Teoría de la Decisión

Introducción

Proceso de toma de decisión: Elegir lo mejor entre lo posible

- Decisión con incertidumbre o riesgo
- Decisión multicriterio
- Teoría de juegos

Decisión en una etapa

- $E=\{E_1 \ldots E_m\}$: estados de la naturaleza
- $p_1 \ldots p_m$: probabilidades asociadas a los estados
- $A=\{A_1 \ldots A_n\}$: posibles decisiones
- X_{ij}: consecuencia de tomar la decisión A_i si
- ocurre el estado E_j (ganancia o coste)

- Decisión bajo riesgo: probabilidades conocidas o estimadas
- Decisión bajo incertidumbre: probabilidades desconocidas

Decisión en una etapa

- Tabla de decisión

	E_1	E_2	...	E_m	Estados
	p_1	p_2	...	p_m	Probabilidades
A_1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1m}	
A_2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2m}	Matriz de
...	...	...	...	...	pagos
A_n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nm}	

Decisiones

Decisión en una etapa

- Ejemplo 1: Un comerciante vende un artículo cuya demanda mensual puede ser 1 (con probabilidad 0.1), 2 (0.3), 3 (0.4) ó 4 (0.2). El precio de venta del artículo es de 6500 €, y el de compra 5000 €. El comerciante debe decidir cuántas unidades de dicho artículo debe comprar, teniendo en cuenta que cada unidad no vendida al finalizar el mes debe devolverla a un precio de 4000 €

Decisión en una etapa

	$E_1=1$	$E_2=2$	$E_3=3$	$E_4=4$
	$p_1=0.1$	$p_2=0.3$	$p_3=0.4$	$p_4=0.2$
$A_1=1$	1500	1500	1500	1500
$A_2=2$	500	3000	3000	3000
$A_3=3$	-500	2000	4500	4500
$A_4=4$	-1500	1000	3500	6000

Decisión en una etapa

Criterios para tomar decisiones

- Bajo riesgo:
  - Criterio de Laplace (valor esperado): Tomar la decisión que proporciona mayor ganancia media

    -Apropiado cuando el proceso se ha de repetir muchas veces

    -En el ejemplo 1 las ganancias esperadas son: 1500 € si se compra 1 unidad, 2750 € si se compran 2, 3250 € si se compran 3, y 2750 € si se compran 4. Luego la decisión a tomar bajo el criterio de Laplace es A_3: comprar 3 unidades

Decisión en una etapa

- Criterio de lo más probable: Tomar la decisión con mayor ganancia en el estado más probable

  -Apropiado cuando el proceso se presenta una vez única

  -En el ejemplo 1 el estado más probable es E_3, luego la decisión ha de ser A_3: comprar 3 unidades

Decisión en una etapa

- Criterio del estado medio: Obtener el estado o escenario medio y tomar la decisión con mayor ganancia en ese estado

  -Sólo tiene sentido si el conjunto de estados es numérico, y más apropiado cuando es un intervalo con distribución continua

  -En el ejemplo 1 el estado medio es

  EM=1x0.1+2x0.3+3x0.4+4x0.2= 2.7 que no corresponde a ningún estado. Se redondea a 3=E_3, luego la decisión ha de ser A_3: comprar 3 unidades

Decisión en una etapa

- Bajo incertidumbre:
- Criterio de Wald (maximin): Suponer para cada posible decisión que ocurrirá el peor estado, y quedarse con la decisión de mayor ganancia mínima

  -Conservador, pesimista

  -Si en vez de pagos tenemos costes → minimax

  -En el ejemplo 1 las mínimas ganancias son 1500 € para A_1, 500 € para A_2, -500 € A_3, y -1500 € para A_4. La decisión será entonces A_1: comprar 1 unidad

Decisión en una etapa

- Criterio maximax: Suponer para cada posible decisión que ocurrirá el mejor estado, y quedarse con la de mayor ganancia máxima

  -Arriesgado, optimista

  -En el ejemplo 1 las máximas ganancias son 1500 € para A_1, 3000 € para A_2, 4500 € A_3, y 6000 € para A_4. La decisión será entonces A_4: comprar 4 unidades

Decisión en una etapa

- Criterio de Hurwicz: Siendo $0 \leq \alpha \leq 1$ un índice de optimismo, valorar cada decisión mediante $\alpha \cdot \max + (1-\alpha) \cdot \min$. Adoptar la decisión mejor valorada

