Teoría de juegos

Andrés Ramos
http://www.iit.comillas.edu/aramos/
Andres.Ramos@comillas.edu

Contenido

Introducción
Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias puras
Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias mixtas
Equilibrios de Cournot y de Bertrand

1

Introducción

Introducción

- Contrapuesta a análisis de decisión
- Situaciones de conflicto y competencia entre decisores
- La consecución de objetivos no sólo depende de ***decisiones propias*** y del ***azar*** sino de las ***decisiones de los competidores***
- Criterios ***racionales*** de selección de estrategias para su propio beneficio

Clasificación teoría de juegos (i)

- Número de jugadores
  - Bipersonal
  - N-personales
- Número de estrategias
  - Finito
  - Infinito
- Evolución temporal
  - Estática
  - Dinámica
- Intercambio de información entre jugadores
  - Cooperativo
  - No cooperativo

Clasificación teoría de juegos (ii)

- Variación de la riqueza
  - Suma constante
  - Suma no constante
- Cantidad de información de otros jugadores de que disponen
  - Completa
  - No completa
- Cantidad de información que adquieren en el desarrollo del juego
  - Perfecta
  - Imperfecta

Matriz de pagos

- X conjunto de estrategias del jugador 1 (finitas)
- Y conjunto de estrategias del jugador 2 (finitas)
- $M_1(x,y)$ utilidad o pago que recibe el jugador 1
- $M_1(x,y)$ utilidad o pago que recibe el jugador 2

$$\begin{array}{cc} & J_2 \\ J_1 & \begin{pmatrix} (a_{11},b_{11}) & & \\ & (a_{ij},b_{ij}) & \\ & & (a_{mn},b_{mn}) \end{pmatrix} \end{array}$$

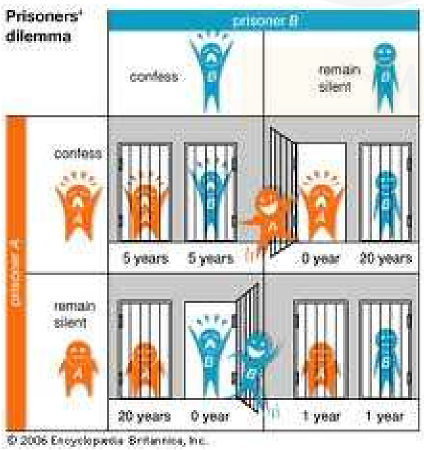
matriz de pagos

- a_{ij} pago que recibe el jugador 1 si elige la i-ésima estrategia y el jugador 2 elige la j-ésima estrategia
- b_{ij} pago que recibe el jugador 2 si elige la j-ésima estrategia y el jugador 1 elige la i-ésima estrategia

Dilema del prisionero

- Juego bipersonal, finito, estático, no cooperativo, de suma no constante

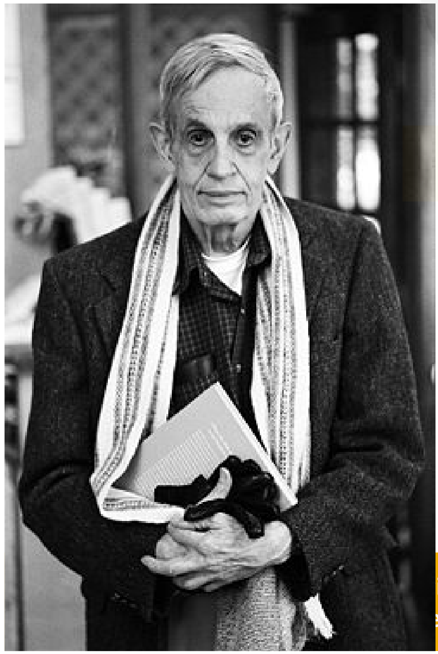
- Dos delincuentes son detenidos y acusados de cometer un delito conjuntamente. Los delincuentes están incomunicados y pueden delatar o no al otro. Si ambos delatan les caen 5 años de prisión a cada uno. Si uno delata y el otro no le caen 20 años para el delatado y 0 para el delator. Si ninguno delata les caen 1 año a cada uno.



