UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Dualidad y postoptimización

José María Ferrer Caja
Universidad Pontificia Comillas

Definición

- A cada problema de optimización lineal le corresponde otro que se denomina problema dual
- En forma canónica

Primal

$$
(P) \quad \begin{aligned} & \max_x c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}
$$

Dual

$$
(D) \quad \begin{aligned} & \min_y b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}
$$

$$
x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m
$$

- La correspondencia es biunívoca
- El dual del dual es el primal

Problema dual en forma canónica. Ejemplo

Primal

$$\begin{array}{lllll} \max z = 3x_1 + 5x_2 & & & & \\ x_1 & & & \le & 4 \\ & 2x_2 & & \le & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & \le & 18 \\ x_1, & x_2 & & \ge & 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lllll} \min w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 & & & & \\ y_1 & & +3y_3 & \ge & 3 \\ & 2y_2 & +2y_3 & \ge & 5 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \ge & 0 \end{array}$$

Interpretación económica

- El valor de la variable dual y_j representa el incremento en la función objetivo z del problema primal al aumentar marginalmente el recurso b_j
- Expresiones equivalentes:
  - ✓ Variable dual
  - ✓ Precio en la sombra
  - ✓ Multiplicador simplex

Tabla de transformaciones

minimización		maximización
VARIABLES		RESTRICCIONES
≥ 0		$\leq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
No restringida		$=$
RESTRICCIONES		VARIABLES
$\geq$		≥ 0
$\leq$		≤ 0
$=$		No restringida

- Las transformaciones y las relaciones entre ambos problemas son simétricas

Problema dual. Ejemplo

Primal

$$
\begin{array}{l}
\min z = 2x_1 - x_3 + 4x_4 \\
\begin{array}{cccccc}
x_1 & +3x_2 & & -2x_4 & \leq & 0 \\
 & -4x_2 & +x_3 & +5x_4 & \geq & 3 \\
-2x_1 & -x_2 & +3x_3 & & = & 1
\end{array} \\
x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{l}
\max w = 3y_2 + y_3 \\
\begin{array}{ccccc}
y_1 & & -2y_3 & \leq & 2 \\
3y_1 & -4y_2 & -y_3 & \leq & 0 \\
 & y_2 & +3y_3 & \geq & -1 \\
-2y_1 & +5y_2 & & = & 4
\end{array} \\
y_1 \leq 0, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

Teorema débil de dualidad

- El valor de la función objetivo para cualquier solución factible del problema de maximización es menor o igual que el valor de la función objetivo para cualquier solución factible del problema de minimización

$$c^T x \leq b^T y$$

Teorema fuerte de dualidad

- Si uno de los problemas tiene solución óptima, entonces el otro también, y los valores objetivos óptimos coinciden

$$c^T x* = b^T y*$$

Soluciones básicas complementarias (1)

- En cada iteración del método simplex, se encuentra una solución básica factible del primal y una solución básica "óptima" (con costes reducidos positivos) del dual. Los valores objetivos coinciden

$$\boxed{\begin{array}{c} \hat{x}_B = B^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad \hat{y} = c_B^T B^{-1} \\ c^T \hat{x} = b^T \hat{y} \end{array}}$$

- Si la solución básica del primal no es óptima, la solución básica del dual no es factible

- Si la solución básica del primal es óptima, la solución básica del dual también es óptima

Soluciones básicas complementarias (2)

- Cuando los problemas primal y dual originales corresponden a la forma canónica, en cada iteración del método simplex:
  - ✓ Los valores de las variables duales originales son los costes reducidos de las variables primales de holgura (y exceso)
  - ✓ Los valores de las variables duales de holgura (y exceso) son los costes reducidos de las variables primales originales
  - ✓ Los costes reducidos de las variables duales no básicas son los valores de las variables primales básicas

Soluciones complementarias. Ejemplo (1)

$$(P)\quad \begin{aligned} &\max x_1 + 3x_2 \\ &x_1 + x_2 \le 3 \\ &-x_1 + x_2 \le 1 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$(D)\quad \begin{aligned} &\min 3y_1 + y_2 \\ &y_1 - y_2 \ge 1 \\ &y_1 + y_2 \ge 3 \\ &y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

✓ En forma estándar

$$\begin{aligned} &\min - x_1 - 3x_2 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &-x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

$$(D)\quad \begin{aligned} &\min 3y_1 + y_2 \\ &y_1 - y_2 - y_3 = 1 \\ &y_1 + y_2 - y_4 = 3 \\ &y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Soluciones complementarias. Ejemplo (2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{x}_B = \begin{pmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{y}^T = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ✓ Tabularmente

$\hat{y}_3 = -1, \hat{y}_4 = -3 \qquad \hat{y}_1 = 0, \hat{y}_2 = 0$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	-1	-1	-3	0	0	0
x_3	0	1	1	1	0	3
x_4	0	-1	1	0	1	1

Costes reducidos de y_1 e y_2

- ✓ Solución no óptima para (P) y no factible para (D)

Soluciones complementarias. Ejemplo (3)

$\hat{y}_3 = -4, \hat{y}_4 = 0$ $\hat{y}_1 = 0, \hat{y}_2 = 3$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	-1	-4	0	0	3	3
x_3	0	2	0	1	-1	2
x_2	0	-1	1	0	1	1

Costes reducidos de y_1 e y_4

- ✓ Solución no óptima para (P) y no factible para (D)
- ✓ Algebraicamente

$$\hat{y}^T = \begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluciones complementarias. Ejemplo (4)

