UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Gestión de inventarios

José María Ferrer Caja
Universidad Pontificia Comillas

Introducción

- Inventario (stock): Conjunto de bienes almacenados para su posterior uso
- Tipos de bienes del inventario:
  - ✓ Materias primas en espera de ser utilizadas en la producción
  - ✓ Productos disponibles para su venta
- Objetivo: Optimizar costes derivados del almacenamiento.
- El coste total debe incluir el coste de penalización (a veces subjetivo) por no ofrecer un servicio de calidad
- Decisiones a tomar:
  - ✓ ¿Cuándo se debe pedir el producto?
  - ✓ ¿Cuánto se debe pedir del producto?

Costes que intervienen en un modelo de inventarios

- Coste de compra
  - ✓ Por unidad del producto. Constante o con descuentos por cantidad
- Coste de orden
  - ✓ Coste fijo de preparación cuando se realiza un pedido
- Coste de almacenamiento
  - ✓ Coste (por unidad de inventario y unidad de tiempo) de mantenimiento del inventario
- Coste de ruptura
  - ✓ Coste de penalización por no cubrir la demanda.
  - ✓ Por unidad de demanda no satisfecha y unidad de tiempo
  - ✓ Incluye pérdida de beneficios y clientes por mala calidad del servicio
- Coste total del inventario
  - ✓ Suma de los costes anteriores

Demanda

- Determinista: Conocida para todo el horizonte temporal
- Aleatoria: Se conoce su distribución de probabilidad

- Estática: Constante a lo largo del tiempo
- Dinámica: Varía con el tiempo

- Discreta: Se produce en instantes concretos
- Continua

- Independiente: La demanda en un instante no influye en la demanda posterior
- Dependiente

Tipos de stocks

- En tránsito → Q_T
  - ✓ Se ha pedido, pero no se ha recibido
- Físico → Q_F
  - ✓ Está en el almacén
- Asignado → Q_A
  - ✓ Está en el almacén, pero ha sido comprado
- Disponible → Q_D
  - ✓ Está en el almacén y no ha sido comprado
- Logístico → Q_L
  - ✓ No ha sido comprado

- $Q_L = Q_T + Q_D = Q_T + Q_F - Q_A$

Otras características

- Tipo de revisión
  - Periódica: Los pedidos sólo pueden hacerse al comienzo de los periodos
  - Continua: Los pedidos pueden hacerse en cualquier instante. En este caso será conveniente realizar el pedido cuando el stock baje a un nivel prefijado (punto de reorden)
- Tiempo de entrega: Plazo de tiempo que transcurre desde que se realiza el pedido hasta que se recibe
  - Entrega inmediata o retardada
  - Tiempo de entrega determinista o aleatorio

Clasificación de los modelos de inventarios

- Modelos deterministas
  - Estáticos-De lote económico EOQ
  - Dinámicos
- Modelos estocásticos
  - De revisión continua
  - Periódicos
    - De un solo periodo
    - Multiperiodo

Modelos estáticos de lote económico con revisión continua (EOQ). Elementos generales

- Demanda
  - ✓ Conocida
  - ✓ Continua a razón de d unidades por unidad de tiempo
- Parámetros
  - ✓ $d \rightarrow$ Tasa de demanda
  - ✓ $c_u \rightarrow$ Coste unitario de compra
  - ✓ $c_p \rightarrow$ Coste de orden
  - ✓ $c_a \rightarrow$ Coste de almacenamiento
  - ✓ $c_r \rightarrow$ Coste de ruptura
  - ✓ $l \rightarrow$ Plazo de entrega
- Variables de decisión
  - ✓ $Q \rightarrow$ Tamaño del pedido
  - ✓ $T_0 \rightarrow$ Instante del pedido inicial. Tiempo entre pedidos