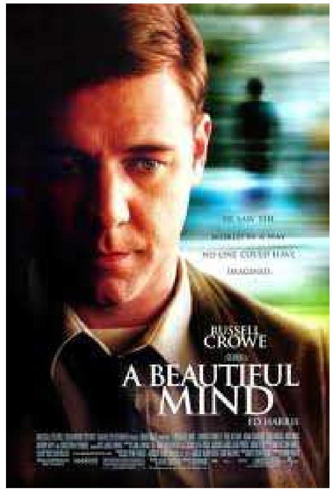
		J2	
		Delatar	**No Delatar**
J1	**Delatar**	(-5,-5)	(0,-20)
	No Delatar	(-20,0)	(-1,-1)

Estrategias de equilibrio (Nash)

- (x^*, y^*) es un par de estrategias de equilibrio si y sólo si ningún jugador quiere cambiar de estrategia de forma unilateral.
- En el dilema del prisionero (Delatar, Delatar) es la estrategia de equilibrio. Si el juego fuera cooperativo (paso de información entre jugadores) la estrategia de equilibrio sería la (No Delatar, No Delatar).
- No siempre existen estrategias de equilibrio únicas. Equilibrios correlacionados.



		Mujer	
		Fútbol	**Telenovela**
Hombre	**Fútbol**	(2,1)	(0,0)
	Telenovela	(-1,-1)	(1,2)



Introducción

Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias puras

Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias mixtas

Equilibrios de Cournot y de Bertrand

2

Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias puras

Resolución de un juego bipersonal de suma nula

1. Buscar ***estrategias puras*** en equilibrio. Si existe es la solución, si no ir a punto 2.

2. Resolver el problema con ***estrategias mixtas*** por LP

- En cualquier momento se puede reducir la matriz de pagos eliminando estrategias dominadas.

Juegos bipersonales de suma 0

- Por naturaleza son no cooperativos.
- Basta con dar la matriz de pagos de un jugador.
- Cada jugador debe esperar lo peor del otro.
- Matriz de pagos vista como pagos al jugador 1.
- El punto de equilibrio es el punto óptimo del juego.

			J 2	
		E 1	**E 2**	**E 3**
	E 1	1	2	4
J 1	**E 2**	1	0	5
	E 3	0	1	-1

Eliminación de estrategias dominadas (i)

- ***Estrategia dominada***
- Estrategia de un jugador que independientemente de lo que haga el otro jugador siempre es igual o peor que otra.
- Ejemplo: se elimina estrategia E3 del jugador 1

			J 2	
		E 1	**E 2**	**E 3**
	E 1	1	2	4
J 1	**E 2**	1	0	5

- Se elimina estrategia E3 del jugador 2

			J 2	
		E 1	**E 2**	
	E 1	1	2	
J 1	**E 2**	1	0	

Eliminación de estrategias dominadas (ii)

- Se elimina estrategia E2 del jugador 1

			J 2	
		E 1	E 2	
	E 1	1	2	
J 1				

- Se elimina estrategia E2 del jugador 2

			J 2	
		E 1		
	E 1	1		
J 1				

- Estrategia óptima E1 de jugador 1 y E1 de jugador 2

Valor del juego y juego justo

- ***Valor del juego***
  - Pago al jugador 1 cuando ambos jugadores lo hacen de manera óptima.
  - Ejemplo: valor del juego es 1

- ***Juego justo***
  - Cuando el valor del juego es 0

Criterio minimax

- Minimizar la pérdida máxima (criterio de aversión al riesgo)

			J 2			Min	
		E 1	E 2	E 3			
	E 1	-3	-2	6		-3	
J 1	E 2	2	0	2		0	maximin
	E 3	5	-2	-4		-4	
						Mínimos	
Máximos		5	0	6			
			minimax				

- ***Maximin***: máximo de los pagos mínimos para el jugador 1
- ***Minimax***: mínimo de los pagos máximos para el jugador 2
- Si minimax y maximin coinciden en una estrategia entonces la solución es *estable*, se trata de un punto de equilibrio.

