UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Optimización lineal

José María Ferrer Caja
Universidad Pontificia Comillas

Introducción

- Herramienta más importante de la optimización y de la investigación operativa
- Multitud de aplicaciones en campos diversos
  - ✓ Economía y finanzas
  - ✓ Sector energético
  - ✓ Producción industrial
  - ✓ Logística
  - ✓ Marketing
- Existencia de métodos potentes de resolución
- Base para resolver problemas más complejos
  - ✓ Programación entera
  - ✓ Programación estocástica
  - ✓ Programación multiobjetivo

Forma estándar

$$
\begin{aligned}
&\min \; z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
&\text{s.a} \\
&a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
&\vdots \\
&a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \\
&x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

- Matricialmente

$$
\begin{aligned}
&\min_x c^T x \\
&Ax = b \\
&x \geq 0 \\
&x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}
$$

- Notación

$a_j \in \mathbb{R}^m$ Columna j-ésima de la matriz A

Conversión a forma estándar

- Maximización a minimización
  - ✓ max z = – min –z
- Desigualdad a igualdad
  - ✓ De $\leq$ a $=$: Se añade una variable de holgura $u_i \geq 0$

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij} x_j + u_i = b_i$$

  - ✓ De $\geq$ a $=$: Se añade una variable de exceso $v_i \geq 0$

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \rightarrow \sum_j a_{ij} x_j - v_i = b_i$$

- Variables negativas a positivas

$$x_j \leq 0 \Rightarrow y_j = -x_j; \;\; y_j \geq 0$$

- Variables no restringidas en signo a positivas

$$x_j \in \mathbb{R} \Rightarrow x_j = x_j^+ - x_j^-; \;\; x_j^+, x_j^- \geq 0$$

Formas canónicas

$$\min \; z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$
s.a
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

$$\max \; z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$
s.a
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

- Matricialmente

$$\min_x c^T x$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

$$\max_x c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Propiedades

- Proporcionalidad
  - ✓ La contribución de cada actividad al valor de la función objetivo y a la parte izquierda de cada restricción es proporcional al nivel de la actividad
- Aditividad
  - ✓ La función objetivo y la parte izquierda de cada restricción son las sumas de las contribuciones individuales de las actividades
- Divisibilidad, continuidad
  - ✓ Cualquier variable puede tomar cualquier valor real (también fraccionario)
- Determinismo
  - ✓ Los coeficientes son conocidos con certidumbre, o han sido estimados

Resolución gráfica

- Puede aplicarse cuando se tienen dos variables
- No es necesario pasar a forma estándar ni canónica

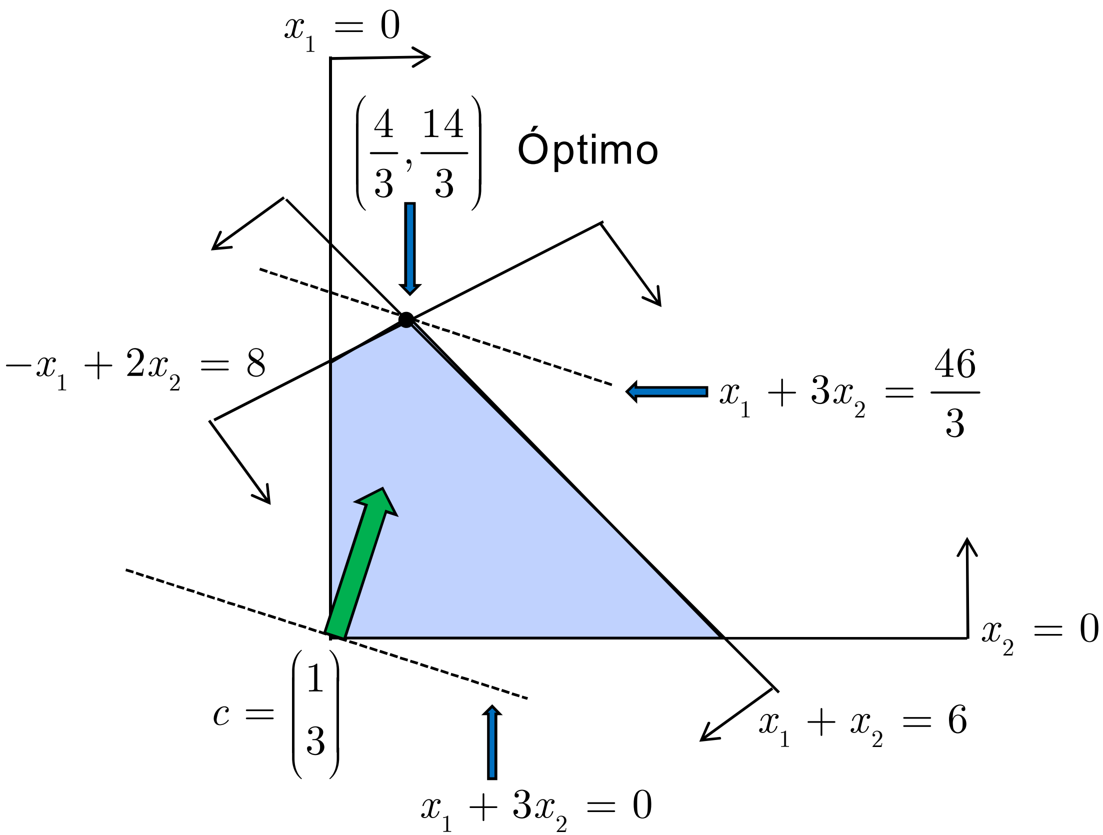
  - ✓ Dibujar el conjunto factible en el plano, por medio de las ecuaciones de las rectas que lo delimitan
  - ✓ Tomar el vector gradiente de la función objetivo

$$\nabla z = c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

  - ✓ Problema de maximización: Buscar el último punto del conjunto factible en la dirección del vector gradiente
  - ✓ Problema de minimización: Buscar el último punto del conjunto factible en la dirección contraria al vector gradiente
  - ✓ Las rectas de isobeneficio (perpendiculares al gradiente) pueden ayudar a encontrar el óptimo