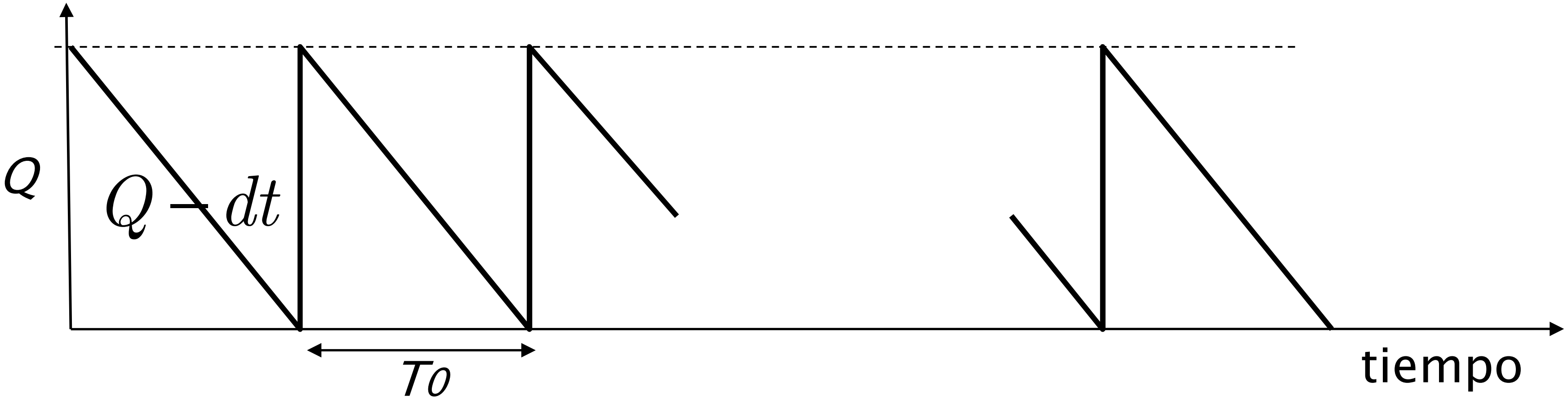
Modelos estáticos de lote económico con revisión continua (EOQ). Tipos de modelos

- Modelo EOQ clásico: sin ruptura
- Modelo EOQ con ruptura
- Modelo EOQ sin ruptura y con entrega retardada
- Modelo EOQ sin ruptura y con descuentos por cantidad
- Modelo EOQ sin ruptura con varios artículos y límite de almacenamiento

Modelo EOQ sin ruptura

- La demanda debe ser satisfecha siempre
- La entrega del pedido es inmediata
- Todos los costes son constantes

- El pedido deberá realizarse cuando el stock sea nulo
- El nivel de inventario varía según el siguiente gráfico



- Tamaño del ciclo → $T_0 = \frac{Q}{d}$

Modelo EOQ sin ruptura

- Coste total del ciclo (orden+compra+almacenamiento)

$$c_p + c_u Q + c_a \frac{Q^2}{2d}$$

- Función de coste por unidad de tiempo

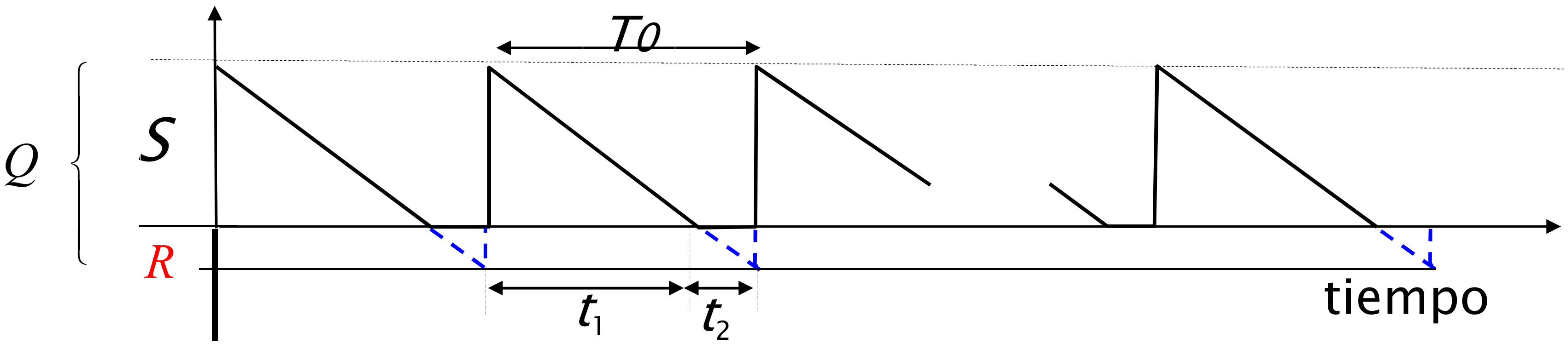
$$C(Q) = \frac{\text{Coste ciclo}}{\text{Tiempo ciclo}} = \frac{dc_p}{Q} + c_u d + \frac{c_a Q}{2}$$