Solución inestable

			J 2			Min	
		E 1	**E 2**	**E 3**			
	E 1	0	-2	2		**-2**	maximin
J 1	**E 2**	5	4	-3		-3	
	E 3	2	3	-4		-4	
Max		5	4	**2**			
				minimax			

Introducción
Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias puras
Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias mixtas
Equilibrios de Cournot y de Bertrand

3

Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias mixtas

Juegos con estrategias mixtas (i)

- A cada posible estrategia de cada jugador éste le asigna una probabilidad.
  - x_i probabilidad de que el jugador 1 use la estrategia i, $i=1,\ldots,m$

    $$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

  - y_j probabilidad de que el jugador 2 use la estrategia j, $j=1,\ldots,n$

    $$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

  - p_{ij} pago para el jugador 1 si éste utiliza la estrategia i y el jugador 2 utiliza la j
- Pago esperado para el jugador 1 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij}$
- v valor del juego
- $\underline{v}$ maximin para jugador 1
- $\bar{v}$ minimax para jugador 2

Juegos con estrategias mixtas (ii)

- ***Criterio minimax para estrategias mixtas***
  - Un jugador debe elegir la estrategia mixta que minimice la máxima pérdida esperada.

- ***Teorema minimax***
  - Si se permiten estrategias mixtas, las estrategias óptimas según el criterio minimax proporcionan *solución estable* si $\underline{v} = \overline{v} = v$ de manera que ningún jugador quiere cambiar unilateralmente su estrategia.

Solución por programación lineal

- Pago esperado para el jugador 1 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij}$
- Para cualquier estrategia pura del competidor

$$\sum_{i=1}^{m} x_i p_{ij} \geq v \qquad \forall j = 1,\dots,n$$

- La suma de las probabilidades es 1

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad x_i \geq 0 \qquad \forall i = 1,\dots,m$$

- Maximizar el pago del jugador 1

$\max v$

Visión del jugador 2 en función de decisiones del 1

- Maximización de la mínimas pérdidas. Mayor menor de las pérdidas

$$\max v$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i p_{ij} \geq v \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Visión del jugador 1 en función de decisiones del 2

- Minimización de la máximas ganancias. Menor mayor de los pagos

$$\min \; w$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij} \le w \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

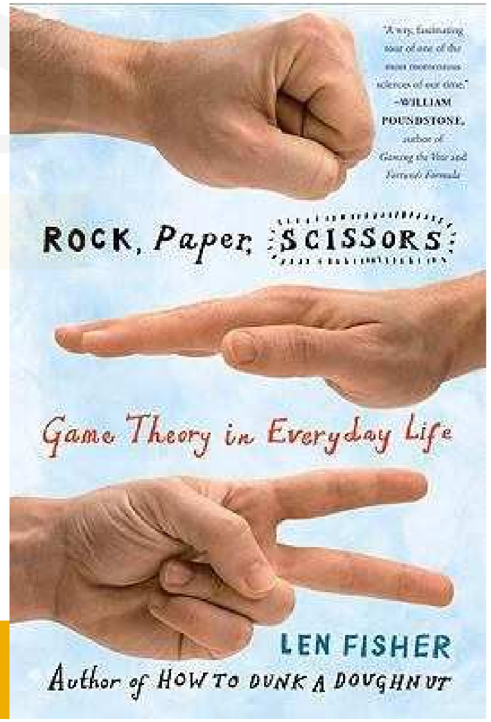
$$y_j \ge 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

- Son problemas duales, es suficiente con resolver uno. En el óptimo $v^* = w^*$

Ejemplo juego de 2 jugadores de suma nula

- No hay estrategias dominadas. No tiene punto de equilibrio en estrategias puras.