Resolución gráfica. Ejemplo 1

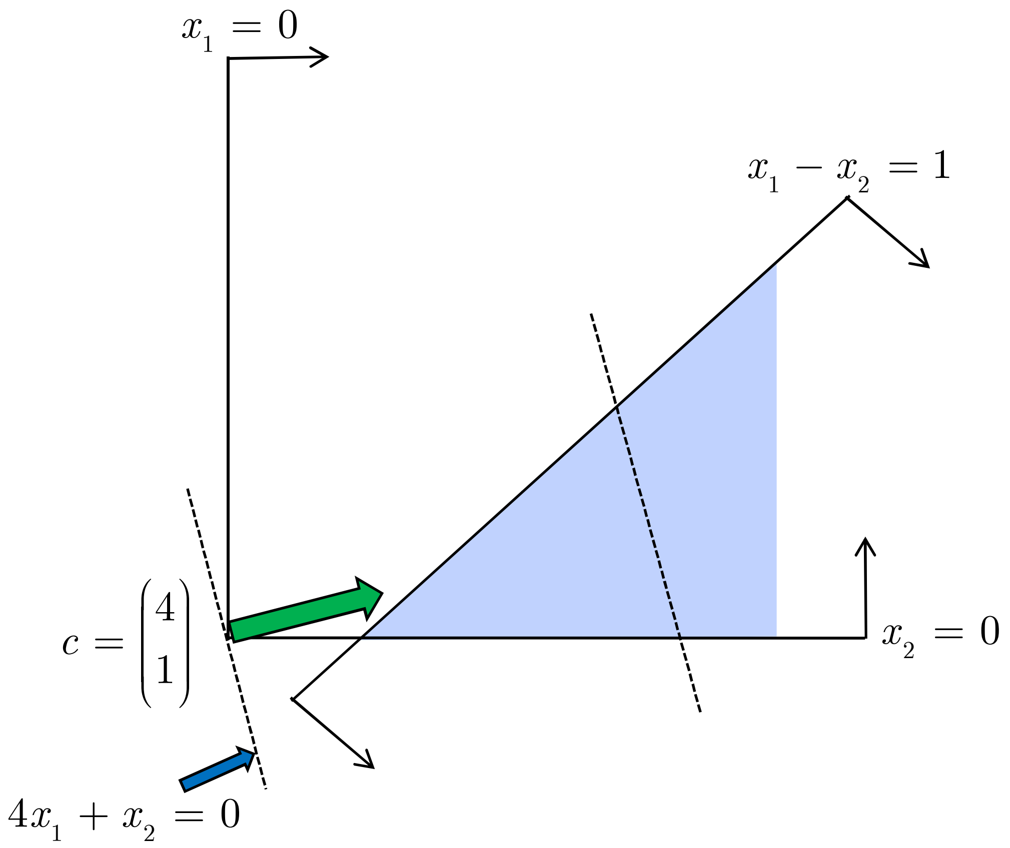
$$\max x_1 + 3x_2$$
s.a
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



- ✓ La solución óptima es $x_1^* = 4/3$, $x_2^* = 14/3$
- ✓ La función objetivo vale $z^* = 46/3$

Resolución gráfica. Ejemplo 2

$$\max 4x_1 + x_2$$
s.a
$$x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

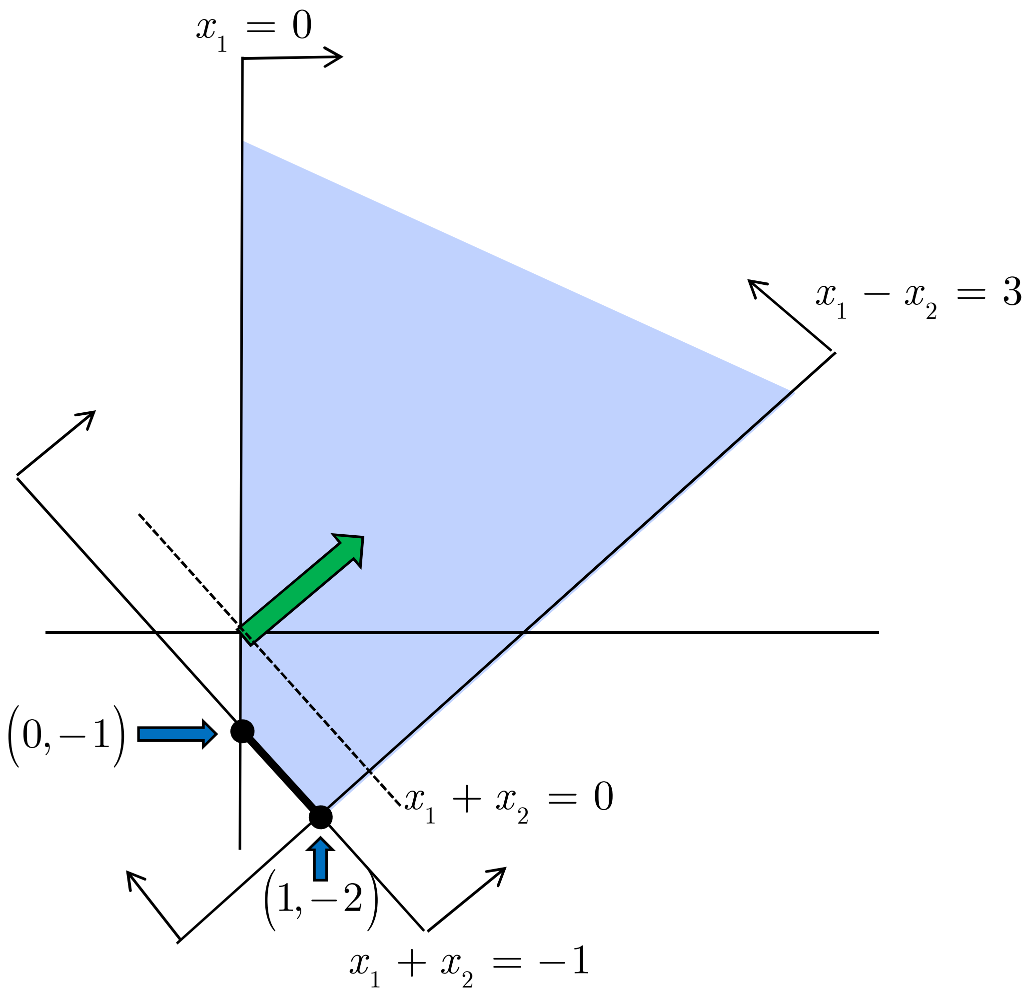


- ✓ La solución óptima es no acotada: z*→ ∞

Resolución gráfica. Ejemplo 3

$$\min x_1 + x_2$$
s.a
$$x_1 + x_2 \geq -1$$
$$x_1 - x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0$$

