Teoría de Juegos

Introducción

- Dos o más decisores (jugadores) deben tomar una decisión entre un conjunto de alternativas (estrategias)
- Puede existir conflicto entre los intereses de los jugadores
- Puede intervenir el azar
- Al final del juego cada jugador recibe un pago, que depende de las decisiones de todos los jugadores y del azar
- Cada jugador actúa de forma racional, y tiene en cuenta asimismo la racionalidad del resto

Tipos de juegos

- Número de jugadores
  - Bipersonales
  - N-Personales
- Número de estrategias
  - Finitos
  - Infinitos
- Evolución en el tiempo
  - Estáticos
  - Dinámicos
- Intercambio de información entre jugadores
  - Cooperativos
  - No cooperativos

Tipos de juegos

- Variación de la riqueza
  - De suma constante (ej. suma nula)
  - De suma no constante
- Cantidad de información disponible
  - Información completa
  - Información incompleta
- Cantidad de información adquirida (sólo en juegos dinámicos)
  - Información perfecta
  - Información imperfecta

Tipos de juegos

- Ejemplo 1:
- J_1 elige una acción $x \in \{1,2\}$
- El azar elige $y \in \{1,2\}$ con probabilidades 0.75, 0.25
- J_2 elige $z \in \{1,2,3\}$ conociendo y pero no x
- Los pagos son $m_1(x,y,z)$ y $m_2(x,y,z)$ conocidos de antemano por ambos jugadores

- Juego bipersonal, finito, dinámico, no cooperativo, con información completa e imperfecta

Tipos de juegos

❑ Ejemplo 2:

- A una subasta acuden tres candidatos
- Cada candidato realiza su puja a sobre cerrado
- El candidato que haya pujado con mayor cantidad gana la subasta
- El ganador obtiene un pago resultado de restar la cantidad pujada al valor del artículo subastado
- Los perdedores obtienen pago nulo

- Juego tripersonal, infinito, estático, no cooperativo, con suma no constante y con información incompleta

Tipos de juegos

- Ejemplo 3:

- Juego de piedra, papel o tijera
- Quien pierde paga un euro al ganador

- Juego bipersonal, finito, estático, no cooperativo, con suma nula y con información completa

Forma normal de un juego

- X: Conjunto de estrategias de J_1
- Y: Conjunto de estrategias de J_2
- $M_1(x,y)$: Pago que recibe el jugador J_1 si opta por la estrategia x y J_2 opta por la estrategia y
- $M_2(x,y)$: Pago que recibe el jugador J_2 si opta por la estrategia y y J_1 opta por la estrategia x
- Se puede generalizar para N jugadores
- Si $M_1(x,y)+M_2(x,y)=c \rightarrow$ juego de suma constante
- Si $M_1(x,y)+M_2(x,y)=0 \rightarrow$ juego de suma nula

Juegos bimatriciales

- Conjuntos de estrategias finitos → Juego bimatricial
- a_{ij}: pago que recibe J_1 cuando elige su i-ésima estrategia y J_2 elige su j-ésima estrategia
- b_{ij}: pago que recibe J_2 cuando elige su j-ésima estrategia y J_1 elige su i-ésima estrategia
- Bimatriz de pagos:

		J_2		
		Y_1		Y_n
J_1	X_1	(a_{11},b_{11})	…	(a_{1n},b_{1n})
	…	…		…
	X_m	(a_{m1},b_{m1})	…	(a_{mn},b_{mn})

Juegos bimatriciales

- Ejemplo 4: Dilema del prisionero

- Dos delincuentes son detenidos y acusados de cometer un delito conjuntamente
- Están incomunicados, y se les plantea la posibilidad de delatar al otro para obtener beneficios penales
- Si ambos se delatan: Les caen 5 años de cárcel a cada uno
- Si uno delata y el otro no: 20 años para el delatado y el delator queda libre
- Si ninguno se delata: 1 año de cárcel cada uno

Juegos bimatriciales

❑ Ejemplo 4: Dilema del prisionero

- Bimatriz de pagos:

		Jugador 2	
		Delatar	No delatar
Jugador 1	Delatar	(-5,-5)	(0,-20)
	No delatar	(-20,0)	(-1,-1)

Juegos bimatriciales

- Ejemplo 5: Batalla de los sexos

- Los dos miembros de una pareja deben elegir si ir al boxeo (preferencia del hombre), o ir al ballet (preferencia de la mujer)
- Para ambos es prioritario ir juntos

		Mujer: Boxeo	Mujer: Ballet
Hombre	Boxeo	(2,1)	(0,0)
Hombre	Ballet	(-1,-1)	(1,2)

Juegos bimatriciales

- Bimatriz de pagos para el juego de piedra, papel o tijera:

		J_2		
		Piedra	Papel	Tijera
	Piedra	(0,0)	(-1,1)	(1,-1)
J_1	Papel	(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
	Tijera	(-1,1)	(1,-1)	(0,0)