  -Combina las actitudes optimista y pesimista

  -Si $\alpha=0 \rightarrow$ maximin, si $\alpha=1 \rightarrow$ maximax

  -En el ejemplo 1 tomando $\alpha=0.3$, A_1 se valora con 1500 €, A_2 con 1250 €, A_3 con 1000 € y A_4 con 750. La mejor decisión es A_1: comprar 1 unidad

Decisión en una etapa

- Criterio de Savage: Construir la matriz de costes de oportunidad sustituyendo cada pago por la diferencia entre el mayor pago del estado correspondiente y el pago original. Sobre esta matriz aplicar el criterio de Wald (minimax) u otro criterio

-En el ejemplo 1 la matriz de costes de oportunidad es

	E_1	E_2	E_3	E_4
A_1	0	1500	3000	<u>4500</u>
A_2	1000	0	1500	<u>3000</u>
A_3	<u>2000</u>	1000	0	1500
A_4	<u>3000</u>	2000	1000	0

→Comprar 3 unidades

Valor esperado de la información perfecta

- ¿Cuánto está dispuesto a pagar el decisor por conocer con qué estado de la naturaleza se va a encontrar? → **VEIP**
- **VEIP** = **GEIP** **-** **GEI** siendo
- **GEIP** → Ganancia esperada con información perfecta
- **GEI** → Ganancia esperada con incertidumbre

Valor esperado de la información perfecta

- En el ejemplo 1

GEIP=1500x0.1+3000x0.3+4500x0.4+6000x0.2=4050 €

Si se toma le decisión A_3 (como indican los criterios de Laplace, más probable, estado medio y Savage)

GEI=-500x0.1+2000x0.3+4500x0.4+4500x0.2=3250 €

VEIP=4050-3250=800 €

Interpretación: El comerciante puede pagar hasta 800 € por un estudio de mercado que le garantice con qué demanda se va a encontrar

Procesos de decisión polietápicos

- Procesos secuenciales de decisión-azar
- El objetivo es determinar la secuencia de decisiones que proporcione el mejor resultado de acuerdo a algún criterio establecido (máxima ganancia esperada)
- El proceso se representa mediante un árbol de decisión

Procesos de decisión polietápicos

- El árbol de decisión se construye de izquierda a derecha (raíz a hojas)
- Vértices de decisión:
  - Parten arcos asociados a decisiones
- Vértices de azar: ○
  - Parten arcos (trazo discontinuo) asociados a estados de la naturaleza, valorados mediante su probabilidad
- Vértice inicial o raíz: o
  - Siempre es un vértice de decisión
- Vértices terminales u hojas del árbol: Δ
  - Llevan asociado un beneficio (o coste)

Procesos de decisión polietápicos

- El árbol de decisión se valora de derecha a izquierda (hojas a raíz)
- Cada vértice de azar se valora según el criterio del valor esperado (o algún otro criterio) teniendo en cuenta los valores de los vértices finales de los arcos que parten de él
- Cada vértice de decisión se valora con el valor máximo (mínimo en caso de costes) de los valores de los vértices finales de los arcos que parten de él. Las decisiones no seleccionadas se rechazan

Procesos de decisión polietápicos

- Ejemplo 2: Un vendedor ambulante se plantea en Enero ir a una feria en Septiembre o no hacerlo. Si va, ha de pedir un permiso (40000 €)