$\hat{y}_3 = 0, \hat{y}_4 = 0$ $\hat{y}_1 = 2, \hat{y}_2 = 1$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	-1	0	0	2	1	7
x_1	0	1	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	0	1	1/2	1/2	2

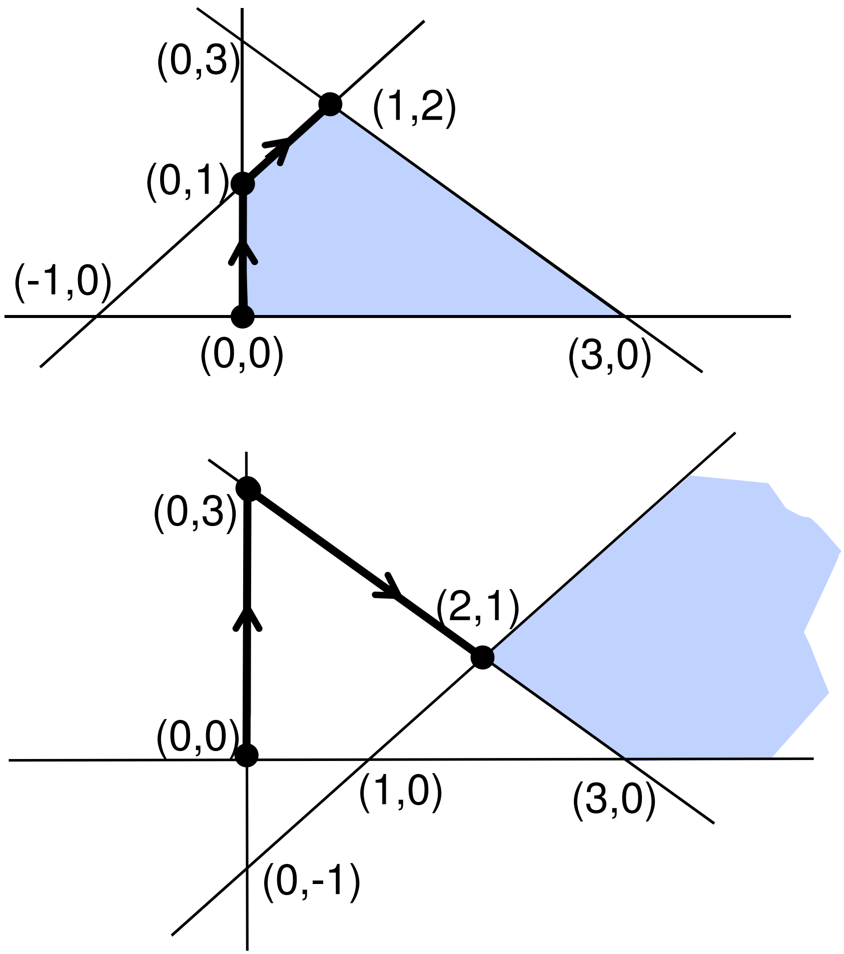
Costes reducidos de y_3 e y_4

- ✓ Solución óptima para (P) y factible para (D)
- ✓ Algebraicamente

$$(y^*)^T = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluciones complementarias. Ejemplo (5)

✓ Geométricamente



Teorema fundamental de dualidad

- Dados dos problemas respectivamente duales, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:
  - ✓ Ambos problemas tienen solución óptima
  - ✓ Uno de ellos tiene solución no acotada y el otro es no factible
  - ✓ Ambos problemas son no factibles

Teorema de holguras complementarias

- Dados dos problemas respectivamente duales, con soluciones óptimas x^* e y^*:
  - ✓ Si una variable es básica → su restricción dual se cumple con igualdad (la variable dual de holgura no es básica)
  - ✓ Si una restricción se cumple estrictamente (variable de holgura básica) → su variable dual no es básica (y por tanto, nula)

- Dada una solución
  - ✓ Se llama restricción activa a la que se cumple con igualdad
  - ✓ Se llama restricción inactiva a la que se cumple con desigualdad estricta

Holguras complementarias. Ejemplo (1)