- Tamaño óptimo del pedido (Fórmula de Wilson) $\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}}$
  - ✓ Independiente del coste de compra
- Tamaño óptimo del ciclo $\boxed{T_0{}^* = \frac{Q^*}{d}}$
- Si se requiere que *Q* sea entero
  - ✓ *Q* grande → Redondear
  - ✓ *Q* pequeño → *Q** tal que $\boxed{Q^*(Q^* - 1) < \frac{2dc_p}{c_a} < Q^*(Q^* + 1)}$

Modelo EOQ con ruptura

- Se permite un tiempo con stock nulo.
- Al recibir un pedido se satisface la demanda pendiente

- El nivel de inventario *S* varía según el siguiente gráfico



- Coste total del ciclo (orden+compra+almac.+ruptura)

$$c_p + c_u Q + c_a \frac{S^2}{2d} + c_r \frac{(Q-S)^2}{2d}$$

Modelo EOQ con ruptura

- Función de coste por unidad de tiempo

$$C(Q,S) = \frac{\text{Coste ciclo}}{\text{Tiempo ciclo}} = \frac{dc_p}{Q} + c_u d + \frac{c_a S^2}{2Q} + c_r \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

- Problema a resolver

$$\begin{aligned} \min_{Q,S} \quad & C(Q,S) \\ & Q \geq S \\ & Q \geq 0 \end{aligned}$$

- Solución óptima

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}\frac{c_r + c_a}{c_r}}} \qquad \boxed{S^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}\frac{c_r}{c_r + c_a}}}$$

✓ Independiente del coste de compra

- Tasa de ruptura $r = \dfrac{c_r}{c_r + c_a}$

✓ Cuanto mayor sea *r* menor será la cantidad de ruptura

Modelo EOQ sin ruptura y con entrega retardada

- La demanda debe ser satisfecha siempre
- La entrega se produce un tiempo l después de realizar el pedido
- Todos los costes son constantes

- $l < T_0^*$
  - ✓ Hacer el pedido cuando el nivel sea ld
- $l > T_0^*$
  - ✓ Plazo de entrega efectivo → $l_e = l - n\ T_0^*$ tal que $l_e < T_0^*$

Ejemplo: Fábrica de flanes

- Una fábrica de flanes recibe de un proveedor los envases de papel de aluminio en los que se deposita el contenido del flan. La producción anual de flanes asciende a 500000 unidades. El coste de pedido c_p es de 300 € por pedido (incluye transporte y descarga). El coste de almacenamiento anual c_a es de un 30 % del valor de adquisición. El valor de adquisición de cada envase es de 0.09 €. El tiempo hasta la llegada del pedido es un día. La demanda debe ser satisfecha siempre
- Tamaño óptimo de pedido (sin ruptura)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500000 \text{ envases} \cdot 300 \text{ €/pedido}}{30\% \cdot 0.09 \text{ €/envase año}}} = 105409 \text{ envases}$$

- Tiempo entre pedidos óptimo $T_0^* = \frac{Q^*}{d} = \frac{105409}{500000} = 0.2108 \text{ años} \simeq 2.5 \text{ meses}$
- Coste total por ciclo (óptimo)

$$c_p + c_u Q + c_a \frac{Q^2}{2d} = 300 + 0.09 \cdot 105409 + 0.3 \cdot 0.09 \cdot \frac{105409^2}{2 \cdot 500000} = 10086.8 \text{ €/ciclo}$$

- Coste anual (óptimo) $\frac{10086.8 \text{ €/ciclo}}{0.2108 \text{ años}} = 47846 \text{ €/año}$