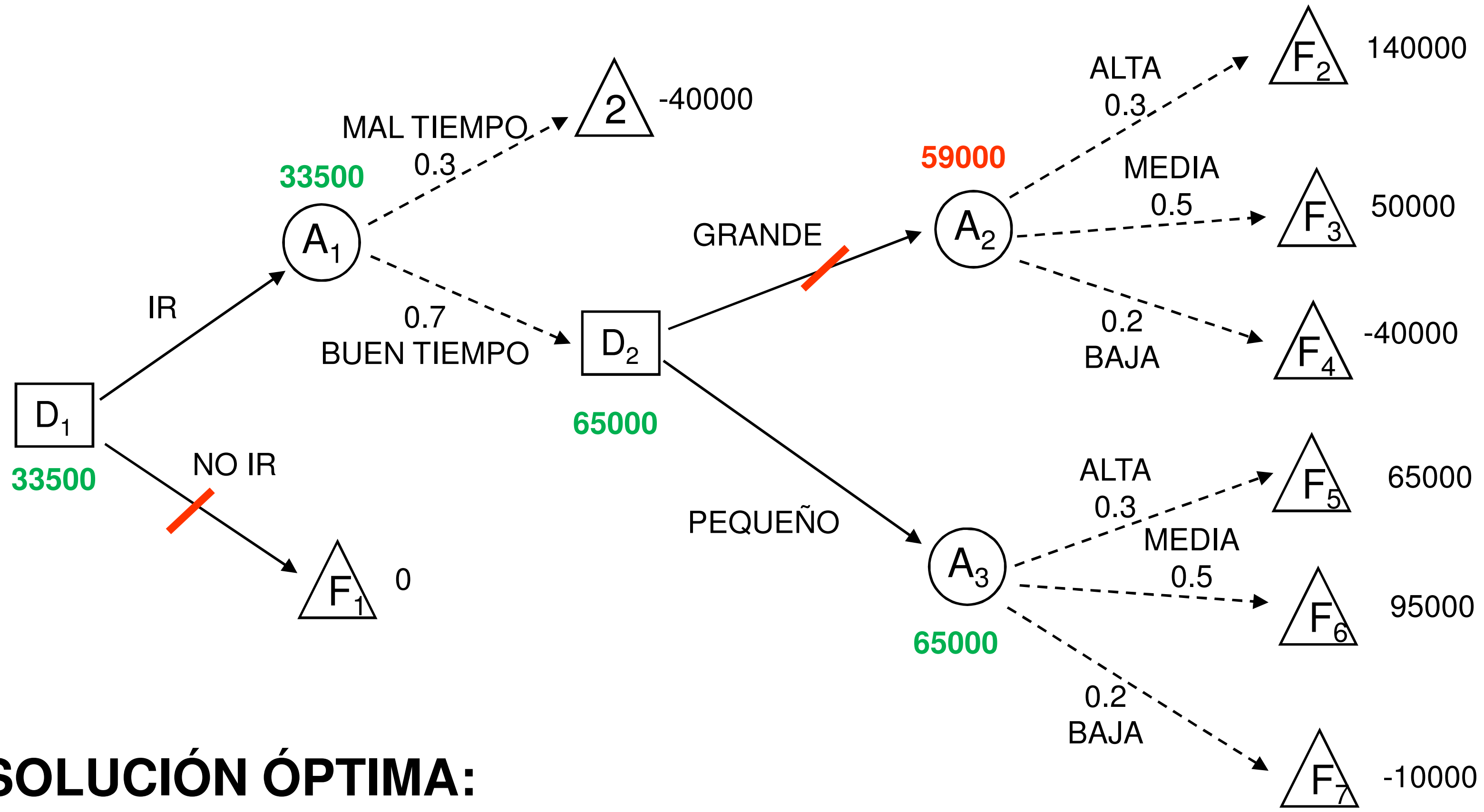
  Un mes antes de la feria sabrá si va a hacer mal tiempo (prob. 0.3), en cuyo caso prefiere no ir, o buen tiempo, en cuyo caso puede hacer dos tipos de pedido:

  - Grande: 900 unidades a 100 € la unidad, que puede vender a 300 €
  - Pequeño: 600 unidades a 125 € la unidad, que puede vender a 350 €

  La demanda puede ser de 900, 600 ó 300 unidades, con probabilidades respectivas de 0.3, 0.5 ó 0.2

  Si la demanda es mayor que la oferta, ha de rebajar en 50 € el precio de venta de cada unidad

Procesos de decisión polietápicos



SOLUCIÓN ÓPTIMA:

Pedir el permiso, y si hace buen tiempo, hacer un pedido pequeño
Ganancia esperada: 33500 €

Procesos de decisión polietápicos

- En ocasiones se puede incorporar información adicional para actualizar las probabilidades originales
- Se utiliza entonces el análisis bayesiano
- Teorema de la probabilidad total

$$P(A)=P(A/B_1)P(B_1)+ P(A/B_2)P(B_2)$$

- Teorema de Bayes

$$P(B_i/A)=P(A/B_i)P(B_i)/P(A)$$

- Conocido el suceso A se sustituye cada probabilidad a priori $P(B_i)$ por la probabilidad a posteriori $P(B_i/A)$

Procesos de decisión polietápicos

- En el ejemplo 2, suponer que el comerciante por 10000 € puede consultar a un meteorólogo antes de pedir el permiso sobre el tiempo que va a hacer en Septiembre

- Cuando hizo bueno acertó 9 de cada 10 veces

$$P(pb/B)=0.9$$

- Cuando hizo malo acertó 3 de cada 10 veces

$$P(pm/M)=0.3$$

- Con estos nuevos datos el comerciante debe decidir previamente si consultar al meteorólogo