			J 2			Min
		Papel	Piedra	Tijeras		
	Papel	0	1	-1		-1
J 1	Piedra	-1	0	1		-1
	Tijeras	1	-1	0		-1
Max		1	1	1		



Problema de optimización del jugador 2

$$\min w$$

$$\begin{array}{llll} & y_2 & -y_3 & \leq w \\ -y_1 & & +y_3 & \leq w \\ y_1 & -y_2 & & \leq w \\ y_1 & +y_2 & +y_3 & =1 \\ y_i \geq 0 & & & \end{array}$$

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (1/3, 1/3, 1/3)$$

$$(\pi_1^*, \pi_3^*, \pi_3^*) = (-1/3, -1/3, -1/3)$$

- Se cambia el signo de las variables duales $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1/3, 1/3, 1/3)$
- Valor del juego 0
- Para cada jugador la estrategia óptima es sacar cualquier elemento con igual probabilidad.

Introducción
Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias puras
Juegos bipersonales de suma 0 con estrategias mixtas
Equilibrios de Cournot y de Bertrand

4

Equilibrios de Cournot y de Bertrand

Modelo de equilibrio de Cournot (i)

- Dos empresas compiten en un mercado por un producto homogéneo (i.e., no hay diferencia en quién lo produce). Las empresas no pueden cooperar
- El proceso se realiza sólo una vez (juego estático)
- Precio del producto es elástico

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & Q < a \\ 0 & Q > a \end{cases}$$

- Coste de producción unitario igual para las dos empresas. Coste total función de la cantidad producida $C(q_i) = cq_i$ y menor que el precio máximo de venta $c < a$
- La cantidad total a producir es $Q = q_1 + q_2$
- a tamaño del mercado
- -1 (coeficiente de Q) sensibilidad del consumidor al precio

Modelo de equilibrio de Cournot (ii)

- Espacio de estrategias de cada empresa $X_i = [0, \infty)$
- Función de pagos (beneficios netos)

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(q_i + q_j) - c] = q_i[a - (q_i + q_j) - c]$$

- Queremos maximizar la función de pagos

$$\max_{q_i \geq 0} \pi_i(q_i, q_j^*) = \max_{q_i \geq 0} q_i[a - (q_i + q_j^*) - c]$$

- Para la empresa *i*

$$\frac{\partial \pi_i(q_i, q_j^*)}{\partial q_i} = a - 2q_i - q_j^* - c = 0 \Rightarrow q_i^* = \frac{1}{2}(a - q_j^* - c)$$

- Punto de equilibrio, cantidad total y precio

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3} \qquad Q^* = \frac{2}{3}(a-c) \qquad P(Q) = a - \frac{2}{3}(a-c) = \frac{a+2c}{3}$$

- Beneficio neto conjunto

$$(q_1 + q_2)(P - c) = \frac{2(a-c)^2}{9}$$

Modelo de equilibrio de Cournot (iii)

- ¿Y si las empresas pueden cooperar entre ellas, actúan como una única (monopolio)?
- Maximiza $\max_{Q\geq 0} \pi(Q) = \max_{Q\geq 0} Q[a - Q - c]$
- Punto de equilibrio y precio $Q^* = \dfrac{a-c}{2}$ $\quad P(Q) = a - \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{a+c}{2}$
- Beneficio neto conjunto
$$Q(P-c) = \frac{(a-c)^2}{4}$$
- La producción es mayor en un duopolio $2(a\text{-}c)/3$ que en un monopolio $(a\text{-}c)/2$.
- El precio es menor en un duopolio $(a+2c)/3$ que en un monopolio $(a+c)/2$.
- Incentivo a coludir (formar un cartel) $(a\text{-}c)^2/36$
- Dado que los carteles normalmente son ilegales, los agentes tratan de coludir tácitamente usando estrategias de reducción de producción autoimpuestas que tendrán un efecto de subida de precios y por consiguiente un aumento en los beneficios de los agentes participantes.

Colusión entre empresas lácteas (3-marzo-2015)

Pidieron ayuda a productores sin obtenerla

Multas de Competencia por 88 millones a 9 empresas lácteas

La Comisión Nacional de Mercados y la Competencia (CNMC) ha impuesto multas por un importe total de 88,2 millones de euros a nueve empresas y dos asociaciones que operan en el mercado de aprovisionamiento de leche cruda de vaca en España por haber participado en "conductas anticompetitivas que infringen la legislación de competencia". Les acusa de intercambiar información sobre los ganaderos que les abastecen, pactar precios en el aprovisionamiento de leche cruda y repartirse el mercado.

