^{-1}(\boxed{\mu} e - XSe)$$

- Definiendo $D \equiv S^{-1}X$ y $v(\mu) = \mu e - XSe$ se calculan Δs e Δx

$$-ADA^T \Delta y = AS^{-1}v(\mu)$$

$$\Delta s = -A^T \Delta y$$

$$\Delta x = S^{-1}v(\boxed{\mu}) - D\Delta s$$

- Coste computacional asociado a la resolución del sistema de ecuaciones de cálculo de Δy, ya que ADA^T es más densa que A

Método de punto interior primal-dual. Iteración (v)

1. Se parte de solución estrictamente factible $x^k > 0$ y^k $s^k > 0$
2. Se calculan las direcciones de movimiento Δx^k Δy^k Δs^k
3. Se calculan las nuevas soluciones $x^k + \Delta x^k$ $y^k + \Delta y^k$ $s^k + \Delta s^k$
4. Se reduce el valor del parámetro $\mu^{k+1} = \sigma^k \mu^k$ $\sigma^k \in [0,1]$
   - La disminución puede ser muy rápida siempre que se mantenga estricta factibilidad
   - Hay que garantizar que intervalo de dualidad disminuye
     $x_j^{k+1} s_j^{k+1} = (x_j^k + \Delta x_j^k)(s_j^k + \Delta s_j^k) = \mu^{k+1}$

Desarrollos adicionales

- Mantenimiento de estricta factibilidad
- Solución inicial infactible
- Método primal-dual predictivo correctivo

Método de punto interior primal-dual. Estricta factibilidad y cotas de variables (vi)

- Garantizar estricta factibilidad: parámetros de longitud de paso

$$x(\alpha_P,\mu) = x + \boxed{\alpha_P}\Delta x$$
$$y(\alpha_D,\mu) = y + \boxed{\alpha_D}\Delta y$$
$$s(\alpha_D,\mu) = s + \boxed{\alpha_D}\Delta s$$

$$\alpha_P = \min_{\Delta x_j<0}\left(-x_j/\Delta x_j\right)$$
$$\alpha_D = \min_{\Delta s_j<0}\left(-s_j/\Delta s_j\right)$$

- Estrategia habitual: longitud de paso única $\alpha = \min(\alpha_P,\alpha_D)$

$$x_j + \alpha\Delta x_j \geq 0$$
$$s_j + \alpha\Delta s_j \geq 0$$

- Condición de centralidad (*path following*) $(x^k,s^k)\in C^k$

$$C^k = \left\{(x,s): x_j s_j \geq \gamma\mu^k,\ j=1,\ldots,n\right\} \quad \gamma\in(0,1)$$

- Valores adecuados de parámetros α , γ y μ imprescindibles para comportamiento robusto del método

Método de punto interior primal-dual. Solución inicial infactible (vii)

- Hasta ahora se partía de solución estrictamente factible en primal y dual
- No vale la solución básica factible del método simplex
- Se añaden residuos en las ecuaciones

$$A\left(x^k + \Delta x^k\right) = b \quad \rightarrow \quad A\Delta x^k = b - Ax^k \equiv r_P$$

$$A^T\left(y^k + \Delta y^k\right) + s^k + \Delta s^k = c \quad \rightarrow \quad A^T \Delta y^k + \boxed{\Delta s^k} = c - (A^T y^k + s^k) \equiv \boxed{r_D}$$

$$S\Delta x + X\Delta s = \mu e - XSe \equiv v(\mu)$$
$$A\Delta x = b - Ax \equiv r_P$$
$$A^T\Delta y + \Delta s = c - A^T y - s \equiv r_D$$

$$\Delta y = -(ADA^T)^{-1}\left[AS^{-1}v(\mu) - ADr_D - r_P\right]$$
$$\Delta s = -A^T\Delta y + r_D$$
$$\Delta x = S^{-1}v(\mu) - D\Delta s$$

- Hay que dar prioridad a la disminución de infactibilidades sobre la disminución del intervalo de dualidad

Método de punto interior primal-dual predictivo correctivo (viii)