Procesos de decisión polietápicos

- Probabilidades a priori: $P(B)=0.7$ $P(M)=0.3$
- Teorema de la probabilidad total:

$$P(pb)=P(pb/B)P(B)+P(pb/M)P(M)=0.9x0.7+0.7x0.3=0.84$$

$$P(pm)=1-P(pb)=1-0.84=0.16$$

- Teorema de Bayes:

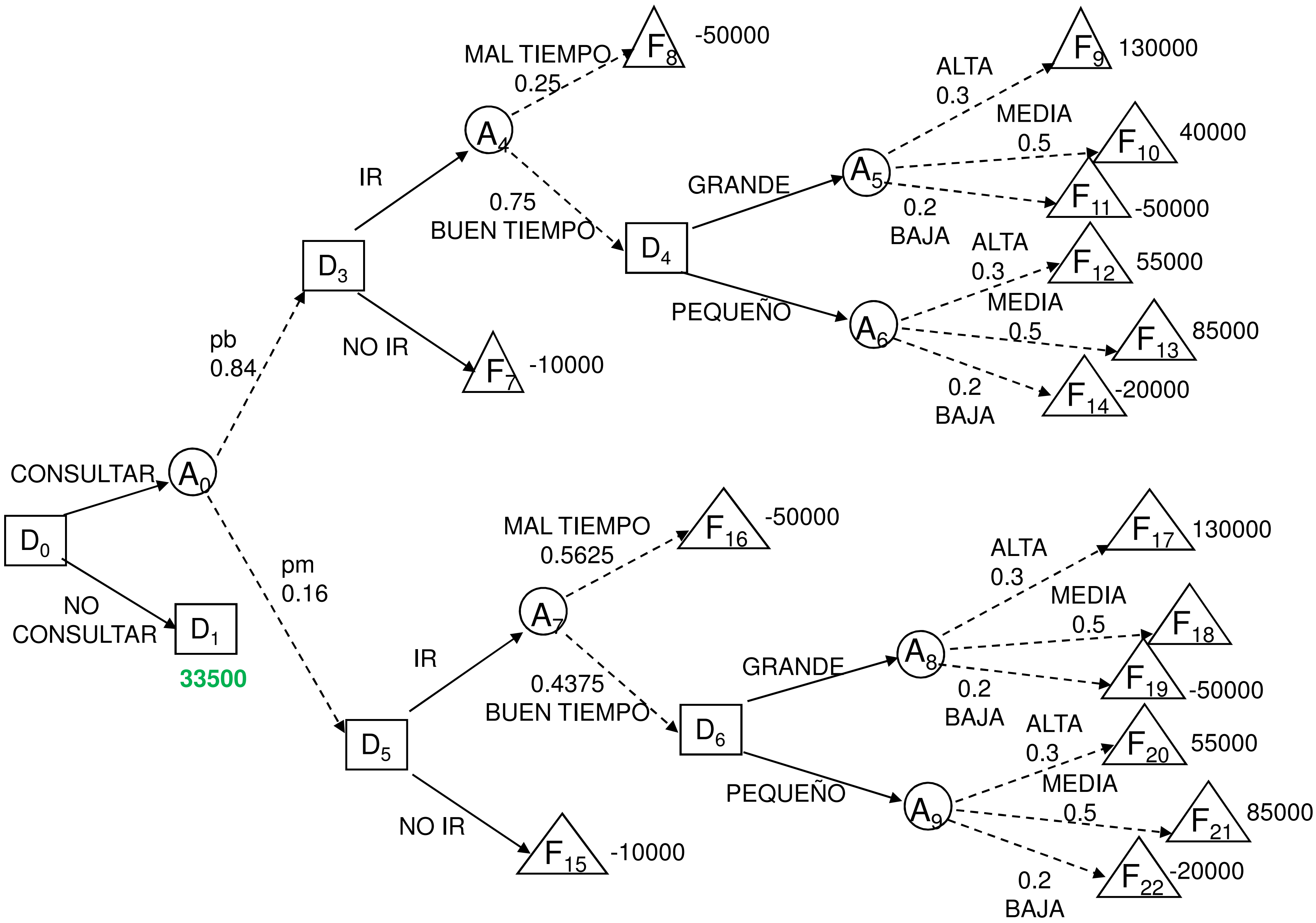
$$P(B/pb)=P(pb/B)P(B)/P(pb)=0.9x0.7/0.84=0.75$$