Las multas más elevadas corresponden a **Danone** (23,3 millones); **Corporación Alimentaria Peñasanta** (21,8 millones); **Grupo Lactalis Iberia** (11,6 millones); **Nestlé** España (10,6 millones); **Puleva** Food (con 10,2 millones) y Calidad **Pascual** (8,5 millones). En menor cuantía, han sido sancionadas **Senoble Ibérica** (929.644 euros); **Central Lechera Asturiana** (698.477 euros), **Gremio de Industrias Lácteas de Cataluña** (200.000 euros); **Asociación de Empresas Lácteas de Galicia** (100.000 euros) y **Central Lechera de Galicia** (53.310 euros). Al parecer, algunas de estas entidades pidieron ayuda a diversos productores ganaderos perjudicados por la falta de competencia y los abusos contra ella para evitar las sanciones, pero no la obtuvieron.

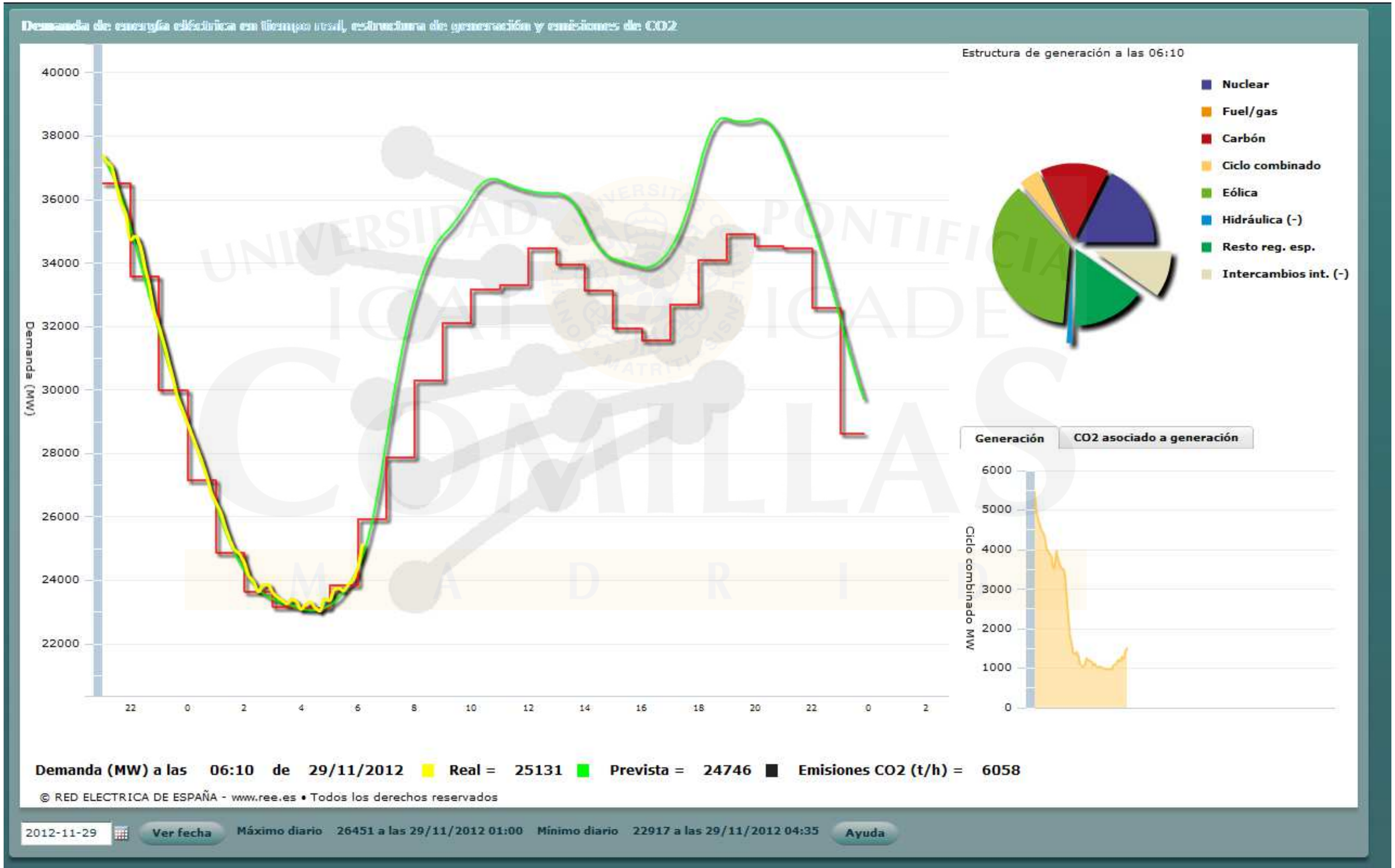
La CNMC recuerda que contra esta resolución **no cabe recurso alguno en vía administrativa,** pero que se puede interponer recurso contencioso-administrativo en la Audiencia Nacional en el plazo de dos meses. Danone y Nestlé ya han anunciado que recurrirán la sanción.