- Diseñado para no ignorar los términos de segundo orden $\Delta x_j \Delta s_j$
- Etapa predictiva o afín: se calculan los incrementos según ecuaciones anteriores

$$\begin{aligned} S\Delta x + X\Delta s &= \mu e - XSe \equiv v(\mu) \\ A\Delta x &= b - Ax \equiv r_P \\ A^T\Delta y + \Delta s &= c - A^T y - s \equiv r_D \end{aligned}$$

- Etapa correctiva: se introducen los valores calculados en la etapa anterior

$$\begin{aligned} S\Delta x + X\Delta s &= \mu e - XSe \boxed{- \Delta X \Delta S e} \equiv v(\mu) \\ A\Delta x &= b - Ax \equiv r_P \\ A^T\Delta y + \Delta s &= c - A^T y - s \equiv r_D \end{aligned}$$

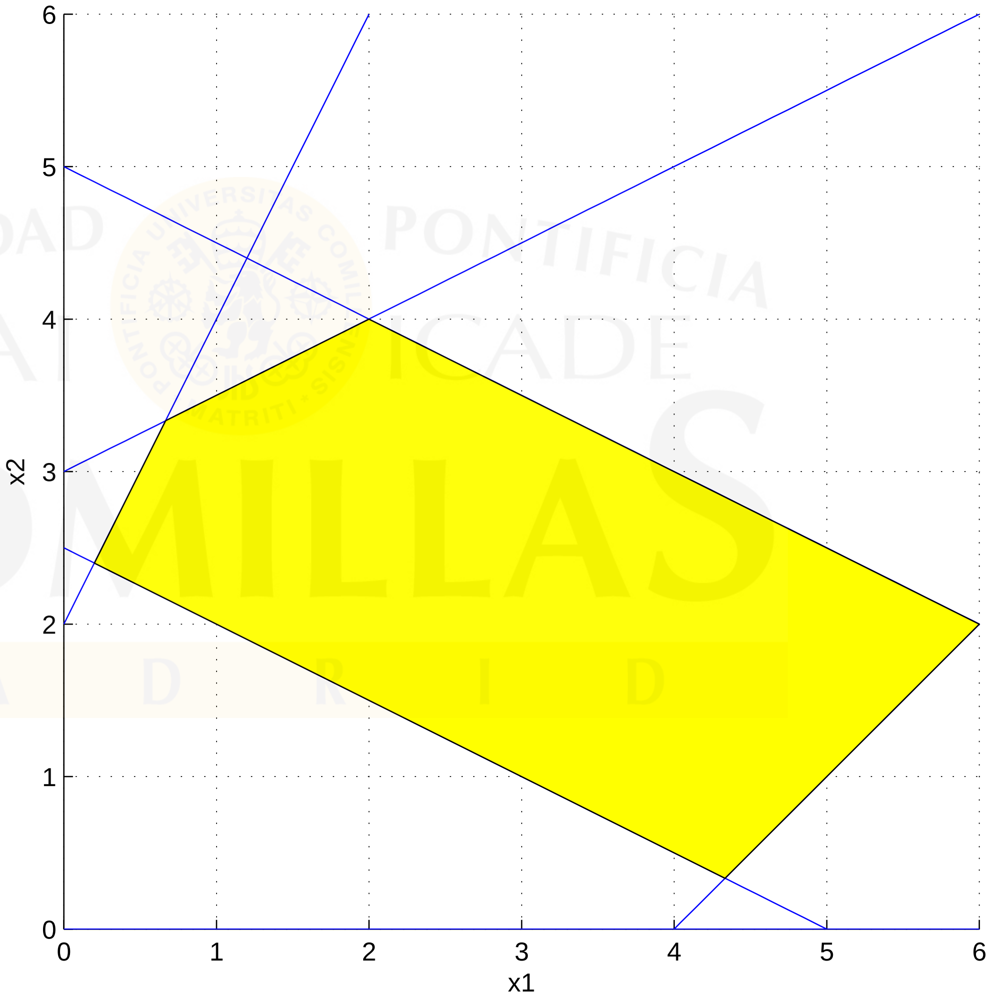
$$\begin{aligned} \Delta X &= \mathrm{diag}(\Delta x) \\ \Delta S &= \mathrm{diag}(\Delta s) \end{aligned}$$

Método de punto interior primal-dual (ix)

