UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Programación dinámica

José María Ferrer Caja
Universidad Pontificia Comillas

Introducción

- La programación dinámica estudia un conjunto de problemas de optimización y la herramienta matemática para resolverlos
- Engloba problemas secuenciales en los que hay que adoptar decisiones en etapas sucesivas con el fin de optimizar una función objetivo
- Se trata de elaborar una política o estrategia que englobe las decisiones a tomar en cada uno de los posibles estados del sistema
- La decisión a adoptar en cada etapa debe tener en cuenta el estado actual y los costes que se deriven en las sucesivas etapas

Elementos

- Etapas o fases en que se divide el horizonte temporal
- Variables de estado x_k: Representan las situaciones que puede presentar el sistema en cada etapa k
- Variables de control u_k: Representan las decisiones que pueden adoptarse en cada etapa k
- Ligaduras $g(x_k, u_k)=0$: Restricciones que relacionan las variables en cada etapa
- Transiciones $x_{k+1}= \varphi(x_k, u_k)$: Indica como se pasa de una etapa a la siguiente
- Política o Estrategia: Secuencia de decisiones para cada una de las etapas y cada uno de los estados
- Función de costes f: Evalúa las decisiones particulares y las políticas completas

Principio de optimalidad de Bellman

- Toda política óptima debe estar formada por subpolíticas óptimas
  - ✓ Cualquier subsecuencia de una secuencia óptima de decisiones es también óptima para el subproblema correspondiente
  - ✓ Dado un estado cualquiera, la política óptima para las siguientes etapas no depende de las decisiones pasadas
  - ✓ Toda la información sobre el pasado está resumida en el estado en el que se encuentra el sistema

- El principio de optimalidad de Bellman es la base de la metodología de la programación dinámica: Uso de la recursión

Planteamiento general de un problema aditivo

$$\min_{u_k} J = f_0(x_0) = \sum_{k=0}^{N} c_{x_k u_k}$$
$$x_{k+1} = \phi_k(x_k, u_k)$$
$$g_k\left(x_k, u_k\right) = 0$$
$$x_k \in X_k,\ u_k \in U_k$$

- ✓ $c_{x_k u_k}$ Coste de adoptar la decisión u_k en el estado x_k de la etapa k
- ✓ $f_0(x_0)$ Coste acumulado desde el estado inicial x_0
- ✓ $g_k\left(x_k, u_k\right) = 0$ Ecuaciones de ligadura en la etapa k
- ✓ $x_{k+1} = \phi_k(x_k, u_k)$ Ecuaciones de transición entre etapas consecutivas
- ✓ X_k Conjunto de estados posibles en la etapa k
- ✓ U_k Conjunto de decisiones posibles en la etapa k