La **primera noticia del expediente data del verano del 2012**. El origen de las actuaciones se encuentra en las numerosas denuncias y quejas recibidas en la Dirección de Investigaciónde la CNC así como en las noticias aparecidas en prensa relativas a la problemática en el sector de la leche, sector que ha sido objeto de investigación por parte de las autoridades de competencia en ocasiones anteriores. Estas informaciones se refieren, en particular, a posibles prácticas anticompetitivas de diversas empresas lácteas y asociaciones de industrias lácteas y consistirían en intercambios de información sensible sobre clientes, condiciones de compra y precios y en la adopción de acuerdos entre las principales empresas y asociaciones de industriales del sector cuyo objeto sería el reparto de mercado entre ellas y la fijación de condiciones comerciales comunes y su imposición a los ganaderos.

"Estas informaciones se referían, en particular, a **prácticas anticompetitivas** de diversas empresas lácteas y asociaciones de industrias lácteas y consistirían en intercambios de información sensible sobre clientes, condiciones de compra y precios y en la adopción de acuerdos entre las principales empresas y asociaciones de industriales del sector cuyo objeto sería el reparto de mercado entre ellas y la fijación de condiciones comerciales comunes y su imposición a los ganaderos", según decía la extinta CNC en un comunicado al incoar el expediente en 2012.

La Resolución de la CNMC "no sólo **prueba la existencia de conductas prohibidas** por su objeto, que no era otro que distorsionar el normal funcionamiento del mercado, sino que además las mismas **produjeron efectos negativos en el mercado**, siendo la industria ganadera el sector más perjudicado".

Demanda de energía eléctrica del 29-nov-2012



Modelo de equilibrio de Bertrand (i)

- Las empresas producen artículos diferenciados
- Pueden elegir el precio de venta: p_i precio para la empresa i
- La demanda de un producto es elástica $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$
- Coste de producción unitario c igual para las dos empresas

Modelo de equilibrio de Bertrand (ii)

- Espacio de estrategias de cada empresa $X_i = [0, \infty)$
- Función de pagos (beneficios netos)

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] = (a - p_i + bp_j)(p_i - c)$$

- Maximizar la función de pagos

$$\max_{p_i \geq 0} \pi_i(p_i, p_j^*) = \max_{p_i \geq 0} (a - p_i + bp_j^*)(p_i - c)$$

- Para la empresa i

$$\frac{\partial \pi_i(p_i, p_j^*)}{\partial p_i} = -p_i + c + a - p_i + bp_j^* = 0 \Rightarrow p_i^* = \frac{1}{2}(a + bp_j^* + c)$$

- Punto de equilibrio

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a+c}{2-b} \quad (b < 2)$$

Andrés Ramos

http://www.iit.comillas.edu/aramos/

Andres.Ramos@comillas.edu

Instituto de Investigación Tecnológica
Santa Cruz de Marcenado, 26
28015 Madrid
Tel +34 91 542 28 00
Fax + 34 91 542 31 76
info@iit.comillas.edu