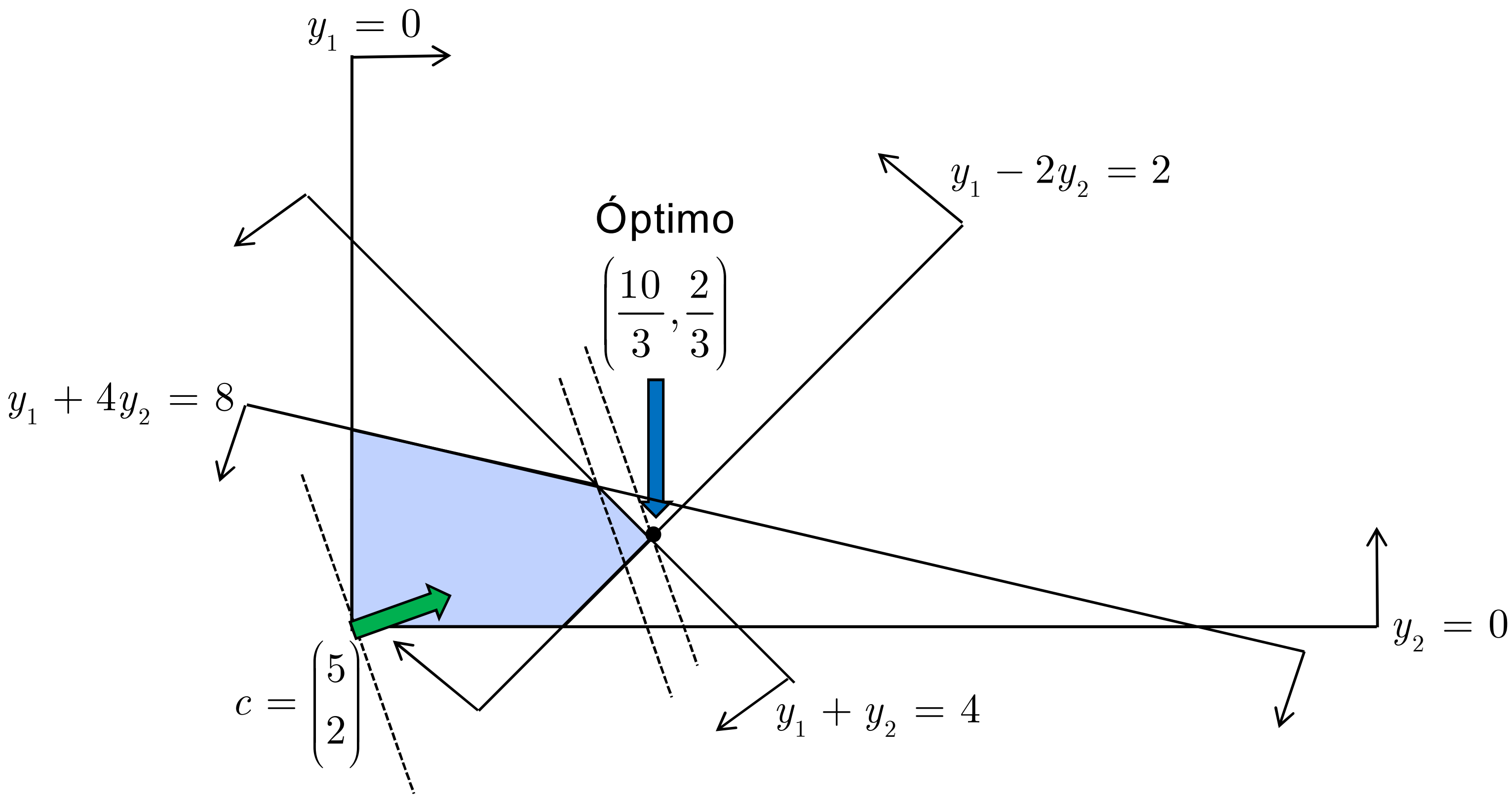
Queremos resolver el problema:

$$
(P)\quad
\begin{array}{llll}
\min z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 & & & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 5 \\
4x_1 & +x_2 & -2x_3 & \geq 2 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Como tiene 2 restricciones, su problema dual tendrá dos variables, y podrá resolverse geométricamente:

$$
(D)\quad
\begin{array}{lll}
\max w = 5y_1 + 2y_2 & & \\
y_1 & +4y_2 & \leq 8 \\
y_1 & +y_2 & \leq 4 \\
y_1 & -2y_2 & \leq 2 \\
y_1, y_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Holguras complementarias. Ejemplo (2)



- ✓ La solución óptima del problema dual es $y_1^* = 10/3$, $y_2^* = 2/3$
- ✓ La función objetivo vale $w^* = 18$

Holguras complementarias. Ejemplo (3)

- ✓ $y_1^* = 10/3 > 0$ (la 1ª variable es básica) → $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 5$ (la 1ª restricción es activa)
- ✓ $y_2^* = 2/3 > 0$ (la 2ª variable es básica) → $4x_1^* + x_2^* - 2x_3^* = 2$ (la 2ª restricción es activa)
- ✓ $y_1^* + 4y_2^* < 8$ (la 1ª restricción es inactiva) → $x_1^* = 0$

- ✓ Se resuelve el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2^* + x_3^* = 5 \\ x_2^* - 2x_3^* = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \quad x_2^* = 4,\ x_3^* = 1 \text{ con } z^* = 18$$

- ✓ Se ha llegado a la solución óptima del problema primal sin necesidad de usar el teorema de dualidad fuerte, que asegura

$$z^* = w^* = 18$$

- ✓ Esta propiedad podrá aplicarse conjuntamente con el teorema de holguras complementarias, aportando una ecuación más

Método simplex dual

- Método alternativo al simplex para resolver un problema de optimización lineal
- Parte de una solución básica "óptima" (con costes reducidos positivos), pero quizá infactible
  - ✓ Solución dual factible: solución básica con costes reducidos positivos
- En cada iteración se saca de la base una variable con valor negativo, y se mete una variable de forma que no se pierda la optimalidad
- Cuando se consiga una solución básica factible (primal factible) el método termina. Si no se puede, el problema es infactible

Algoritmo dual simplex

1. Inicialización

- ✓ Elegir una base B que proporcione una solución básica dual factible (con costes reducidos positivos)

$$\hat{x}_B = \hat{b} = B^{-1}b \qquad \hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T Y \geq 0$$
$$\hat{x}_N = 0$$

2. Criterio de factibilidad. Elección de la variable de salida

- ✓ Si $\hat{b} = B^{-1}b \geq 0$ ➡ La solución actual es óptima
- ✓ Si no, elegir la variable básica x_s tal que $\hat{b}_s = \min\left\{\hat{b}_i : \hat{b}_i < 0\right\}$