Recursión hacia atrás para un problema aditivo

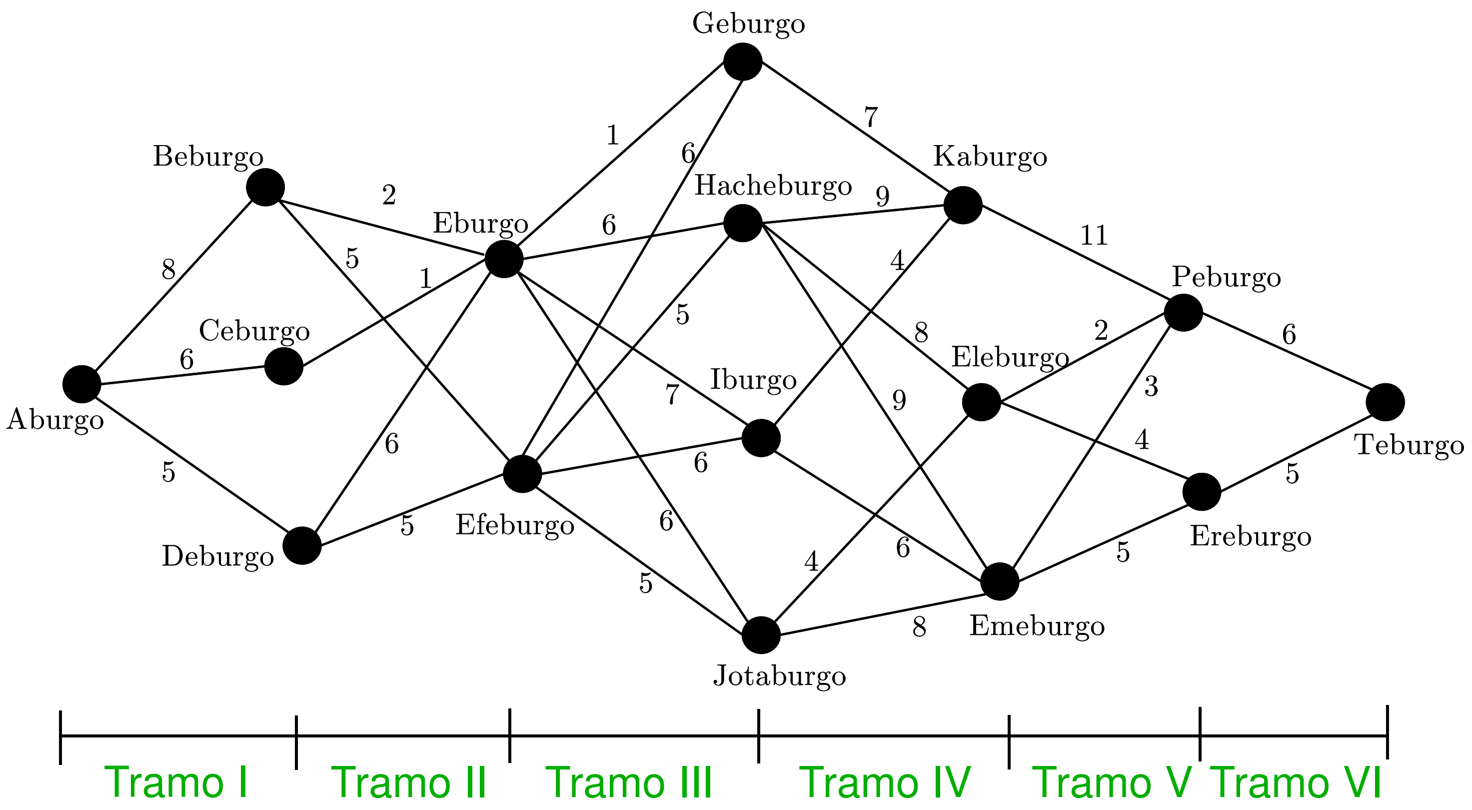
$$f_k^*(x_k) = \min_{u_k} \left\{ c_{x_k u_k} + f_{k+1}^*(x_{k+1}) \right\}$$

- ✓ Planteamiento para obtener la política óptima desde el estado x_k de la etapa k conociendo los costes de las políticas óptimas desde todos los estados que se puedan alcanzar en la siguiente etapa
- ✓ De forma análoga se plantea la recursión hacia atrás

Clasificación de problemas

- Según el grado de certidumbre de estados y costes
  - Determinista o estocástico
- Según el tipo de variables de estado
  - Variables discretas o continuas
- Según el número de etapas
  - Finito o infinito
- Según la función de coste
  - Aditivo, multiplicativo, etc.
- Según el procedimiento de recursión empleado
  - Recursión hacia adelante o hacia atrás

Ejemplo de camino mínimo (1)



- Se trata de obtener el camino (compuesto por 6 tramos) más corto entre las ciudades Aburgo (A) y Teburgo (T)
- Las distancias entre ciudades aparecen en la red

Ejemplo de camino mínimo (2)

- Elementos del problema:
  - ✓ Conjunto de etapas → {0,1,2,3,4,5,6}
  - ✓ Variables de estado → $x_0 \in \{A\}$, $x_1 \in \{B,C,D\}$, $x_2 \in \{E,F\}$, $x_3 \in \{G,H,I,J\}$, $x_4 \in \{K,L,M\}$, $x_5 \in \{P,R\}$, $x_6 \in \{T\}$
  - ✓ Coste del tramo k → $c_k(x_{k-1}, x_k)$
  - ✓ Coste del camino mínimo hasta la ciudad Y → g(Y)
  - ✓ Función de coste global

$$G\left(x_0, x_1, \ldots, x_6\right) = \sum_{k=1}^{6} c_k\left(x_{k-1}, x_k\right)$$