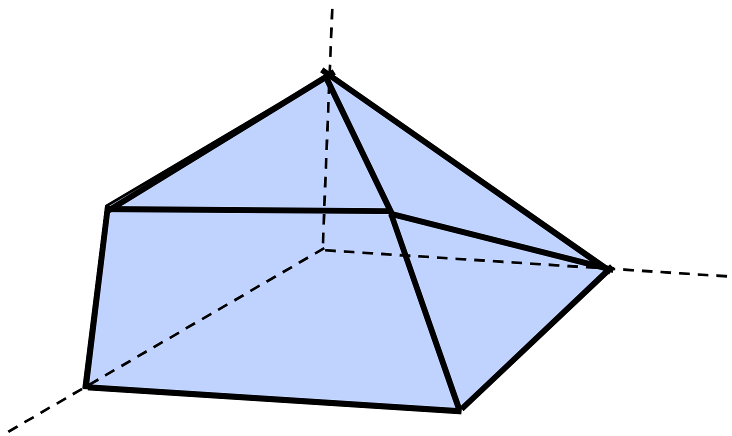
$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



✓ Solución óptima: segmento que une los puntos (0,-1) y (1,-2), z*=-1

Conjuntos poliédricos

- Hiperplano $$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$$
- Semiespacio $$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$$
  - ✓ Cada hiperplano divide al espacio en dos semiespacios
- Conjunto poliédrico o poliedro: Intersección de un número finito de semiespacios
  - ✓ El conjunto factible de un problema de PL es poliédrico
- Politopo: Conjunto poliédrico acotado y no vacío

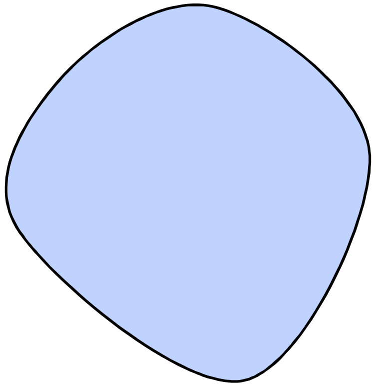


Conjuntos convexos

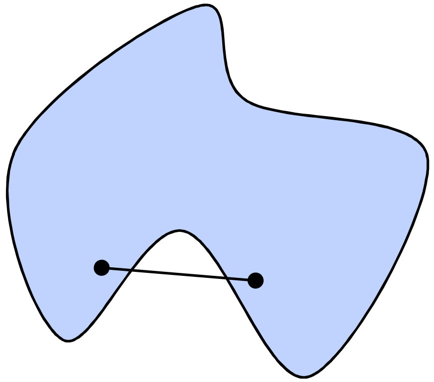
- Un subconjunto *X* de $\mathbb{R}^n$ es convexo si

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in X$$

  - ✓ Cada segmento que une cualquier par de puntos de *X* está contenido en el conjunto *X.*



convexo



no convexo

  - ✓ Todo conjunto poliédrico es convexo
  - ✓ El conjunto factible de un problema de PL es convexo

Combinaciones y envolturas convexas

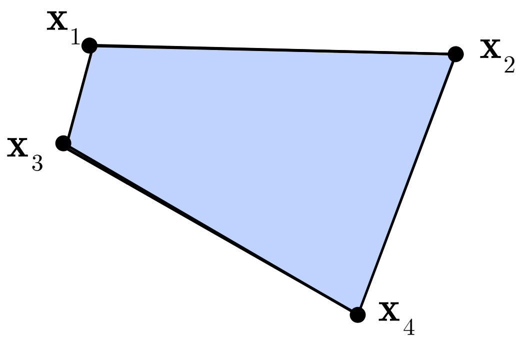
- Una combinación lineal convexa de un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es un punto que se puede expresar de la forma

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i \quad \text{siendo} \quad \lambda_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

- Se llama envoltura convexa de un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ al conjunto de todas las combinaciones lineales convexas del conjunto
  - ✓ La envoltura convexa de un conjunto de 2 puntos es un segmento
  - ✓ La envoltura convexa de un conjunto de puntos es un politopo

Vértices y aristas

- Un vértice o punto extremo de un poliedro es un punto del poliedro que no puede expresarse como combinación lineal convexa de dos puntos distintos del poliedro



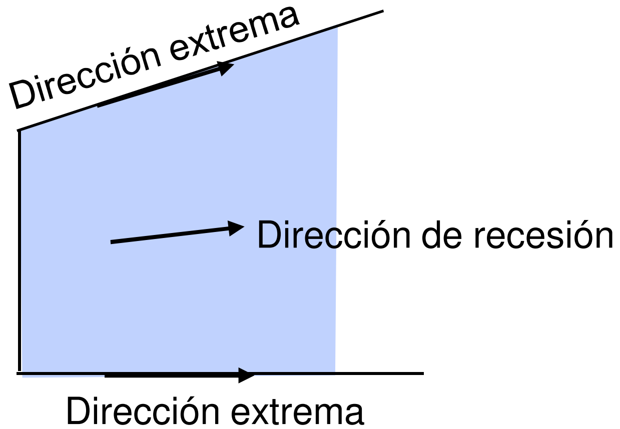
4 vértices: x_1, x_2, x_3, x_4

  - ✓ Un vértice de un poliedro en $\mathbb{R}^n$ es la intersección de n de los hiperplanos que definen el poliedro
  - ✓ Un politopo es la envoltura convexa de sus vértices

- Una arista es el subconjunto del conjunto factible obtenido intersecando n-1 hiperplanos.