3. Elección de la variable de entrada

- ✓ Si $y_{sj} \geq 0 \ \forall j \in I_N$ ➡ Problema infactible (el dual es no acotado)
- ✓ Si no, elegir x_t no básica tal que $\left|\dfrac{c_t - z_t}{y_{st}}\right| = \min\limits_{j \in I_N}\left\{\left|\dfrac{c_j - z_j}{y_{sj}}\right| : y_{sj} < 0\right\}$

4. Pivoteo

- ✓ Con la nueva base B actualizar $B^{-1}, \hat{x}_B, Y, \hat{z}, \hat{c}_N$
- ✓ Volver al paso 2

Inicialización del algoritmo dual simplex

- Si se conoce una base que proporcione una solución básica dual factible, se utiliza ésta como solución inicial del algoritmo
  - ✓ Cuando el problema está en forma canónica de minimización con $c \geq 0$, la base asociada a las variables de holgura/exceso proporciona siempre una solución básica dual factible
- Si no, se requiere un método para encontrar una solución básica dual factible
- Un método rápido es la técnica de la restricción artificial

Algoritmo dual simplex. Ejemplo (1)

$$(P)\quad \begin{array}{l} \min z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq & 5 \\ 4x_1 & +x_2 & -2x_3 & \geq & 2 \end{array} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Añadimos variables de exceso y cambiamos de signo:

$$\begin{array}{l} \min z = 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \begin{array}{ccccccc} -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & & = & -5 \\ -4x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = & -2 \end{array} \\ x_j \geq 0 \ \forall j \end{array}$$

La base asociada a las variables x_4 y x_5 es la identidad

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \geq 0 \Leftarrow$$ Dual factible

Algoritmo dual simplex. Ejemplo (2)

Se aplica el algoritmo dual simplex en forma tabular:

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
			8	4	2	0	0	
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	-z	-1	8	4	2	0	0	0
0	x_4	0	-1	-1	-1	1	0	-5
0	x_5	0	-4	-1	2	0	1	-2
			8	4	2			

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
-z	-1	6	2	0	2	0	-10
x_3	0	1	1	1	-1	0	5
x_5	0	-6	-3	0	2	1	-12
		1	2/3				

Algoritmo dual simplex. Ejemplo (3)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
-z	-1	2	0	0	2/3	2/3	-18	
x_3	0	-1	0	1	-1/3	1/3	1	≥0
x_2	0	2	1	0	-2/3	-1/3	4	≥0

Como hemos alcanzado una solución factible (sin perder la optimalidad), la solución actual es óptima

$$\boxed{x_1{}^* = 0, \quad x_2{}^* = 4, \quad x_3{}^* = 1, \quad z^* = 18}$$

Técnica de la restricción artificial (1)

- Expresar el problema en forma canónica de minimización

$$
(P) \qquad \begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax \geq b \\ &x \geq 0 \end{aligned}
$$

- Añadir variables de holgura (exceso) en todas las restricciones y cambiar de signo para obtener la identidad

$$
\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax - Ix_h = b \\ &x \geq 0, x_h \geq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min c^T x \\ &-Ax + Ix_h = -b \\ &x \geq 0, x_h \geq 0 \end{aligned}
$$

- Construir la tabla asociada a la base $B = I$
- Si $c_j - z_j \geq 0 \ \forall j$ $\Longrightarrow$ la solución básica actual es dual factible
  Aplicar el algoritmo dual simplex
- Si no, agregar la restricción $\sum_{j \in I_N} x_j \leq M$ con M arbitrariamente grande
- Añadir una variable de holgura $\sum_{j \in I_N} x_j + x_{n+1} = M$

Técnica de la restricción artificial (2)

- Introducir a la tabla la fila asociada a la restricción artificial, con variable básica x_{n+1}
- Meter en la base la variable x_t con $\hat{c}_t = \min_j \left\{ \hat{c}_j : \hat{c}_j < 0 \right\}$ y sacar la variable x_{n+1} pivotando sobre el elemento $y_{n+1\,t}$
- Se habrá alcanzado una solución dual factible ⟹ Aplicar el algoritmo dual simplex

- Si este problema es infactible ⟹ el problema P es infactible
- Si tiene solución óptima (x^*, x_{n+1}^*)
  - ✓ $x_{n+1}^* > 0$ ⟹ x^* es la solución óptima de P
  - ✓ $x_{n+1}^* = 0,\ c_{n-1} - z_{n-1} = 0$ ⟹ x^* es la solución óptima de P
  - ✓ $x_{n+1}^* = 0,\ c_{n-1} - z_{n-1} > 0$ ⟹ P es no acotado

Técnica de la restricción artificial. Ejemplo (1)

$$\begin{aligned} \min -2x_1 + x_2 - 3x_3 & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 &\geq 2 \\ 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

La 1ª restricción es de igualdad. Habría que desglosarla en dos desigualdades. En este caso lo podemos evitar ya que x_1 aporta una columna a la identidad. Añadimos variables de holgura a las otras dos:

$$\begin{aligned} \min -2x_1 + x_2 - 3x_3 & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad &= 2 \\ 2x_2 + x_3 \qquad + x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Técnica de la restricción artificial. Ejemplo (2)

Cambiamos de signo la 2ª restricción para obtener la identidad:

$$\begin{aligned}
&\min -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\
&\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\
&\quad - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\
&\quad 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Tomamos la base B = I asociada a las variables x_1, x_4 y x_5

La tabla inicial es

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
			-2	1	-3	0	0	
	-z	-1	0	5	-1	0	0	12
-2	x_1	0	1	2	1	0	0	6
0	x_4	0	0	-1	-2	1	0	-2
0	x_5	0	0	2	1	0	1	4