- Resolveremos el problema por recursión hacia adelante, calculando los caminos mínimos desde la ciudad A hasta cada una de las demás ciudades.
- El proceso finalizará cuando lleguemos a la ciudad T

Ejemplo de camino mínimo (3)

- Etapa 1

Calculamos los caminos mínimos hasta las ciudades del tramo 1

$$g(B) = 8; \quad g(C) = 6; \quad g(D) = 5$$

- Etapa 2

Calculamos los caminos mínimos hasta las ciudades del tramo 2

$$\begin{aligned} g(E) &= \min_{x_1}\left[g(x_1) + c_2(x_1, E)\right] \\ &= \min\left[g(B) + c_2(B,E), g(C) + c_2(C,E), g(D) + c_2(D,E)\right] = \\ &= \min\left[8+2, 6+1, 5+6\right] = 7 \quad \Rightarrow ACE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(F) &= \min_{x_1}\left[g(x_1) + c_2(x_1, F)\right] \\ &= \min\left[g(B) + c_2(B,F), g(C) + c_2(C,F), g(D) + c_2(D,F)\right] = \\ &= \min\left[8+5, 6+\infty, 5+5\right] = 10 \quad \Rightarrow ADF \end{aligned}$$

Ejemplo de camino mínimo (4)

- Etapa 3

$$g(G) = \min_{x_2}\left[g(x_2) + c_3(x_2, G)\right] =$$
$$= \min\left[g(E) + c_3(E,G), g(F) + c_3(F,G)\right] =$$
$$= \min\left[7+1, 10+6\right] = 8 \quad \Rightarrow ACEG$$
$$g(H) = 13 \quad \Rightarrow ACEH$$
$$g(I) = 14 \quad \Rightarrow ACEI$$
$$g(J) = 13 \quad \Rightarrow ACEJ$$

- Etapa 4

$$g(K) = 15 \quad \Rightarrow ACEGK$$
$$g(L) = 17 \quad \Rightarrow ACEJL$$
$$g(M) = 20 \quad \Rightarrow ACEIM$$

Ejemplo de camino mínimo (5)

- Etapa 5

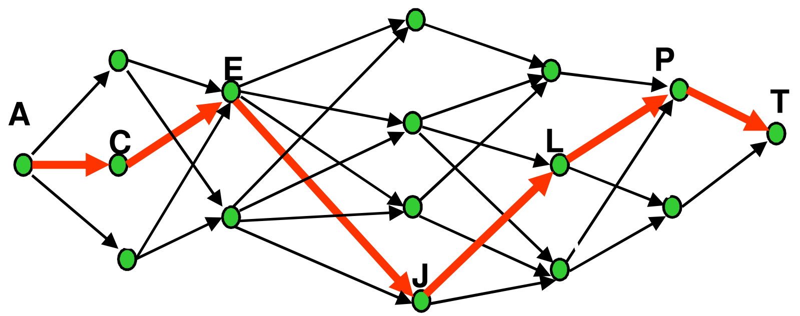
$$g(P) = 19 \quad \Rightarrow ACEJLP$$
$$g(R) = 21 \quad \Rightarrow ACEJLR$$

- Etapa 6

Para terminar, calculamos el camino mínimo hasta la ciudad T

$$G^*\left(T\right) = \min G\left(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\right) = \min_{x_5}\left[g(x_5) + c_6\left(x_5, T\right)\right]$$
$$= \min\left[g(P) + c_6\left(P, T\right), g(R) + c_6\left(R, T\right)\right] = \min\left[19 + 6, 21 + 5\right] = 25$$

El camino mínimo es la secuencia ACEJLPT, con coste total 25



Modelos de asignación unidimensional

- El objetivo es determinar la forma óptima de repartir un recurso K entre diversas actividades x_1, x_2, …, x_n

$$\max F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f_1\left(x_1\right) + f_2\left(x_2\right) + \ldots + f_n\left(x_n\right)$$

$$\text{sujeto a}$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = K;$$

$$x_i \geq 0 \ \forall i$$

  - ✓ $f_i\left(x_i\right)$ beneficio o ingreso por asignar x_i unidades de recurso a la i-ésima actividad