Ejemplo: Fábrica de flanes (continuación)

- La fábrica de flanes quiere reducir los costes de inventario de los envases de aluminio. Para ello estudia la alternativa de demorar procesos de pasteurización cuando se carece de envases. Esta demora implica un coste adicional de 0.20 €/envase y año
- Tamaño óptimo de pedido (con ruptura)

$$Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}\frac{c_r+c_a}{c_r}} = \sqrt{\frac{2\cdot 500000\cdot 300}{0.3\cdot 0.09}\frac{0.2+0.3\cdot 0.09}{0.2}} = 112299 \text{ envases}$$

$$S^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}\frac{c_r}{c_r+c_a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 500000\cdot 300}{0.3\cdot 0.09}\frac{0.2}{0.2+0.3\cdot 0.09}} = 98942 \text{ envases}$$

- Tiempo entre pedidos óptimo $T_0^* = \frac{Q^*}{d} = \frac{112299}{500000} = 0.2246 \text{ años} \simeq 2.7 \text{ meses}$
- Coste total por ciclo (óptimo)

$$c_p + c_u Q + c_a \frac{S^2}{2d} + c_r \frac{(Q-S)^2}{2d} = 300 + 0.09\cdot 112299 + 0.3\cdot 0.09\cdot \frac{98942^2}{2\cdot 500000} + 0.2\frac{(112299-98942)^2}{2\cdot 500000} = 10706.9 \text{ €/ciclo}$$

- Coste anual (óptimo) $\frac{10706.9 \text{ €/ciclo}}{0.2246 \text{ años}} = 47671.4 \text{ €/año}$

Modelo EOQ sin ruptura y con descuentos por cantidad

- Coste unitario de compra $c_u(Q)=\begin{cases} c_1 & 0\le Q<q_1 \\ c_2 & q_1\le Q<q_2 \\ \vdots & \vdots \\ c_{m+1} & Q\ge q_m \end{cases}$ $\quad (c_1>c_2>\ldots>c_{m+1})$

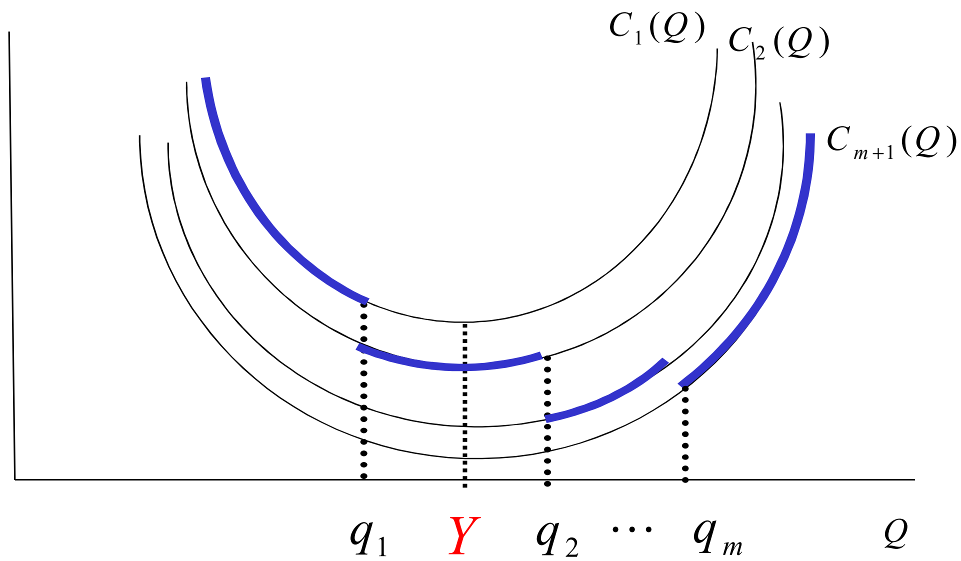
- Funciones de coste por unidad de tiempo (difieren en una constante)

$$C^i(Q)=\frac{dc_p}{Q}+c_i d+\frac{c_a Q}{2},\quad i=1,..,m+1$$

- Óptimo (el mismo para todas) $Y=\sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}$