No es dual factible, ya que $c_3 - z_3 < 0$

Técnica de la restricción artificial. Ejemplo (3)

Añadimos al problema la restricción artificial, con su variable de holgura

$$x_2 + x_3 \leq M \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_3 + x_6 = M,\ x_6 \geq 0$$

Añadimos la columna de x_6 a la base anterior consiguiendo de nuevo la identidad (de orden 4 ahora)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-z	-1	0	5	-1	0	0	0	12
x_1	0	1	2	1	0	0	0	6
x_4	0	0	-1	-2	1	0	0	-2
x_5	0	0	2	1	0	1	0	4
x_6	0	0	1	1	0	0	1	M

Entra en la base x_3 por ser la única variable con coste reducido negativo

Sale de la base x_6

Se pivota sobre el elemento correspondiente

Técnica de la restricción artificial. Ejemplo (4)

Tras el pivoteo, se obtiene una solución básica dual factible

Se aplica normalmente el algoritmo dual simplex

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-z	-1	0	6	0	0	0	1	12+M
x_1	0	1	1	0	0	0	-1	6-M
x_4	0	0	1	0	1	0	2	2M-2
x_5	0	0	1	0	0	1	-1	4-M
x_3	0	0	1	1	0	0	1	M
							1	

Sale de la base x_5 por ser la variable básica con valor más negativo

Entra en la base x_6 por ser la única variable con $y_{5j} < 0$

Se pivota sobre el elemento correspondiente

Técnica de la restricción artificial. Ejemplo (5)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
-z	-1	0	7	0	0	1	0	16	
x_1	0	1	0	0	0	-1	0	2	≥0
x_4	0	0	3	0	1	2	0	6	≥0
x_6	0	0	-1	0	0	-1	1	M-4	≥0
x_3	0	0	2	1	0	1	0	4	≥0

Hemos alcanzado una solución factible (sin perder la optimalidad)

La solución actual es óptima para el problema modificado

Como $x_6^* > 0$ ⟹ también es óptima para el problema original:

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 4 \\ x_4^* = 6, \quad x_5^* = 0 \\ z^* = -16 \end{array}}$$

Análisis de sensibilidad

- Estudia los efectos sobre la solución óptima de un cambio en alguno de los elementos del problema
- Se trata de aprovechar la información dada en la tabla óptima, no de comenzar a resolver de nuevo el problema
- Se introducirán los cambios de forma oportuna en la tabla óptima
  - ✓ Si se pierde la optimalidad ⟹ Aplicar simplex
  - ✓ Si se pierde la factibilidad ⟹ Aplicar dual simplex

Análisis de sensibilidad. Ejemplo

Sea el siguiente problema

$$\begin{aligned} &\min -2x_1 + x_2 - 4x_3 \\ &\quad x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ &\quad x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Su tabla óptima es

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
-z	14	0	0	13	3	28
x_3	5	0	1	4	1	9
x_2	4	1	0	3	1	8

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 8, \quad x_3^* = 9, \quad z^* = -28$$

Se quiere resolver el problema tras algunas modificaciones

Cambio en el vector de costes

- Sustitución de c_k por c_k'

- Si x_k es no básica
  - ✓ Recalcular su coste reducido $\hat{c}_k' = \hat{c}_k + c_k' - c_k$
  - ✓ Si $\hat{c}_k' \geq 0$ ➡ la solución actual sigue siendo óptima
  - ✓ Si $\hat{c}_k' < 0$ ➡ solución no óptima. Aplicar simplex

- Si x_k es básica
  - ✓ Recalcular los costes reducidos $\hat{c}_j' = \hat{c}_j + (c_k - c_k')y_{kj} \quad \forall j \in I_N$
  - ✓ Recalcular el valor de la función objetivo $-\hat{z}' = -\hat{z} + (c_k - c_k')\hat{b}_k$
  - ✓ Si $\hat{c}_j' \geq 0 \; \forall j$ ➡ la solución actual sigue siendo óptima
  - ✓ Si algún $\hat{c}_j' < 0$ ➡ solución no óptima. Aplicar simplex

Cambio en el vector de costes. Ejemplo (1)

✓ Se reemplaza $c_3 = -4$ por $c_3 = -1$

Como x_3 es una variable básica hay que recalcular toda la fila 0

		-2	1	-1	0	0		
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
	-z	-1	0	0	1	0	1	
-1	x_3	5	0	1	4	1	9	9/5
1	x_2	4	1	0	3	1	8	8/4

La tabla ya no es óptima. Se aplica el algoritmo simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
-z	0	0	1/5	9/5	1/5	14/5
x_1	1	0	1/5	4/5	1/5	9/5
x_2	0	1	-4/5	-1/5	1/5	4/5

Solución óptima:

$$x_1^* = \frac{9}{5},\ x_2^* = \frac{4}{5},\ x_3^* = 0$$

$$z^* = \frac{-14}{5}$$

Cambio en el vector de costes. Ejemplo (2)

✓ ¿Para qué valores de c_1 la solución actual sigue siendo óptima?