Juegos bimatriciales

- Equilibrio de Nash
- El par de estrategias (x^*,y^*) está en equilibrio si ningún jugador mejora su pago cambiando su estrategia unilateralmente

❑ En el dilema del prisionero el par (Delatar,Delatar) constituye el único punto de equilibrio, y reporta pagos (-5,-5)

❑ En la batalla de los sexos existen dos equilibrios: (Boxeo,Boxeo) y (Ballet,Ballet) con pagos respectivos (2,1) y (1,2)

❑ En el juego de piedra, papel o tijera no existe ningún par de estrategias (puras) en equilibrio

Juegos bimatriciales

- Estrategia dominada
- Estrategia de un jugador que siempre es peor o igual que otra, independientemente de la elección del otro jugador
- Para resolver un juego, se pueden eliminar estrategias dominadas para simplificar el problema
- Si al eliminar iterativamente estrategias dominadas sólo queda un par, dicho par constituye un equilibrio de Nash, y es el único equilibrio

Juegos bimatriciales

- En el dilema del prisionero Delatar siempre reporta mayor pago al jugador 1 que No delatar, que por lo tanto puede eliminarse

	Delatar	No delatar
Delatar	(-5,-5)	(0,-20)
~~No delatar~~	~~(-20,0)~~	~~(-1,-1)~~

- Asimismo, el jugador 2 también puede eliminar No delatar

	Delatar	~~No delatar~~
Delatar	(-5,-5)	~~(0,-20)~~
~~No delatar~~	~~(-20,0)~~	~~(-1,-1)~~

Juegos bimatriciales

- Estrategia mixta
- Distribución de probabilidad sobre las estrategias puras de un jugador
- Para J_1:

  $x=(x_1, \ldots, x_m)^t$, $0 \leq x_i$, $\sum x_i = 1$, x_i = probabilidad de elegir la estrategia pura i-ésima
- Para J_2:

  $y=(y_1, \ldots, y_n)^t$, $0 \leq y_j$, $\sum y_j = 1$, y_j = probabilidad de elegir la estrategia pura j-ésima
- Si J_1 adopta la estrategia mixta x y J_2 la y, los pagos esperados por J_1 y por J_2 son

$$E_1(x,y)=\sum\sum x_i y_j a_{ij} \qquad E_2(x,y)= \sum\sum x_i y_j b_{ij}$$

Juegos bimatriciales

- Cada estrategia pura X_i corresponde a la estrategia mixta $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ donde $x_i=1$, $x_j=0$ si $j\neq i$

❑ En la batalla de los sexos si el hombre adopta la estrategia mixta $x=(2/3,1/3)$ y la mujer la $y=(1/2,1/2)$ sus pagos esperados son

$$E_1(x,y)=2/3\bullet 1/2\bullet 2+2/3\bullet 1/2\bullet 0+1/3\bullet 1/2\bullet(-1)+1/3\bullet 1/2\bullet 1=2/3$$

$$E_2(x,y)=2/3\bullet 1/2\bullet 1+2/3\bullet 1/2\bullet 0+1/3\bullet 1/2\bullet(-1)+1/3\bullet 1/2\bullet 2=1/2$$

- Teorema de Nash: En todo juego finito con un número finito de jugadores existe al menos un equilibrio de Nash, formado quizá por estrategias mixtas

Juegos matriciales

- En un juego bipersonal de suma constante c se cumple $b_{ij}=c-a_{ij}$
- Es suficiente con conocer la matriz de pagos del jugador 1 → Juego matricial
- Todo juego matricial es no cooperativo
- Si el juego es de suma nula, $b_{ij}=-a_{ij}$
- Basta realizar el estudio para juegos de suma nula

Juegos matriciales

- El juego de piedra, papel o tijera se representa mediante la matriz de pagos del primer jugador

$$
\begin{array}{cc|ccc|}
 & & & J_2 & \\
 & & \text{Piedra} & \text{Papel} & \text{Tijera} \\
\hline
 & \text{Piedra} & 0 & -1 & 1 \\
J_1 & \text{Papel} & 1 & 0 & -1 \\
 & \text{Tijera} & -1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Juegos matriciales

- Cada jugador debe esperar lo peor del otro
  - Jugador 1: criterio maximin
  - Jugador 2: criterio minimax
- Si los jugadores guiados por los criterios maximin (J_1) y minimax (J_2) llegan al mismo punto, el par de estrategias está en equilibrio y constituye la solución óptima del juego (solución estable)
- El valor asociado (pago para J_1, coste para J_2) se denomina valor del juego → v
- Si el valor del juego es 0, el juego es justo