Modelo EOQ sin ruptura y con descuentos por cantidad

- Gráfica del coste total



- Determinar *i* tal que $q_{i-1} \leq Y < q_i$
- Tamaño óptimo de pedido $Q^* = \arg\min\left\{C_i(Y), C_{i+1}(q_i), \cdots, C_{m+1}(q_m)\right\}$

Modelo EOQ sin ruptura con varios artículos y límite de almacenamiento

- Las hipótesis para cada artículo son las mismas que en el modelo EOQ
- Parámetros
  - ✓ $d^i, c_u^i, c_p^i, c_a^i \rightarrow$ Demanda y costes del artículo *i*
  - ✓ $s^i \rightarrow$ Espacio ocupado por cada unidad del artículo *i*
  - ✓ $S \rightarrow$ Espacio disponible para almacenamiento
- Variables
  - ✓ $Q^i \rightarrow$ Tamaño del pedido del artículo *i*
- Resolución
  - ✓ Si los valores óptimos individuales $Q^{i*} = \sqrt{\frac{2d^i c_p^i}{c_a^i}}$ verifican la restricción de espacio → FIN
  - ✓ Si no, resolver el problema (no lineal)

$$\min \sum_i C^i(Q^i) = \sum_i \left(\frac{d^i c_p^i}{Q^i} + c_u^i d^i + \frac{c_a^i Q^i}{2} \right)$$

$$\sum_i s^i Q^i \leq S$$

$$Q^i \geq 0$$

Modelo dinámico determinista con revisión periódica

- El nivel de inventario se revisa al comienzo de un número finito de periodos
- La demanda es determinista pero dinámica
- No se admite ruptura
- Datos
  - ✓ $t = 1, \ldots, T \rightarrow$ periodos del horizonte de planificación
  - ✓ $d_t \rightarrow$ demanda al comienzo del periodo t
  - ✓ $c_t(Q_t) \rightarrow$ función de coste (pedido y compra) en el periodo t
  - ✓ $h_t(I_t) \rightarrow$ función de coste por almacenar I_t unidades durante el periodo t
  - ✓ $I_0 \rightarrow$ inventario inicial

Modelo dinámico determinista con revisión periódica

- Variables de control
  - ✓ $Q_t \rightarrow$ cantidad a adquirir al comienzo del periodo *t*
- Variables de estado
  - ✓ $I_t \rightarrow$ nivel de inventario al final del periodo *t*
- Planteamiento

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_t \left[c_t(Q_t) + h_t(I_t) \right] \\
& Q_t + I_{t-1} = d_t + I_t \qquad \forall t \\
& Q_t, I_t \geq 0 \qquad \forall t
\end{aligned}
$$

- Resolución: según las funciones de coste y las variables
  - ✓ Programación lineal, no lineal, entera, binaria, mixta
  - ✓ Programación dinámica
  - ✓ Métodos heurísticos

Modelos estocásticos con revisión continua. Elementos generales y principales modelos

- Demanda
  - ✓ Aleatoria
  - ✓ Continua
- Plazo de entrega
  - ✓ Determinista o aleatorio

- Modelo EOQ probabilizado o con stock de seguridad
- Modelo EOQ probabilista

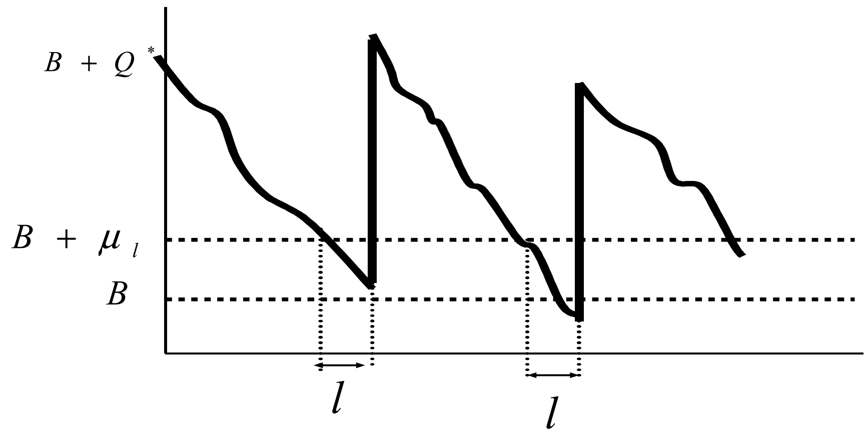
Modelo probabilizado o con stock de seguridad