Como x_1 no es básica basta con recalcular su coste reducido:

$$\hat{c}_1' = \hat{c}_1 + c_1' - c_1 = 14 + c_1' - (-2) = c_1' + 16$$

La solución seguirá siendo óptima si este coste reducido es positivo:

$$\hat{c}_1' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1' + 16 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1' \geq -16$$

Por lo tanto, la solución es óptima si y sólo si $c_1 \geq -16$

Cambio en el vector del lado derecho

- Sustitución de b por b'

- Recalcular $\hat{b}' = B^{-1}b', \quad -\hat{z}' = -c_B^T\hat{b}'$
  - ✓ Si $\hat{b}' \geq 0$ ⇨ la tabla actual sigue siendo óptima
  - ✓ Si no ⇨ solución no factible. Aplicar dual simplex

Cambio en el vector del lado derecho. Ejemplo

- ✓ Se reemplaza $b_1 = 1$ por $b_1 = -2$

Hay que recalcular el vector de cotas

$$\hat{b}' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad -\hat{z}' = -c_B^T\hat{b}' = -\begin{pmatrix} -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -11$$

La solución ya no es factible. Se aplica el algoritmo dual simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	-z	14	0	0	13	3	-11
-4	x_3	5	0	1	4	1	-3
1	x_2	4	1	0	3	1	-1

Debe salir de la base la variable x_3. Como su fila es completamente positiva ⇒ el problema es infactible

Cambio en una columna no básica

- Sustitución de a_j por a_j' siendo x_j no básica

- Recalcular $y_j' = B^{-1}a_j', \quad \hat{c}_j' = c_j - c_B^T y_j'$
  - ✓ Si $\hat{c}_j' \geq 0$ ➡ la solución actual sigue siendo óptima
  - ✓ Si $\hat{c}_j' < 0$ ➡ solución no óptima. Aplicar simplex

Cambio en una columna no básica. Ejemplo

✓ Se reemplaza $a_1 = (1\ 1)^T$ por $a_1 = (-2\ 1)^T$

Hay que recalcular la columna y_1 y el nuevo coste reducido $c_1 - z_1$

$$y_1' = B^{-1}a_1' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_1' = c_1 - c_B^T y_1' = -2 - (-4 \quad 1)\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix} = -25$$

La solución ya no es óptima. Se aplica el algoritmo simplex:

Entra la variable x_1 en la base

Como la columna y_1' es completamente negativa ⟹ el problema tiene solución no acotada

Adición de una nueva variable

- Introducción de una variable x_{n+1} con columna a_{n+1} y coste c_{n+1}

- Calcular $y_{n+1} = B^{-1} a_{n+1}, \quad \hat{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B^T y_{n+1}$
  - ✓ Si $\hat{c}_{n+1} \geq 0$ ⇒ la solución actual sigue siendo óptima
  - ✓ Si $\hat{c}_{n+1} < 0$ ⇒ solución no óptima. Aplicar simplex

Adición de una nueva restricción

- Agregación de la nueva restricción $\sum_{j=1}^{n} a_{m+1\ j} x_j \leq b_{m+1}$

- Si la solución óptima del problema original satisface la restricción ➡ sigue siendo óptima

- Si no, añadir una variable de holgura x_{n+1}

$$\sum_{j=1}^{n} a_{m+1\ j} x_j + x_{n+1} = b_{m+1}$$

  - ✓ Añadir a la tabla la fila correspondiente a la nueva restricción con variable básica x_{n+1}
  - ✓ Añadir a la tabla la columna correspondiente a x_{n+1}
  - ✓ Modificar la nueva fila para hacer 0 en las posiciones correspondientes a las variables básicas originales
  - ✓ Aplicar el algoritmo dual simplex

Adición de una nueva restricción. Ejemplo (1)

✓ Se añade al problema la restricción $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$

Se desglosa la igualdad en dos desigualdades que se deben verificar

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5$$

La solución básica actual $x^* = (0\ 8\ 9)$ verifica la 2ª desigualdad, pero no la 1ª: se añade una variable de holgura

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 5$$

Se introducen en la tabla la fila correspondiente y la columna de x_6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-z	14	0	0	13	3	0	28
x_3	5	0	1	4	1	0	9
x_2	4	1	0	3	1	0	8
x_6	4	-1	2	0	0	1	5

Adición de una nueva restricción. Ejemplo (2)

Para adaptar la tabla se realiza la operación

$$f_6 \rightarrow f_6 + f_2 - 2f_3$$

Tras la operación, se aplica el algoritmo dual simplex

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-z	14	0	0	13	3	0	28
x_3	5	0	1	4	1	0	9
x_2	4	1	0	3	1	0	8
x_6	-2	0	0	-5	-1	1	-5
	7			13/5	3		

Adición de una nueva restricción. Ejemplo (3)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
-z	44/5	0	0	0	2/5	13/5	15
x_3	17/5	0	1	0	1/5	4/5	5
x_2	14/5	1	0	0	2/5	3/5	5
x_4	2/5	0	0	1	1/5	-1/5	1

Solución óptima:

$$\boxed{x_1{}^* = 0, \quad x_2{}^* = 5, \quad x_3{}^* = 5, \quad z^* = -15}$$

Cambio en una columna básica

- Sustitución de a_k por a_k' siendo x_k básica

- Considerar x_k' como una nueva variable con el mismo coste que x_k. Calcular $y_k' = B^{-1}a_k', \quad \hat{c}_k' = c_k - c_B^T y_k'$
  - ✓ Si $y_{kk}' \neq 0$ ➡ colocar los nuevos datos en la columna de la tabla correspondiente a x_k. Pivotar sobre el elemento y_{kk}'.
    - Si se ha perdido sólo optimalidad, aplicar simplex
    - Si se ha perdido factibilidad aplicar dual simplex
  - ✓ Si $y_{kk}' = 0$ ➡ la variable x_k se considera artificial con coste M
    - Añadir a la tabla la columna de x_k' con los coeficientes obtenidos
    - En la columna x_k poner M como nuevo coste reducido
    - Pivotar sobre el elemento y_{kk} para conseguir $c_k - z_k = 0$
    - Aplicar el método de las penalizaciones