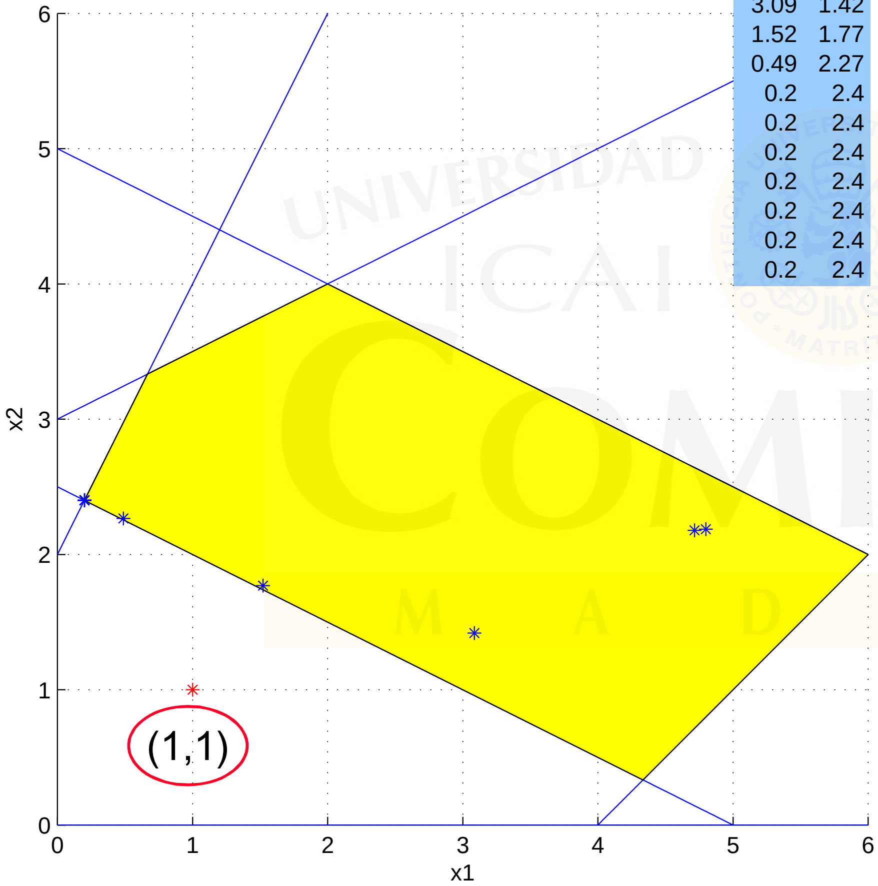
- Los métodos de punto interior no producen soluciones básicas óptimas. Por ello cuando llegan al óptimo se suele realizar un proceso de permutación (*crossover*) para determinar la solución básica óptima.
- En el método de punto interior el tiempo de ejecución depende principalmente del número de elementos (densidad) de la matriz de restricciones.

Caso ejemplo

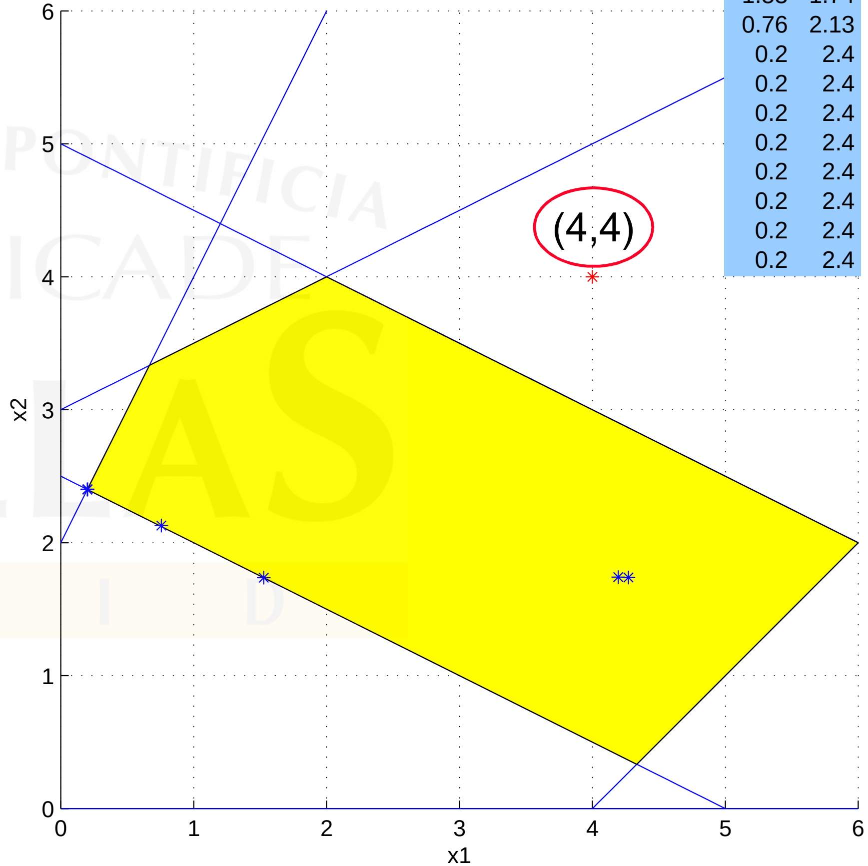
$$\min x_1 + x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \le 2$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$-x_1 - 2x_2 \le -5$$
$$x_1 - x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