- **Parámetros nuevos**
  - ✓ $l \rightarrow$ plazo de entrega
  - ✓ $D_l \rightarrow$ demanda aleatoria durante plazo de entrega (con media μ_l)
  - ✓ $\alpha \rightarrow$ máxima probabilidad permitida de agotar existencias durante el plazo de entrega
- **Variables nuevas**
  - ✓ $B \rightarrow$ stock de seguridad: nivel de inventario con el que la probabilidad de ruptura es $< \alpha$
  - ✓ Debe verificar

$$P\left\{D_l > B + \mu_l\right\} \leq \alpha$$

- **Punto de pedido**

$$B + \mu_l$$



Modelo probabilizado o con stock de seguridad

- Si la distribución de la demanda es normal $D_l \sim N(\mu_l, \sigma_l)$

$$P\{D_l - \mu_l > B\} \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad P\left\{Z > \frac{B}{\sigma_l}\right\} \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{\sigma_l} \geq z_\alpha \quad \Rightarrow \quad B \geq z_\alpha \sigma_l$$

- Si la demanda está expresada por unidad de tiempo con media *d* y desviación típica σ

$$\mu_l = d\,l \qquad \sigma_l = \sqrt{\sigma^2 l}$$

- Solución (igual que en el caso determinista)
  - ✓ Tamaño del pedido

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2dc_p}{c_a}}}$$

  - ✓ Tiempo estimado hasta volver a pedir $\boxed{T_0^* = \frac{Q^*}{d}}$

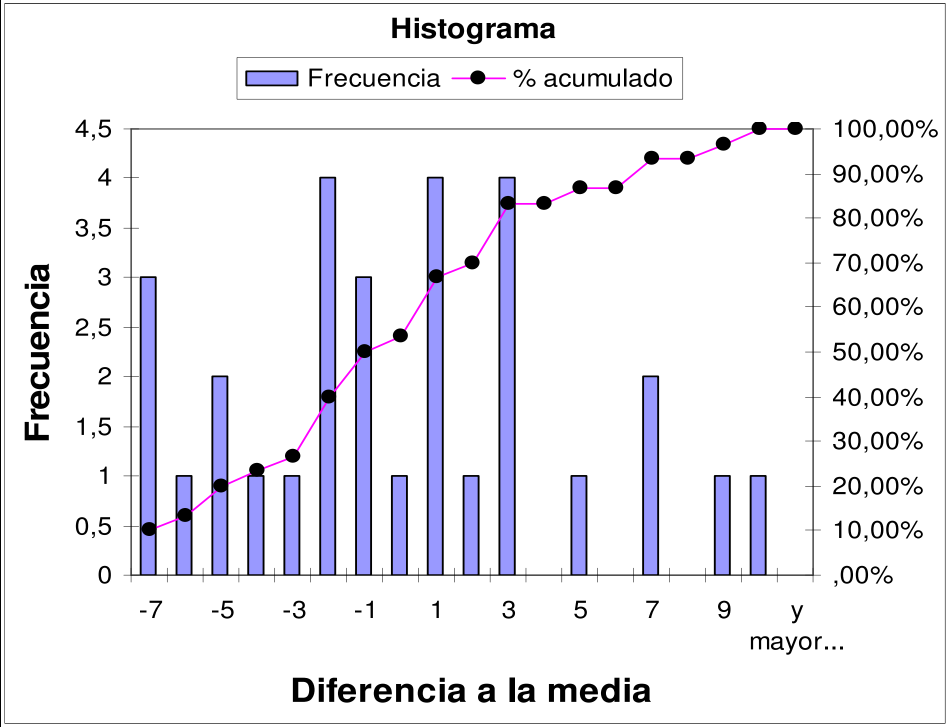
Ejemplo de stock de seguridad

#Día	Demanda	Diferencia
1	28	-2
2	30	0
3	33	3
4	27	-3
5	23	-7
6	40	10
7	26	-4
8	33	3
9	31	1
10	24	-6
11	29	-1
12	28	-2
13	29	-1
14	31	1
15	28	-2
16	37	7
17	33	3
18	29	-1
19	37	7
20	28	-2
21	33	3
22	23	-7
23	31	1
24	23	-7
25	39	9
26	31	1
27	32	2
28	25	-5
29	35	5
30	25	-5