Cambio en una columna básica. Ejemplo (1)

✓ Se reemplaza $a_2 = (-1\ 4)^T$ por $a_2 = (-1\ 5)^T$

Sea la variable x_2' con columna $a_2 = (-1\ 5)^T$ y coste $c_2' = c_2 = 1$

$$y_2' = B^{-1}a_2' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_2' = c_2 - c_B^T y_2' = 1 - (-4 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$$

Como $y_{22}' = 2 \neq 0$ sustituimos la columna y_2 por y_2'

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
-z	14	3	0	13	3	28
x_3	5	1	1	4	1	9
x_2	4	2	0	3	1	8

Se pivota sobre y_{22}' para recuperar la tabla del simplex

Cambio en una columna básica. Ejemplo (2)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
-z	8	0	0	17/2	3/2	16
x_3	3	0	1	5/2	1/2	5
x_2	2	1	0	3/2	1/2	4

No se ha perdido optimalidad ni factibilidad ➡ Tabla óptima

Solución óptima:

$$\boxed{x_1{}^* = 0, \quad x_2{}^* = 4, \quad x_3{}^* = 5, \quad z^* = -16}$$

Cambio en una columna básica. Ejemplo (3)

✓ Se reemplaza $a_2 = (-1\ 4)^T$ por $a_2 = (1\ -3)^T$

Sea la variable x_2' con columna $a_2 = (1\ -3)^T$ y coste $c_2' = c_2 = 1$

$$y_2' = B^{-1}a_2' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_2' = c_2 - c_B^T y_2' = 1 - (-4 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$$

Como $y_{22}' = 0$ consideramos la variable x_2 como variable artificial para preservar la base. Le asignamos un coste arbitrariamente grande M

	x_1	x_2	x_2'	x_3	x_4	x_5	RHS
-z	14	M	5	0	13	3	28
x_3	5	0	1	1	4	1	9
x_2	4	1	0	0	3	1	8

Se pivota sobre y_{22} para recuperar la tabla del simplex

Cambio en una columna básica. Ejemplo (4)

Tras el pivoteo se aplica el método de las penalizaciones del simplex

	x_1	x_2	x_2'	x_3	x_4	x_5	RHS	
-z	14-4M	0	5	0	13-3M	3-M	28-8M	
x_3	5	0	1	1	4	1	9	9
x_2	4	1	0	0	3	1	8	8

En vez de meter en la base x_1 (menor coste reducido), metemos x_5 que garantiza que salga de la base la variable artificial

	x_1	x_2	x_2'	x_3	x_4	x_5	RHS
-z	2	M-3	5	0	4	0	4
x_3	1	-1	1	1	1	0	1
x_5	4	1	0	0	3	1	8

Solución óptima: $\boxed{x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 1, \quad z^* = -4}$

Programación paramétrica

- Estudia los efectos sobre la solución óptima de un cambio continuo en alguno de los elementos del problema
  - ✓ Perturbación en el vector de costes
  - ✓ Perturbación en el vector de cotas (lado derecho)
- El parámetro $\theta \geq 0$ representa el grado de perturbación del vector en una dirección d

Perturbación en el vector de costes

- Se quiere resolver un problema de PL con vector de costes $c + \theta d$, siendo $\theta \geq 0$

1. Hacer $\theta_0 = 0$ y $k = 0$
   Obtener la solución óptima del problema con $\theta = \theta_0$
2. Mediante análisis de sensibilidad, determinar el intervalo $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ para el que la tabla sigue siendo óptima
3. Si $\theta_{k+1} = \infty$ parar

   Si no, hacer $\theta = \theta_{k+1}$ y aplicar simplex, metiendo en la base una variable no básica con coste reducido 0

   Si su columna es negativa ⟹ Solución no acotada para $\theta > \theta_{k+1}$

   Si no, Hacer $k = k+1$ y volver al paso 2

Perturbación en el vector de costes. Ejemplo (1)

Se quiere resolver el problema

$$\begin{aligned} &\min(-1+\theta)x_1 + (-3+\theta)x_2 \\ &\quad x_1 + x_2 \leq 3 \\ &-x_1 + x_2 \leq 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El vector de costes es $(-1\ -3)^T + (1\ 1)^T\theta$

Paso 1. Obtener la solución óptima del problema con $\theta = 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	0	0	2	1	7
x_1	1	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	1	1/2	1/2	2

Solución óptima: $\boxed{x_1^* = 1, \quad x_2^* = 2, \quad z^* = -7}$

Perturbación en el vector de costes. Ejemplo (2)

Paso 2. Reemplazar el vector de costes $c = (-1\ -3)^T$ por $c' = (-1+\theta\ \ -3+\theta)^T$

		$-1+\theta$	$-3+\theta$	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-z	0	0	$2-\theta$	1	$7-3\theta$
$-1+\theta$	x_1	1	0	1/2	-1/2	1
$-3+\theta$	x_2	0	1	1/2	1/2	2

La tabla sigue siendo óptima si $2 - \theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq 2$

Para $\theta \in [0,2]$ la solución óptima es $\boxed{x_1{}^* = 1, \quad x_2{}^* = 2, \quad z^* = -7 + 3\theta}$

Paso 3. Hacer $\theta = 2$. Meter en la base x_3 por tener coste reducido 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
-z	0	0	0	1	1	
x_1	1	0	1/2	-1/2	1	2
x_2	0	1	1/2	1/2	2	4