Juegos matriciales

- Ejemplo 6

$$
\begin{array}{cc}
 & J_2 \\
J_1 & \begin{array}{|ccc|c}
2 & -1 & 0 & -1 \\
3 & 4 & 5 & \underline{3} \\
2 & 5 & 2 & 2 \\
\hline
\underline{3} & 5 & 5 &
\end{array}
\end{array}
$$

– Las estrategias óptimas son la segunda para el jugador 1, y la primera para el jugador 2

– El valor del juego es 3

Juegos matriciales

– Se llega a la misma solución eliminando estrategias dominadas:

$$
\begin{array}{cc}
 & J_2 \\
J_1 & \begin{array}{|ccc|}\hline \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \\ \hline\end{array}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cc}
 & J_2 \\
J_1 & \begin{array}{|ccc|}\hline \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 3 & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 2 & \cancel{5} & \cancel{2} \\ \hline\end{array}
\end{array}
\longrightarrow
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & J_2 \\
J_1 & \begin{array}{|ccc|}\hline \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 3 & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{2} \\ \hline\end{array}
\end{array}
$$

Juegos matriciales

- Los criterios maximin-minimax no siempre llevan al mismo punto → solución inestable

❑ Ejemplo 7

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & & J_2 & & \\
\hline
 & 0 & -2 & 2 & \underline{-2} \\
J_1 & 5 & 4 & -3 & -3 \\
 & 2 & 3 & -4 & -4 \\
\hline
 & 5 & 4 & \underline{2} &
\end{array}
$$

$v_1=-2$, $v_2=2$

$v_1 \neq v_2$ → solución inestable

Juegos matriciales

- Teorema minimax: Si se permiten estrategias mixtas, los criterios maximin (pago esperado) para J_1 y minimax (coste esperado) para J_2 llevan a una solución estable: $v_1=v_2=v$

- Para obtener las estrategias mixtas óptimas usamos programación lineal

Juegos matriciales

- Resolución mediante programación lineal
- J_1 busca una estrategia mixta $x=(x_1, \ldots, x_m)^t$
- Pago esperado de J_1 si J_2 elige la estrategia pura j-ésima:

$$a_j^t\, x = \sum a_{ij} x_i$$

  siendo a_j la columna j-ésima de la matriz de pagos
- J_1 debe esperar lo peor de J_2:

$$v = \min \{a_j^t x\}$$

- J_1 debe elegir x de modo que ese mínimo sea lo mayor posible

$$\max v \;/\; v = \min \{a_j^t x\}$$

- Desde el punto de vista de J_2:

$$\min w \;/\; w = \max \{a_i' y\}$$

  siendo a_i' la fila i-ésima de la matriz de pagos

Juegos matriciales

$$
\begin{aligned}
&\max v\\
&\text{s.a.}\\
&v \le a_j^t x,\ j = 1..n\\
&\sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\
&x_1,\dots,x_m \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min w\\
&\text{s.a.}\\
&w \ge a_i' y,\ i = 1..m\\
&\sum_{j=1}^{n} y_j = 1\\
&y_1,\dots,y_n \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max v\\
&\text{s.a.}\\
&A^t x \ge v\\
&\mathbf{1}x = 1\\
&x \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } w\\
&\text{s.a.}\\
&Ay \le w\\
&\mathbf{1}y = 1\\
&y \ge 0
\end{aligned}
$$

Juegos matriciales

- Ambos problemas son duales (excepto un cambio de signo en las variables) → $v^*=w^*$
- Es suficiente resolver uno de ellos

- Metodología para resolver un juego matricial

1. Eliminar estrategias dominadas. Si sólo queda un par → fin
2. Buscar estrategias puras óptimas aplicando maximin-minimax. Si la solución es estable → fin
3. Buscar estrategias mixtas óptimas resolviendo alguno de los problemas de programación lineal

Juegos matriciales

- En el juego piedra, papel o tijera no hay estrategias dominadas
- No existen equilibrios usando estrategias puras
- Planteamos el PPL para el jugador 2 (por ejemplo):

$$
\begin{aligned}
\min\ & w \\
\text{s. a}\ & -y_2+y_3 \leq w \\
& y_1 \qquad -y_3 \leq w \\
& -y_1+y_2 \qquad \leq w \\
& y_1+y_2+y_3=1 \\
& y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Juegos matriciales

- Su solución óptima (única) es

$$y_1^*=1/3,\ y_2^*=1/3,\ y_3^*=1/3$$

- El valor óptimo es $w^*=0$ (el juego es justo)
- Las variables duales óptimas son

$$\pi_1^*=-1/3,\ \pi_2^*=-1/3,\ \pi_3^*=-1/3$$

- Cambiando de signo se obtiene la estrategia óptima del primer jugador

$$x_1^*=1/3,\ x_2^*=1/3,\ x_3^*=1/3 \quad \text{con } v^*=0$$

- La estrategia óptima para cada jugador es realizar un sorteo equitativo entre piedra, papel y tijera
- Sus pagos esperados son nulos