Direcciones de recesión y direcciones extremas

- Una dirección de recesión de un poliedro es un vector d, tal que $\mathbf{x} + \mathbf{d} \in X \quad \forall \mathbf{x} \in X$
  - ✓ Un politopo no tiene direcciones de recesión
- Una dirección extrema de un poliedro es una dirección de recesión que no puede expresarse como combinación lineal positiva de dos direcciones de recesión distintas



  - ✓ Toda dirección de recesión de un poliedro es combinación lineal positiva de sus direcciones extremas

Teorema de representación de un poliedro

- Todo punto del poliedro se puede representar como una combinación lineal convexa de sus puntos extremos más una combinación lineal positiva de sus direcciones extremas

- Sean $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ los puntos extremos del poliedro
- Sean $\{d_1, d_2, \ldots, d_l\}$ las direcciones extremas del poliedro
- Sea $\mathbf{x} \in X$

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{l} \eta_j \mathbf{d}_j$$

$$\lambda_i \geq 0 \ \forall i, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\mu_j \geq 0 \ \forall j$$

Tipos de soluciones de un problema de PL

Sea el problema
$$\boxed{\begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}}$$

- Solución: Punto que verifica las restricciones $Ax = b$
- Solución factible: Solución que además cumple $x \geq 0$
- Conjunto factible: Conjunto de soluciones factibles
$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0 \right\}$$
- Solución básica factible: Solución factible que se corresponde con un punto extremo del conjunto factible
- Solución óptima: Solución factible donde se alcanza el mínimo de la función objetivo

Tipos de problemas de PL

- Infactible: El conjunto factible es vacío
  - ✓ Si existe alguna solución factible, entonces existe alguna solución básica factible
- Con solución óptima: Existe alguna solución óptima para el problema
  - ✓ Si existe alguna solución óptima, entonces existe alguna solución básica factible óptima (Teorema fundamental de la PL)
  - ✓ Si la solución óptima es única, esta es básica factible
  - ✓ Si hay múltiples soluciones óptimas y el conjunto factible es acotado, el conjunto de soluciones óptimas es la envoltura convexa de las soluciones básicas factibles óptimas
- No acotado: Se puede avanzar siguiendo una dirección de recesión disminuyendo indefinidamente la función objetivo

Idea general del método simplex

- Buscar una solución básica factible (vértice) inicial
- Compararlo con los vértices adyacentes y quedarnos con el que más disminuya la función objetivo
- Repetir hasta que no se pueda disminuir más la función objetivo

- Dificultades a salvar
  - ✓ Cómo se caracterizan analíticamente las soluciones básicas factibles
  - ✓ Cómo encontrar una solución básica factible inicial
  - ✓ Cuáles son los vértices adyacentes, y cómo saber cuánto disminuye cada uno la función objetivo
  - ✓ Cómo detectar infactibilidad y no acotamiento

Hipótesis para el método simplex

- El problema está expresado en forma estándar

$$\boxed{\begin{array}{l} \min_x c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \end{array}}$$

- La matriz de coeficientes tiene rango máximo por filas: rg(A) = m ≤ n
  - ✓ Si no es cierto, o bien pueden eliminarse algunas restricciones por ser redundantes, o bien el problema es infactible
- Los términos independientes son no negativos: b ≥ 0
  - ✓ Esta hipótesis no es obligatoria, pero sí conveniente para iniciar el método de forma sencilla

Soluciones básicas: Caracterización

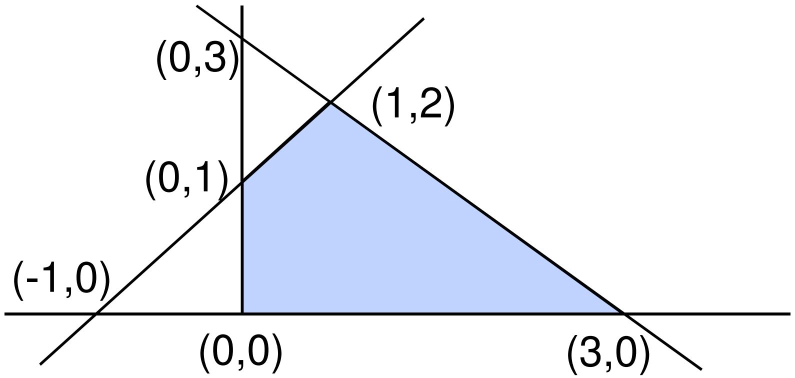
- Partir el conjunto de variables en m básicas y n – m no básicas
- Igualar a 0 las variables no básicas y despejar las variables básicas en Ax = b
  - ✓ Si todas las variables son no negativas la solución básica es factible
  - ✓ Si alguna variable es negativa la solución básica es infactible
- El número de soluciones básicas (entre factibles y infactibles) es

$$\boxed{C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

  - ✓ No todas las soluciones básicas son siempre distintas: Si alguna variable básica vale 0 en una solución básica (solución básica degenerada), ésta se puede obtener mediante otra selección de variables básicas y no básicas

Soluciones básicas: Ejemplo

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 3 \\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



- En forma estándar

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - 3x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

- Soluciones básicas:

x_1, x_2	x_1, x_3	x_1, x_4	x_2, x_3	x_2, x_4	x_3, x_4
(1,2,0,0)	(-1,0,4,0)	(3,0,0,4)	(0,1,2,0)	(0,3,0,-2)	(0,0,3,1)
Factible	Infactible	Factible	Factible	Infactible	Factible