Perturbación en el vector de costes. Ejemplo (3)

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	0	0	0	1	1
x_3	2	0	1	-1	2
x_2	-1	1	0	1	1

Tabla óptima

Paso 2. Reemplazar el vector de costes $c = (1\ \ -1)^T$ por $c' = (-1+\theta\ \ -3+\theta)^T$

		-1+θ	-3+θ	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	-z	-4+2θ	0	0	3-θ	3-θ
0	x_3	2	0	1	-1	2
-3+θ	x_2	-1	1	0	1	1

La tabla sigue siendo óptima si $-4 + 2\theta \geq 0$ y $3 - \theta \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \theta \leq 3$

Para $\theta \in [2,3]$ la solución óptima es $\boxed{x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1, \quad z^* = -3 + \theta}$

Perturbación en el vector de costes. Ejemplo (4)

Paso 3. Hacer $\theta = 3$. Meter en la base x_4 por tener coste reducido 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
-z	2	0	0	0	0	
x_3	2	0	1	-1	2	
x_2	-1	1	0	1	1	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	2	0	0	0	0
x_3	1	1	1	0	3
x_4	-1	1	0	1	1

Tabla óptima

Perturbación en el vector de costes. Ejemplo (5)

Paso 2. Reemplazar el vector de costes $c = (2\ 0)^T$ por $c' = (-1+\theta\ \ -3+\theta)^T$

		$-1+\theta$	$-3+\theta$	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	$-z$	$-1+\theta$	$-3+\theta$	0	0	0
0	x_3	1	1	1	0	3
0	x_4	-1	1	0	1	1

La tabla sigue siendo óptima si $-1 + \theta \geq 0$ y $-3 + \theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \geq 3$

Para $\theta \in [3,\infty)$ la solución óptima es $\boxed{x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad z^* = 0}$

Perturbación en el vector de cotas

- Se quiere resolver un problema de PL con vector de cotas $b + \theta d$, siendo $\theta \geq 0$

1. Hacer $\theta_0 = 0$ y $k = 0$
   Obtener la solución óptima del problema con $\theta = \theta_0$
2. Mediante análisis de sensibilidad, determinar el intervalo $[\theta_k, \theta_{k+1}]$ para el que la tabla sigue siendo factible
3. Si $\theta_{k+1} = \infty$ parar
   Si no, hacer $\theta = \theta_{k+1}$ y aplicar dual simplex, sacando de la base una variable básica con valor 0
   Si su fila es positiva ⟹ Problema infactible para $\theta > \theta_{k+1}$
   Si no, Hacer $k = k+1$ y volver al paso 2

Perturbación en el vector de cotas. Ejemplo (1)

Se quiere resolver el problema

$$\boxed{\begin{aligned} &\min -x_1 - 3x_2 \\ &\quad x_1 + x_2 \le 3 - \theta \\ &-x_1 + x_2 \le 1 + \theta \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}}$$

El vector del lado derecho es $(3\ 1)^T + (-1\ 1)^T\theta$

Paso 1. Obtener la solución óptima del problema con $\theta = 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	0	0	2	1	7
x_1	1	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	1	1/2	1/2	2

Solución óptima: $\boxed{x_1^* = 1, \quad x_2^* = 2, \quad z^* = -7}$

Perturbación en el vector de cotas. Ejemplo (2)

Paso 2. Reemplazar el vector de cotas b = $(3\ 1)^T$ por b' = $(3-\theta\ \ 1+\theta)^T$

$$\hat{b}' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-\theta \\ 1+\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\theta \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad -\hat{z}' = -c_B^T\hat{b}' = -\begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\theta \\ 2 \end{pmatrix} = 7-\theta$$

La tabla sigue siendo factible si $1 - \theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq 1$

Para $\theta \in [0,1]$ la solución óptima es $\boxed{x_1^* = 1-\theta, \quad x_2^* = 2, \quad z^* = -7+\theta}$

Paso 3. Hacer $\theta = 1$. Sacar de la base x_1 por tener valor 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	0	0	2	1	6
x_1	1	0	1/2	-1/2	0
x_2	0	1	1/2	1/2	2

Perturbación en el vector de cotas. Ejemplo (3)

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	2	0	3	0	6
x_4	-2	0	-1	1	0
x_2	1	1	1	0	2

Paso 2. Reemplazar el vector de cotas b = $(2\ 2)^T$ por b' = $(3\text{-}\theta\ \ 1\text{+}\theta)^T$

$$\hat{b}' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-\theta \\ 1+\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2\theta \\ 3-\theta \end{pmatrix}$$

$$-\hat{z}' = -c_B^T\hat{b}' = -\begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2+2\theta \\ 3-\theta \end{pmatrix} = 9-3\theta$$

La tabla sigue siendo factible si $-2 + 2\theta \geq 0$ y $3 - \theta \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \theta \leq 3$

Para $\theta \in [1,3]$ la solución óptima es $\boxed{x_1^* = 0, \quad x_2^* = 3-\theta, \quad z^* = -9+3\theta}$

Perturbación en el vector de cotas. Ejemplo (4)

Paso 3. Hacer $\theta = 3$. Sacar de la base x_2 por tener valor 0

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	2	0	3	0	6
x_4	-2	0	-1	1	4
x_2	1	1	1	0	0

Como la fila 2 es completamente positiva ⇒ no se puede pivotar

Para $\theta \in (3, \infty)$ el problema es infactible