Puntos iniciales infactibles $\mu^{k+1} = \mu^k / 10$

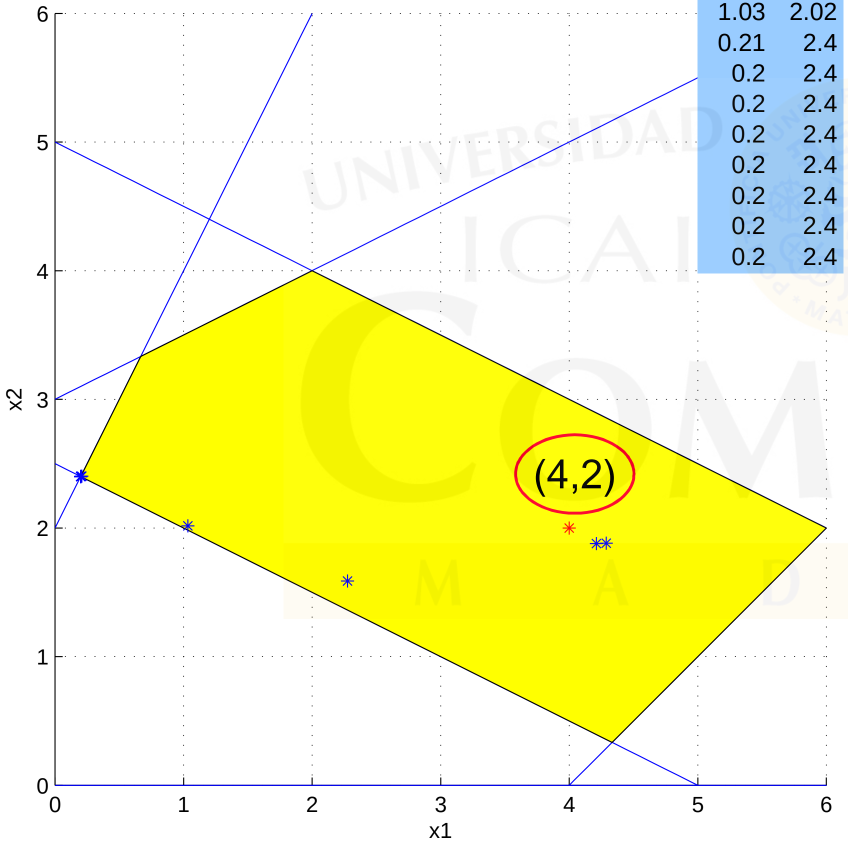


1	1
4.8	2.19
4.72	2.18
3.09	1.42
1.52	1.77
0.49	2.27
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4