Bases

- Una base es una submatriz B de orden m de la matriz A
- Hay una correspondencia biunívoca entre particiones (en variables básicas y no básicas) y bases
- Dada una base, los elementos del problema se pueden descomponer:

$$A = \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \quad \begin{cases} B \in \mathbb{R}^{mxm} & \text{matriz BÁSICA o BASE} \\ N \in \mathbb{R}^{mxn-m} & \text{matriz NO BÁSICA} \end{cases}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_B \in \mathbb{R}^{m} & \text{vector de variables BÁSICAS} \\ x_N \in \mathbb{R}^{n-m} & \text{vector de variables NO BÁSICAS} \end{cases}$$

$$c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} \quad \begin{cases} c_B \in \mathbb{R}^{m} & \text{coeficientes de variables BÁSICAS} \\ c_N \in \mathbb{R}^{n-m} & \text{coeficientes de variables NO BÁSICAS} \end{cases}$$

- ✓ Conjunto de índices básicos $\rightarrow I_B$
- ✓ Conjunto de índices no básicos $\rightarrow I_N$

Reformulación del problema

- Despejar variables básicas

$$Ax = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b \quad \Rightarrow \quad x_B = B^{-1}\left(b - N\,x_N\right) = B^{-1}\,b - B^{-1}\,N\,x_N$$

- Función objetivo

$$z = c_B^T\,x_B + c_N^T\,x_N = c_B^T\,B^{-1}\,b + \left[c_N^T - c_B^T\,B^{-1}N\right]\,x_N$$

- Si se fijan a 0 las variables no básicas se obtiene la solución básica asociada a la base B

$$\hat{x}_B = \hat{b} = B^{-1}\,b$$ Valor de las variables básicas en la solución básica

$$\hat{x}_N = 0$$ Valor de las variables no básicas en la solución básica

$$\hat{z} = c_B^T\,x_B = c_B^T\,B^{-1}\,b$$ Valor de la función objetivo en la solución básica

Adyacencia

- Dos vértices son adyacentes si el segmento que los une es una arista del poliedro
- Cada vértice adyacente corresponde a una variable no básica
  - ✓ Para cada solución básica factible existen n - m soluciones básicas factibles adyacentes
- Moverse de una solución básica factible a otra adyacente corresponde a hacer básica una variable no básica (y por lo tanto una básica pasará a ser no básica)
  - ✓ Una vez elegida la variable no básica que pasa a ser básica, ésta se ha de incrementar hasta que alguna de las básicas valga 0
  - ✓ Interesará elegir la variable no básica cuyo incremento suponga una mayor disminución en la función objetivo

Costes reducidos

- Cada variable no básica tiene su coste reducido o derivada direccional

$$\hat{c}_j = c_j - z_j = c_j - c_B{}^T B^{-1} a_j$$

  - ✓ Matricialmente

$$\hat{c}_N{}^T = c_N{}^T - c_B{}^T B^{-1} N$$

- Mide en cuanto aumenta la f. o. por cada unidad que aumente marginalmente la variable

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \hat{z} + \left[c_N^T - c_B^T B^{-1} N \right] x_N = \hat{z} + \sum_{j \in I_N} \left(c_j - c_B{}^T B^{-1} a_j \right) x_j$$

$$= \hat{z} + \sum_{j \in I_N} \left(c_j - z_j \right) x_j = \hat{z} + \sum_{j \in I_N} \hat{c}_j x_j$$

- Criterio de entrada
  - ✓ Seleccionar la variable no básica con coste reducido más negativo

Costes reducidos y optimalidad

- El coste reducido de cada variable básica es 0
- Si todos los costes reducidos son no negativos la solución básica factible es óptima
- Si en una solución básica factible óptima una variable no básica tiene coste reducido nulo, la solución básica factible adyacente asociada a dicha variable es también óptima
  - ✓ En este caso puede haber óptimos múltiples

Elección de la variable de salida

- Sea x_t la variable de entrada a la base
  - ✓ Debe incrementarse el valor de x_t con lo que las variables básicas ven modificado su valor
  - ✓ Debe incrementarse x_t hasta que alguna variable básica decrezca a 0. Esta variable pasará a ser no básica
  - ✓ Si todas las variables básicas crecen la solución óptima es no acotada, pues podría incrementarse x_t indefinidamente

$$Y = B^{-1}N \qquad x_B = B^{-1}b - B^{-1}N\,x_N = \hat{b} - Yx_N$$

$$y_t = B^{-1}a_t \qquad (x_B)_i = \hat{b}_i - y_{it}x_t$$

  - ✓ La variable básica i decrece si $y_{it} > 0$

$$(x_B)_i = 0 \Rightarrow x_t = \hat{b}_i / y_{it}$$

Valor de la variable entrante
si se hace 0 la variable básica i

- Criterio de salida
  - ✓ Elegir la variable básica i con $y_{it} > 0$ para la que $\dfrac{\hat{b}_i}{y_{it}}$ sea mínimo

Algoritmo simplex

1. Inicialización

- ✓ Elegir una base B que proporcione una solución básica factible

$$\hat{x}_B = \hat{b} = B^{-1}b \geq 0 \qquad Y = B^{-1}N$$

$$\hat{x}_N = 0 \qquad \hat{z} = c_B^T B^{-1} b = c_B^T \hat{x}_B = c_B^T \hat{b}$$

2. Criterio de optimalidad. Elección de la variable de entrada

- ✓ Cálculo de costes reducidos $\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T Y$
- ✓ Si $\hat{c}_N^T \geq 0$ ⟹ La solución actual es óptima
- ✓ Si no, elegir la variable x_t tal que $\hat{c}_t = \min_j \left\{ \hat{c}_j : \hat{c}_j < 0 \right\}$

3. Elección de la variable de salida

- ✓ Si $y_{it} \leq 0 \ \forall i \in I_B$ ⟹ solución no acotada
- ✓ Si no, elegir la variable básica x_s tal que $\dfrac{\hat{b}_s}{y_{st}} = \min_{i \in I_B} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i}{y_{it}} : y_{it} > 0 \right\}$

4. Pivoteo

- ✓ Con la nueva base B actualizar $B^{-1}, \hat{x}_B, Y, \hat{z}$
- ✓ Volver al paso 2