- Hipótesis
  - ✓ Los ingresos procedentes de distintas actividades pueden ser medidos con una misma unidad
  - ✓ El ingreso total es la suma de los ingresos de cada actividad
  - ✓ El ingreso procedente de una actividad es independiente de las decisiones practicadas en las otras actividades

Modelos de asignación. Ejemplo (1)

- Una empresa quiere promocionar un producto en cuatro zonas: I, II, III y IV. Dispone de 9 millones para invertir en publicidad
- Se conocen en cada zona las ganancias correspondientes a cada una de las posibles inversiones

Inversión	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zona I	0	0.5	0.6	0.8	1.1	1.3	1.4	1.46	1.5	1.52
Zona II	0	0.4	0.48	0.6	0.78	0.91	1	1.05	1.1	1.1
Zona III	0	0.6	0.71	0.9	1.08	1.26	1	1.48	1.6	1.6
Zona IV	0	0.3	0.45	0.7	0.85	0.95	1.02	1.07	1.13	1.13

- A cada zona se le debe asignar una cantidad entera de millones

Modelos de asignación. Ejemplo (2)

- f_i (x_i) → ganancia obtenida en la zona i con una inversión de x_i millones
- Se trata de maximizar el beneficio total:

$$F\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = f_1\left(x_1\right) + f_2\left(x_2\right) + f_3\left(x_3\right) + f_4\left(x_4\right)$$

- Se deben verificar las restricciones

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \ ; \ \ x_i \geq 0, \ \ x_i \in \mathbb{Z}$$

- y_i → inversión acumulada en las i primeras zonas. Se cumple

$$x_i = y_i - y_{i-1}$$

- La función objetivo se puede expresar como

$$F\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right) = f_1\left(y_1\right) + f_2\left(y_2 - y_1\right) + f_3\left(y_3 - y_2\right) + f_4\left(9 - y_3\right)$$

- g_i (y_i) → ganancia acumulada (óptima) hasta la zona i para una inversión acumulada y_i

Modelos de asignación. Ejemplo (3)

- Para la resolución se usa un algoritmo recursivo (hacia adelante)
- Inicialización: $g_0(y_0) = 0 \ , \ y_0 = 0$
- Ley recursiva para la zona i

$$g_i(y_i) = \max_{0 \le y_{i-1} \le y_i} \left[g_{i-1}(y_{i-1}) + f_i(y_i - y_{i-1}) \right]$$

$$g_4(9) = \max_{0 \le y_3 \le 9} \left[g_3(y_3) + f_4(9 - y_3) \right]$$ (Zona IV)

- Tabla de beneficios óptimos para las zonas I y II

y_1, x_2, y_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g_1(y_1)=f_1(x_1)$	0	0.5	0.6	0.8	1.1	1.3	1.4	1.46	1.5	1.52
$f_2(x_2)=f_2(y_2-y_1)$	0	0.4	0.48	0.6	0.78	0.91	1	1.05	1.1	1.1
$g_2(y_2)$	0	0.5	0.9	1	1.2	1.5	1.7	1.8	1.9	2.08
Política óptima para las zonas I y II	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(5,3)	(5,4)

Modelos de asignación. Ejemplo (4)

Por ejemplo, $g_2(3)$ se ha obtenido:

$$g_2(3) = \max\left[g_1(0) + f_2(3), g_1(1) + f_2(2), g_1(2) + f_2(1), g_1(3) + f_2(0)\right] =$$
$$= \max[0 + 0.6,\ 0.5 + 0.48,\ \boxed{0.6 + 0.4},\ 0.8 + 0] = 1$$

- Tabla de beneficios óptimos para las zonas I, II y III

y_2, x_3, y_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g_2(y_2)$	0	0.5	0.9	1	1.2	1.5	1.7	1.8	1.9	2.08
$f_3(x_3)=f_3(y_3-y_2)$	0	0.6	0.71	0.9	1.08	1.26	1.4	1.48	1.6	1.6
$g_3(y_3)$	0	0.6	1.1	1.5	1.61	1.8	2.1	2.3	2.41	2.6
Política óptima para las zonas I y II	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(5,3)	(5,4)
Política óptima para las zonas I, II y III	(0,0,0)	(0,0,1)	(1,0,1)	(1,1,1)	(1,1,2)	(3,1,1)	(4,1,1)	(5,1,1)	(5,1,2)	(5,1,3)