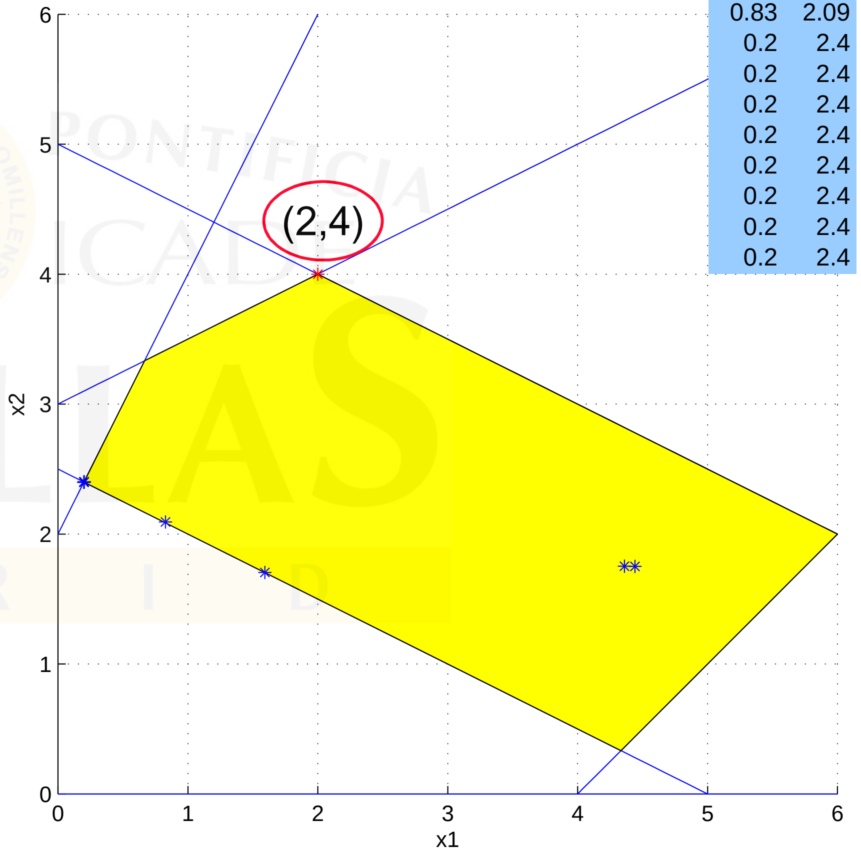


4	4
4.27	1.74
4.19	1.74
1.53	1.74
0.76	2.13
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4

Puntos iniciales factibles $\mu^{k+1} = \mu^k / 10$



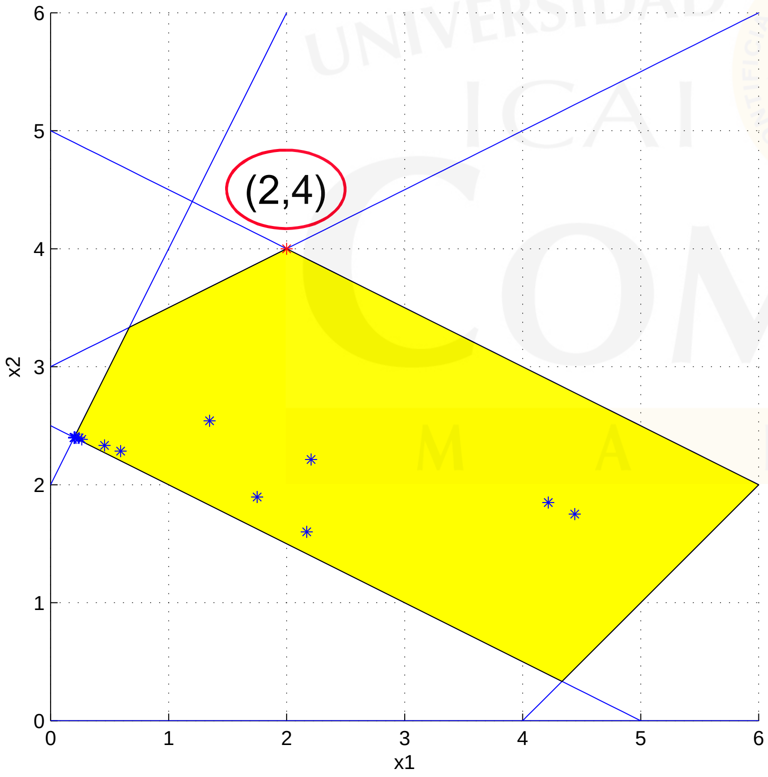
4	2
4.29	1.88
4.21	1.88
2.27	1.59
1.03	2.02
0.21	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4



2	4
4.44	1.75
4.36	1.75
1.59	1.7
0.83	2.09
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4