Interpretación geométrica del simplex

Operación algebraica	Interpretación geométrica
Solución básica factible inicial	Vértice inicial
Selección de la variable no básica	Selección de arista
Incremento de la variable entrante	Movimiento a lo largo de la arista
La variable básica saliente se hace cero	Se alcanza un vértice adyacente
Nueva solución básica factible	Nuevo vértice

Comentarios al método simplex

- Criterio de entrada
  - ✓ En caso de empate, elegir cualquiera (menor índice, al azar, …)
  - ✓ Seleccionar la variable con menor coste reducido no garantiza la mayor disminución de la función objetivo tras el pivoteo
  - ✓ Existen otras reglas de entrada
- Criterio de salida
  - ✓ En caso de empate, elegir cualquiera (menor índice, regla lexicográfica,…). Un empate produce degeneración
- Problema de maximización: 2 opciones

  Pasar a minimización cambiando el signo de los costes

  Cambiar el criterio de optimalidad y la regla de entrada:
  - ✓ Si $\hat{c}_N^T \leq 0$ $\Rightarrow$ La solución actual es óptima
  - ✓ Si no, elegir la variable x_t tal que $\hat{c}_t = \max_j \left\{ \hat{c}_j : \hat{c}_j > 0 \right\}$

Algoritmo simplex. Ejemplo (1)

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \le 3 \\ -&x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Se pasa a forma estándar ➡

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - 3x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -&x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Los elementos del problema son

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad m = 2; \quad n = 4$$

✓ Se cumple $rg(A) = m$

Algoritmo simplex. Ejemplo (2)

PASO 1: Se elige una base

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \quad N=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}; \quad x_B=\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}; \quad x_N=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}; \quad c_B=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}; \quad c_N=\begin{pmatrix}-1\\ -3\end{pmatrix}$$

Se comprueba que proporciona una solución básica factible

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \quad \hat{x}_B=\hat{b}=B^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\geq 0$$

Factible

Se obtienen los valores de las variables, de la f. o. y la matriz Y

$$\hat{x}_B=\hat{b}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}; \quad \hat{x}_N=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}; \quad \hat{z}=c_B^T\hat{b}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=0$$

$$Y=B^{-1}N=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Algoritmo simplex. Ejemplo (3)

PASO 2: Se calculan los costes reducidos

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T Y = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_1 = c_1 - z_1 = -1$$

$$\hat{c}_2 = c_2 - z_2 = -3$$

Como hay costes reducidos negativos $\Longrightarrow$ Solución no óptima

Entra en la base la variable x_2, por tener menor coste reducido

PASO 3: Criterio de salida

$$y_2 = B^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longleftarrow$ Ambos valores positivos

$$\min_{i \in I_B} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{y_{i2}} : y_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_3}{y_{32}}, \frac{\hat{b}_4}{y_{42}} \right\} \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1$$

Sale de la base la variable x_4

Algoritmo simplex. Ejemplo (4)

PASO 4: Pivoteo

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad N=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix};\quad x_B=\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\end{pmatrix};\quad x_N=\begin{pmatrix}x_1\\ x_4\end{pmatrix};\quad c_B=\begin{pmatrix}0\\ -3\end{pmatrix};\quad c_N=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad \hat{x}_B=\hat{b}=B^{-1}b=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix};\quad \hat{x}_N=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{z}=c_B^T\hat{b}=\begin{pmatrix}0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}=-3$$

$$Y=B^{-1}N=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Volver al paso 2

Algoritmo simplex. Ejemplo (5)

PASO 2: Se calculan los costes reducidos

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_1 = c_1 - z_1 = -4$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - z_4 = 3$$

Como hay costes reducidos negativos $\Rightarrow$ Solución no óptima

Entra en la base la variable x_1, por tener menor coste reducido

PASO 3: Criterio de salida

$$y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sale de la base la variable x_3, única variable básica con coeficiente positivo en la columna y_1: $y_{31} = 2 > 0$

Algoritmo simplex. Ejemplo (6)

PASO 4: Pivoteo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}; \quad c_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad c_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}; \quad \hat{x}_B = \hat{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \hat{x}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = c_B^T \hat{b} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -7$$

$$Y = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Volver al paso 2

Algoritmo simplex. Ejemplo (7)

PASO 2: Se calculan los costes reducidos

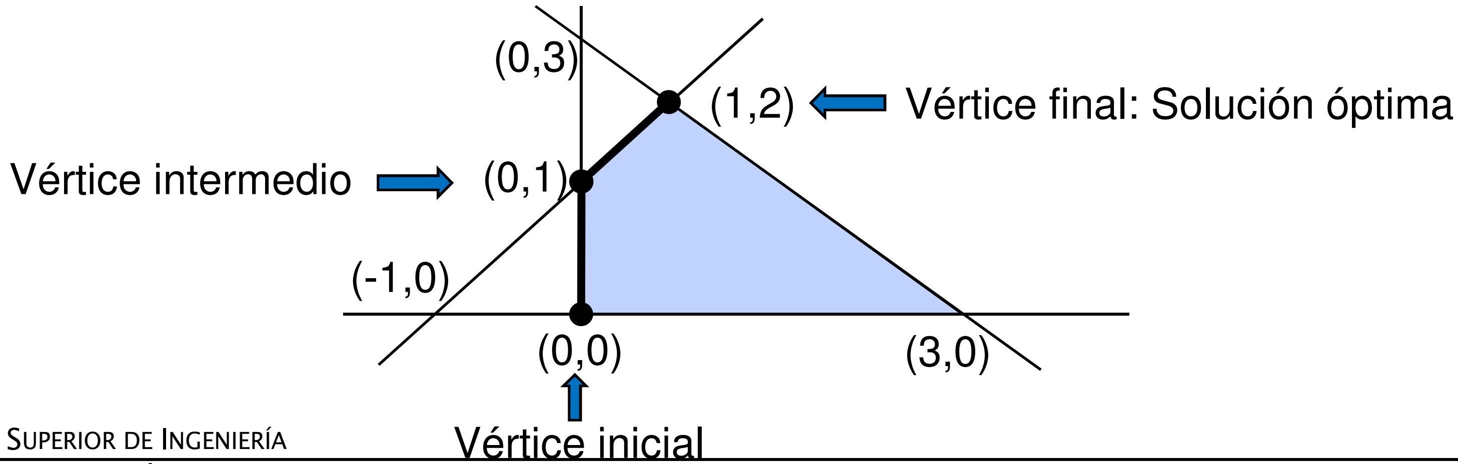
$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_3 = c_3 - z_3 = 2$$

$$\hat{c}_4 = c_4 - z_4 = 1$$

Como todos los costes son positivos ⟶ Solución óptima (única)