Media muestral=30

Obtener el stock de seguridad para α=0.05

EL plazo de entrega es de 1 día

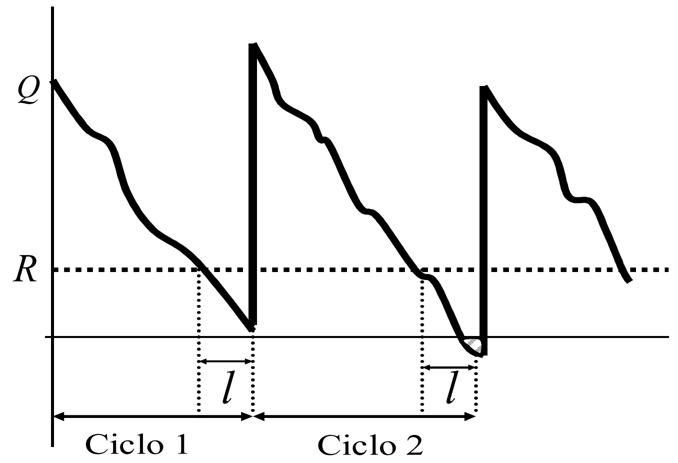


Clase	*Frecuencia*	*% acumulado*
-7	3	10,00%
-6	1	13,33%
-5	2	20,00%
-4	1	23,33%
-3	1	26,67%
-2	4	40,00%
-1	3	50,00%
0	1	53,33%
1	4	66,67%
2	1	70,00%
3	4	83,33%
4	0	83,33%
5	1	86,67%
6	0	86,67%
7	2	93,33%
8	0	93,33%
9	1	96,67%
10	1	100,00%
y mayor...	0	100,00%

B=9 ya que se cubriría la demanda en un 96.67%>95% de los casos

Modelo probabilista

- Hipótesis
  - ✓ La demanda no satisfecha se acumula
  - ✓ No está permitido hacer un pedido mientras se espera otro
  - ✓ La distribución de la demanda permanece estacionaria
- Datos
  - ✓ $l \rightarrow$ plazo de entrega
  - ✓ $D \rightarrow$ demanda aleatoria durante el plazo de entrega, con función de densidad $f(x)$ y media μ_D (por unidad de tiempo)
  - ✓ $c_p \rightarrow$ Coste de orden
  - ✓ $c_a \rightarrow$ Coste de inventario
  - ✓ $c_r \rightarrow$ Coste de ruptura
- Variables de decisión
  - ✓ $Q \rightarrow$ Tamaño del pedido
  - ✓ $R \rightarrow$ Punto de reorden



Modelo probabilista

- Costes esperados por unidad de tiempo
  - ✓ Coste de pedido $c_p \dfrac{\mu_D}{Q}$
  - ✓ Coste de almacenamiento $c_a\left(\dfrac{Q}{2}+R-\mu_D l\right)=c_a\left(\dfrac{(\underset{\substack{\text{Inventario}\\\text{al inicio}\\\text{del ciclo}}}{\underbrace{Q+R-\mu_D l}})+(\underset{\substack{\text{Inventario}\\\text{al final}\\\text{del ciclo}}}{\underbrace{R-\mu_D l}})}{2}\right)$
  - ✓ Coste de ruptura $c_r \dfrac{\mu_D}{Q}\displaystyle\int_R^{\infty}(x-R)f(x)dx$
  - ✓ Función de coste total $C(Q,R)=c_p\dfrac{\mu_D}{Q}+c_a\left(\dfrac{Q}{2}+R-\mu_D l\right)+c_r\dfrac{\mu_D}{Q}\displaystyle\int_R^{\infty}(x-R)f(x)dx$
- Solución óptima: (Q^*, R^*) tales que

$$Q^*=\sqrt{\frac{2\mu_D\left(c_p+c_r\int_{R^*}^{\infty}(x-R^*)f(x)dx\right)}{c_a}} \quad (1) \qquad \int_{R^*}^{\infty}f(x)dx=c_a\frac{Q^*}{\mu_D c_r} \quad (2)$$