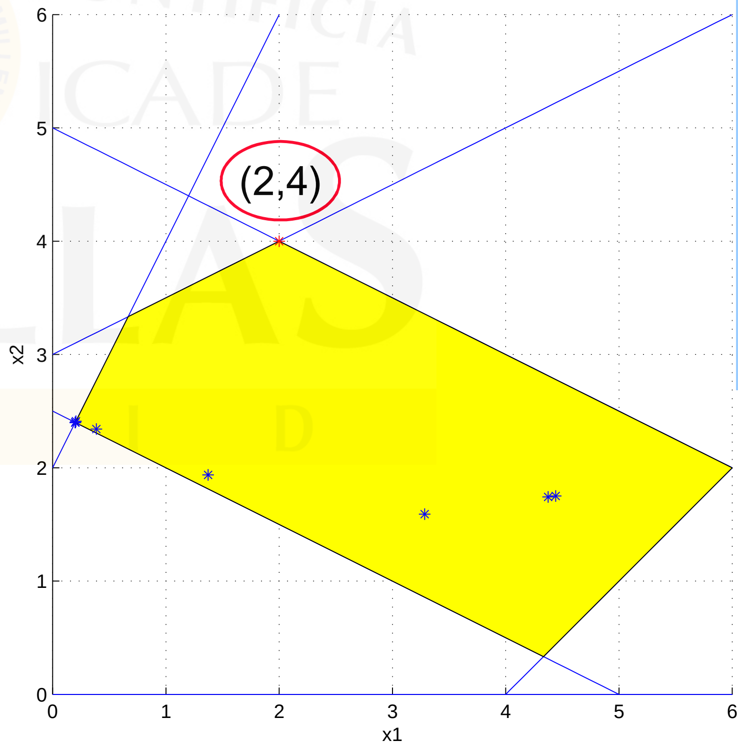
Puntos iniciales factibles

$$\mu^{k+1} = \mu^k / 2$$



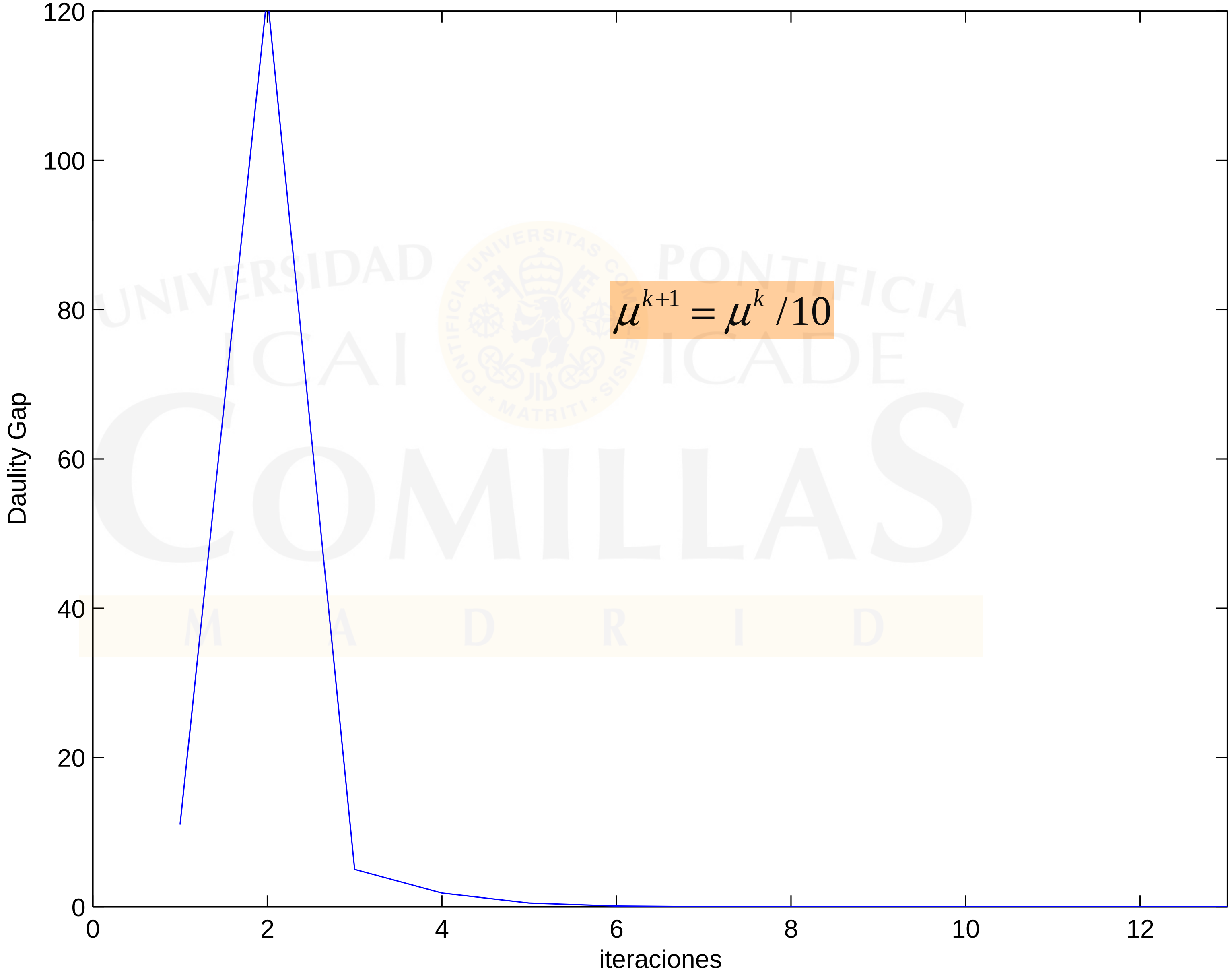
2	4
4.44	1.75
4.22	1.85
1.35	2.54
2.21	2.21
2.17	1.6
1.75	1.9
0.59	2.28
0.46	2.33
0.24	2.4
0.26	2.38
0.2	2.4
0.22	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4