La solución óptima es $x_1^* = 1, \quad x_2^* = 2$ con valor objetivo $z^* = 7$



Degeneración y convergencia

- Si una solución básica factible es degenerada, es posible que tras el pivoteo se obtenga el mismo vértice para la nueva base
- Esta situación podría dar lugar a un bucle infinito. El algoritmo no convergería
- Se puede evitar de varias formas
  - ✓ Regla lexicográfica para el criterio de salida
  - ✓ Regla de Bland para los criterios de entrada y de salida
- Si se parte de una solución básica factible inicial, el algoritmo simplex (con cualquiera de las reglas anteriores) converge en un número finito de iteraciones a la solución óptima o detecta la no acotación

Múltiples óptimos

- Se produce cuando en una solución óptima alguna variable no básica tiene coste reducido nulo
- Introduciendo dicha variable se obtendría otra solución básica factible óptima
  - ✓ Cuando la solución óptima original es degenerada, si la variable saliente es nula, la variable entrante valdrá 0, y se llegará a la misma solución (aunque asociada a otra base)
  - ✓ Si al introducir la variable entrante se produce no acotación, la arista infinita correspondiente estará formada por soluciones óptimas
- El conjunto de soluciones óptimas será la envoltura convexa de todas las soluciones básicas factibles óptimas

Forma tabular del método simplex

- Facilita los cálculos y ahorra operaciones
- Útil para resolver a mano pequeños problemas

- Tabla simplex:

	z	x_N	x_B	RHS
$-z$	-1	$\hat{c}_N^T$	0	$-\hat{z}$
x_B	0	Y	I	$\hat{b}$

- Para realizar el pivoteo: Entra x_t y sale x_s. Pivote: y_{st}
  - ✓ Dividir la fila s por y_{st} ⟹ se obtiene un 1 en el pivote
  - ✓ Para el resto de filas (incluyendo la fila de la f. o. f_0)

$$f_i \rightarrow f_i - \frac{y_{it}}{y_{st}} f_s$$ ⟹ se obtienen "0" en el resto de elementos de la columna pivote

Algoritmo simplex. Ejemplo (8)

Resolvamos el ejemplo anterior mediante el simplex tabular

$$\begin{aligned} &\min -x_1 - 3x_2 \\ &x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &-x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

La base inicial era $B = I$, que corresponde a las variables básicas x_3, x_4

Por lo tanto $B^{-1} = I, \quad Y = B^{-1}N = N, \quad \hat{b} = B^{-1}b = b$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
-z	-1	-1	-3	0	0	0	
x_3	0	1	1	1	0	3	3
x_4	0	-1	1	0	1	1	1

Algoritmo simplex. Ejemplo (9)

Operaciones de pivoteo

$$f_0 \rightarrow f_0 + 3f_4$$
$$f_3 \rightarrow f_3 - f_4$$

Tras el pivoteo la nueva tabla es

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS	
-z	-1	-4	0	0	3	3	
x_3	0	2	0	1	-1	2	1
x_2	0	-1	1	0	1	1	

Operaciones de pivoteo

$$f_3 \rightarrow \frac{1}{2} f_3$$
$$f_0 \rightarrow f_0 + 2f_3$$
$$f_2 \rightarrow f_2 + \frac{1}{2} f_3$$

Algoritmo simplex. Ejemplo (10)

Tras el pivoteo la nueva tabla es

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
-z	-1	0	0	2	1	7
x_1	0	1	0	1/2	-1/2	1
x_2	0	0	1	1/2	1/2	2

Como todos los costes reducidos de las variables no básicas son estrictamente positivos hemos llegado a la tabla óptima

Para la forma estándar la solución es

$$x_1{}^* = 1, \quad x_2{}^* = 2, \quad x_3{}^* = 0, \quad x_4{}^* = 0, \quad z^* = -7$$

Para el problema original la solución óptima es

$$\boxed{x_1{}^* = 1, \quad x_2{}^* = 2, \quad z^* = 7}$$

Solución básica factible inicial

- Probar una a una todas las bases es muy costoso
  - ✓ En el peor caso habría que analizar $C_{n,m}$ bases
- Se necesita un método para obtener una solución básica factible y para detectar la infactibilidad
- Si la matriz identidad I_m es submatriz de A se toma ésta como base
- Las columnas de las variables de holgura $\in I_m$
- Para conseguir el resto de columnas se suman variables artificiales en las ecuaciones correspondientes
  - ✓ En el peor caso se añadirán m variables artificiales

Problema original P

$$\boxed{\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\quad Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}} \;\longrightarrow\; \boxed{\begin{aligned} &\min c^T x \\ &\quad Ax + Ix_a = b \\ &\quad x, x_a \geq 0 \end{aligned}}$$

Problema con variables artificiales

Solución básica factible inicial: Ejemplo (1)

Se tiene el problema

$$
\begin{aligned}
\min -2x_1 + x_2 - 3x_3 & \\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6 \\
x_2 + 2x_3 &\geq 2 \\
2x_2 + x_3 &\leq 4 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Se pasa a forma estándar restando una variable de exceso, x_4, en la 2ª restricción y sumando una variable de holgura, x_5, en la 3ª restricción

$$
\begin{aligned}
\min -2x_1 + x_2 - 3x_3 & \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 6 \\
x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad &= 2 \\
2x_2 + x_3 \qquad + x_5 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Solución básica factible inicial: Ejemplo (2)

Las variables x_1 y x_5 aportan 2 columnas a la matriz identidad:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La última columna se consigue añadiendo una variable artificial, x_6, en la 2ª restricción

$$\boxed{\begin{array}{l} \min -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}}$$