$$P(M/pb)=1-P(B/pb)=1-0.75=0.25$$

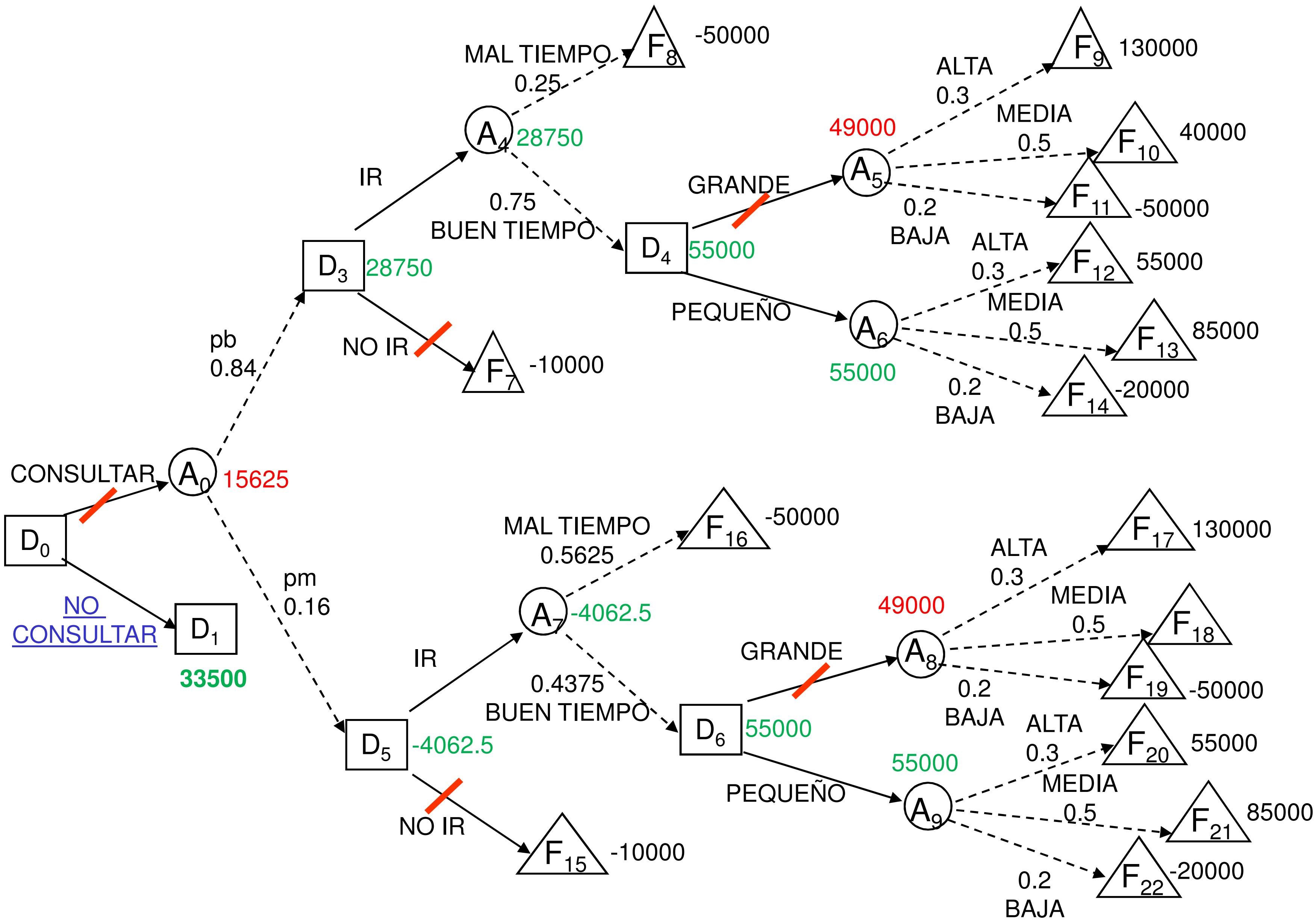
$$P(B/pm)=P(pm/B)P(B)/P(pm)=0.1x0.7/0.16=0.4375$$

$$P(M/pm)=1-P(B/pm)=1-0.4375=0.5625$$

Procesos de decisión polietápicos



Procesos de decisión polietápicos



Función de utilidad

- Función de utilidad se utiliza cuando:
  - Valoraciones subjetivas no cuantificables
  - Valoración no proporcional al beneficio