  - ✓ En general no se puede resolver el sistema

Modelo probabilista

- Algoritmo de Hadley-Whitin

1. Solución inicial $\rightarrow R_0 = 0,\ Q_1 = \sqrt{\dfrac{2\mu_D c_p}{c_a}}$ (mínimo valor para *Q*)
2. Calcular R_i a partir de Q_i usando la ecuación (2)
3. Comprobar criterio de parada
   - ✓ Si $\left|R_i - R_{i-1}\right| < \varepsilon$ parar. Solución óptima $\rightarrow (Q^*, R^*) = (Q_i, R_i)$
   - ✓ Si no, ir al paso 4
4. Calcular Q_{i+1} a partir de R_i usando la ecuación (1). Hacer $i = i + 1$ y volver al paso 2

✓ Si existe solución factible, el algoritmo converge en un número finito de iteraciones

Modelos estocásticos con revisión periódica. Clasificación

- Número de periodos
  - ✓ Un periodo (más sencillo, para productos estacionales)
  - ✓ Varios periodos
- Coste de pedido
  - ✓ Sin coste de pedido
  - ✓ Con coste de pedido

- Modelo de un solo periodo sin coste de pedido
- Modelo de un solo periodo con coste de pedido

Modelo estocástico de un periodo sin coste de pedido

- **Hipótesis**
  - La demanda se produce de forma instantánea tras recibir el pedido
- **Nuevos parámetros**
  - $q_0 \rightarrow$ nivel de inventario inicial
  - $F(x) \rightarrow$ función de distribución de la demanda
- **Análisis**
  - Si el stock es mayor que la demanda se incurre en coste de almacenamiento
  - Si el stock es menor que la demanda se incurre en coste de ruptura
- **Coste esperado para un tamaño de pedido $Q - q_0$**

$$E\left[C(Q)\right] = c_u(Q - q_0) + c_a\int_0^Q (Q - x)f(x)dx + c_r\int_Q^\infty (x - Q)f(x)dx$$

Modelo estocástico de un periodo sin coste de pedido

- Nivel óptimo de inventario $\longrightarrow Q^*$ tal que
  - ✓ Si *D* es continua $F(Q^*) = P(D \leq Q^*) = \dfrac{c_r - c_u}{c_r + c_a}$
  - ✓ Si *D* es discreta $F(Q^* - 1) = P(D \leq Q^* - 1) \leq \dfrac{c_r - c_u}{c_r + c_a} \leq F(Q^*)$
- Tamaño óptimo del pedido $\boxed{Q^* - q_0}$

Modelo estocástico de un periodo con coste de pedido

- Hipótesis
  - ✓ Las mismas que en el modelo anterior
- Coste esperado para un tamaño de pedido $Q - q_0$

$$C(Q) = \begin{cases} c_p + c_u(Q - q_0) + L(Q) & \text{si } Q > q_0 \\ L(q_0) & \text{si } Q = q_0 \end{cases}$$

  - ✓ Coste esperado de almacenamiento y ruptura

$$L(Q) = c_a \int_0^Q (Q - x) f(x) dx + c_r \int_Q^\infty (x - Q) f(x) dx$$

- Resolución:
  - ✓ Comparar el coste mínimo para el caso de hacer pedido

$$S \text{ tal que } F(S) = \frac{c_r - c_u}{c_r + c_a}$$

  - ✓ con el coste de no hacer pedido

$$L(q_0)$$

Modelo estocástico de un periodo con coste de pedido

- Resolución (continuación)
  - ✓ Si $S \leq q_0$ ó $S > q_0, C(S) \geq L(q_0) \Rightarrow$ No hacer pedido
  - ✓ Si $S > q_0, C(S) < L(q_0) \Rightarrow$ Hacer un pedido de tamaño $S - q_0$