Se consigue entonces la base $B = I = \begin{pmatrix} a_1 & a_6 & a_5 \end{pmatrix}$ que proporciona la solución básica factible inicial

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_6 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eliminación de las variables artificiales

- Las variables artificiales, a diferencia de las variables de holgura y de exceso, no forman parte del problema original, es necesario sacarlas de la base y eliminarlas
- Existen dos métodos:
  - ✓ Método de las penalizaciones
  - ✓ Método de las 2 fases
- Ambos métodos asignan un coste elevado a las variables artificiales para forzarlas a salir de la base
- Si se consigue sacar de la base todas las variables artificiales el problema es factible
  - ✓ Se pueden eliminar las columnas de las variables artificiales una vez que todas han salido de la base, pero puede ser conveniente mantenerlas para conocer B^{-1} en cada iteración, pues ocupará las columnas que originalmente constituían I_m

Método de las 2 fases

Fase 1

Se resuelve el problema

$$\boxed{\begin{aligned} &\min \mathbf{1}^t x_a \\ &\quad Ax + Ix_a = b \\ &\quad x, x_a \geq 0 \end{aligned}}$$

- ✓ Siempre tiene solución óptima acotada (x', x_a^*)

1. Si $x_a^* \neq 0$ ⟹ P es infactible
2. Si $x_a^* = 0$
   a) Todas las variables artificiales son no básicas ⟹ x' es solución básica factible del problema P ⟹ Ir a la fase 2
   b) Alguna variable artificial es básica ⟹ sacarla de la base introduciendo en su lugar una variable original pivotando en el elemento correspondiente ⟹ subcaso a)

Fase 2

Calcular los costes reducidos originales y aplicar simplex

Método de las 2 fases. Ejemplo (1)

Resolvamos el problema

$$\begin{array}{l} \min -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \min -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

✓ x_6 es artificial

Fase 1

$$\begin{array}{l} \min x_6 \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ \quad x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ \quad 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Método de las 2 fases. Ejemplo (2)

Tabla inicial para la fase 1

			0	0	0	0	0	1		
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS	
	$-z$	-1	0	-1	-2	1	0	0	-2	
0	x_1	0	1	2	1	0	0	0	6	6
1	x_6	0	0	1	2	-1	0	1	2	1
0	x_5	0	0	2	1	0	1	0	4	4

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$-z$	-1	0	0	0	0	0	1	0
x_1	0	1	3/2	0	1/2	0	-1/2	5
x_3	0	0	1/2	1	-1/2	0	1/2	1
x_5	0	0	3/2	0	1/2	1	-1/2	3

Tabla óptima para la fase 1: La variable artificial está fuera de la base.

Pasamos a la fase 2

Método de las 2 fases. Ejemplo (3)

Fase 2 $\boxed{\min -2x_1 + x_2 - 3x_3}$

Tabla inicial para la fase 2

			-2	1	-3	0	0		
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS	
	-z	-1	0	11/2	0	-1/2	0	13	
-2	x_1	0	1	3/2	0	1/2	0	5	10
-3	x_3	0	0	1/2	1	-1/2	0	1	
0	x_5	0	0	3/2	0	1/2	1	3	6

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
-z	-1	0	7	0	0	1	16
x_1	0	1	0	0	0	-1	2
x_3	0	0	2	1	0	1	4
x_4	0	0	3	0	1	2	6

Tabla óptima

para la fase 2

$$x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 4,$$
$$x_4^* = 6, \quad x_5^* = 0$$
$$z^* = -16$$

Método de las penalizaciones

Se resuelve el problema P(M) siendo M grande:

$$\boxed{\begin{aligned} &\min c^T x + M\mathbf{1}^t x_a \\ &\quad Ax + Ix_a = b \\ &\quad x, x_a \geq 0 \end{aligned}}$$

1. Si el problema P(M) tiene solución óptima (x^*, x_a^*)
   - ✓ Si $x_a^* = 0$ ⟹ x^* es solución óptima de P
   - ✓ Si $x_a^* \neq 0$ ⟹ P es infactible
2. Si el problema P(M) tiene solución no acotada
   - ✓ Si $x_a^* = 0$ ⟹ P tiene solución no acotada
   - ✓ Si $x_a^* \neq 0$ ⟹ P es infactible

- ❑ Puede presentar problemas computacionales

Método de las penalizaciones. Ejemplo (1)

Queremos resolver

$$\begin{array}{l} \min\ x_1 - 2x_2 \\ \quad x_1 - x_2 \geq 1 \\ \quad 3x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Pasamos a forma estándar (hay que cambiar de signo la segunda restricción)

$$\begin{array}{l} \min\ x_1 - 2x_2 \\ \quad x_1 - x_2 - e_1 \qquad = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 \qquad - e_2 = 1 \\ \quad x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{array}$$

No hay ninguna columna de la matriz identidad: Añadimos variables artificiales (con coste M) a ambas restricciones

problema P(M) $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \min\ x_1 - 2x_2 \qquad + Ma_1 + Ma_2 \\ \quad x_1 - x_2 - e_1 \qquad + a_1 \qquad = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 \qquad - e_2 \qquad + a_2 = 1 \\ \quad x_1, x_2, e_1, e_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{array}$$

Método de las penalizaciones. Ejemplo (2)

Tabla inicial para P(M) tomando las variables artificiales como básicas:

			1	-2	0	0	M	M		
		z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	RHS	
	-z	-1	2M+1	-M-2	M	M	0	0	-2M	
M	a_1	0	1	-1	-1	0	1	0	1	
M	a_2	0	-3	2	0	-1	0	1	1	1/2

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	a_1	a_2	RHS
-z	-1	M/2-2	0	M	M/2-1	0	M/2+1	1-3M/2
a_1	0	-1/2	0	-1	-1/2	1	1/2	3/2
x_2	0	-3/2	1	0	-1/2	0	1/2	1/2

Tabla óptima para P(M): Como $a_1^* = 3/2 > 0$

→ El problema original no tiene solución factible