$$\mu^{k+1} = \mu^k / 20$$



2	4
4.44	1.75
4.38	1.74
3.29	1.59
1.37	1.94
0.39	2.34
0.21	2.41
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4
0.2	2.4

Convergencia



Actualización de μ^k

- μ es una aproximación del intervalo de dualidad.

$$x_j^{k+1} s_j^{k+1} = (x_j^k + \Delta x_j^k)(s_j^k + \Delta s_j^k) = \mu^{k+1}$$

- Si su valor se decrementa muy rápidamente se puede perder convergencia. El intervalo de dualidad puede incluso aumentar.
- Si su valor se decrementa muy lentamente se requieren muchas iteraciones.
- Factores entre iteraciones sucesivas de 0.7 a 0.9 (en función del número de variables del primal) garantizan la convergencia.

CONTENIDO

- ❑ INTRODUCCIÓN
- ❑ MÉTODO SIMPLEX
- ❑ ADDITIONAL DEVELOPMENTS (master)
- ❑ DUALIDAD
- ❑ ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD
- ❑ INTERIOR POINT METHOD (master)
- ➢ COMPARISON AMONG CPLEX ALGORITHMS (master)

¿Cuál es el mejor algoritmo?

- CPLEX 10.0
  - ✓ Simplex primal gana el 15 % de las veces
  - ✓ Simplex dual gana el 36 % de las veces
  - ✓ Punto interior gana el 39 % de las veces
  - ✓ Combinación de los anteriores gana un 10 % de las veces

	Number Of Problems	Barrier Win %	Dual Win %	Primal Win %	Tie %	Barrier Avg Win	Dual Avg Win	Primal Avg Win
All	788	39%	36%	15%	10%	3.29	2.19	1.90
>= 1000 rows	620	42%	38%	15%	5%	3.40	2.28	1.86
>= 5000 rows	381	44%	39%	15%	2%	3.70	2.53	1.95
>= 10000 rows	290	42%	42%	15%	1%	3.76	2.70	2.10
>= 25000 rows	183	42%	40%	17%	1%	4.42	3.13	2.37
>= 50000 rows	115	43%	37%	18%	2%	5.39	3.75	2.41
>= 100000 rows	75	41%	36%	21%	1%	6.92	4.43	2.29
>= 250000 rows	36	36%	31%	31%	3%	5.41	6.19	2.35
>= 500000 rows	21	29%	33%	33%	5%	3.20	8.96	2.06
>= 1000000 rows	7	43%	0%	43%	14%	7.73		1.99

Andrés Ramos

http://www.iit.comillas.edu/aramos/

Andres.Ramos@comillas.edu