Modelos de asignación. Ejemplo (5)

Por ejemplo, $g_3(3)$ se ha obtenido:

$$g_3(3) = \max\left[g_2(0) + f_3(3), g_2(1) + f_3(2), g_2(2) + f_3(1), g_2(3) + f_3(0)\right] =$$
$$= \max[0 + 0.9,\ 0.5 + 0.71,\ \boxed{0.9 + 0.6},\ 1 + 0] = 1.5$$

- Tabla de beneficios óptimos para las 4 zonas

y_3, x_4, y_4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g_3(y_3)$	0	0.6	1.1	1.5	1.61	1.8	2.1	2.3	2.41	2.6
$f_4(x_4)=f_4(y_4-y_3)$	0	0.3	0.45	0.7	0.85	0.95	1.02	1.07	1.13	1.13
$g_4(y_4)$										**2.8**
Política óptima para las zonas I, II y III	(0,0,0)	(0,0,1)	(1,0,1)	(1,1,1)	(1,1,2)	(3,1,1)	(4,1,1)	(5,1,1)	(5,1,2)	(5,1,3)
Política óptima										**(4,1,1,3)**

✓ Como los ingresos son positivos, interesa repartir los 9 millones. No ha sido necesario calcular los beneficios obtenidos repartiendo menos

Modelos de asignación. Ejemplo (6)

- La solución óptima consiste en asignar 4 millones a la zona I, 1 millón a las zonas II y III y 3 millones a la zona IV
- El beneficio es de 2.8

- El número de políticas posibles para este problema es

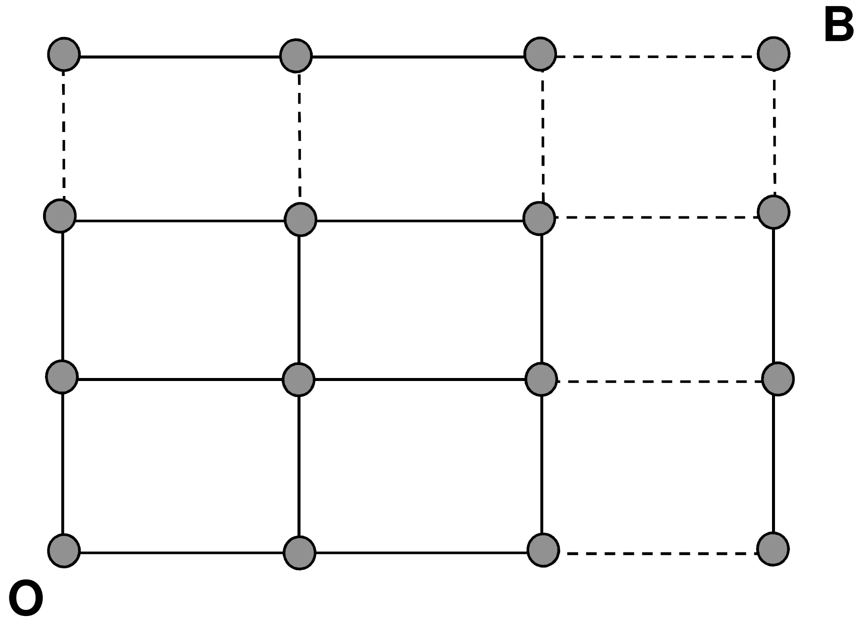
$$CR_{4,9} = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9} = 220$$

- Para el problema general de asignación

$$CR_{n,K} = \binom{n+K-1}{K}$$

Caminos óptimos sobre redes Manhattan. Planteamiento

- El objetivo es encontrar el camino de longitud mínima(o tiempo mínimo) entre 2 puntos situados en los extremos SO y NE de una red cuadrada m x n



- En cada etapa el movimiento ha de ser hacia la derecha o hacia arriba

Caminos óptimos sobre redes Manhattan. Nomenclatura y algoritmo recursivo

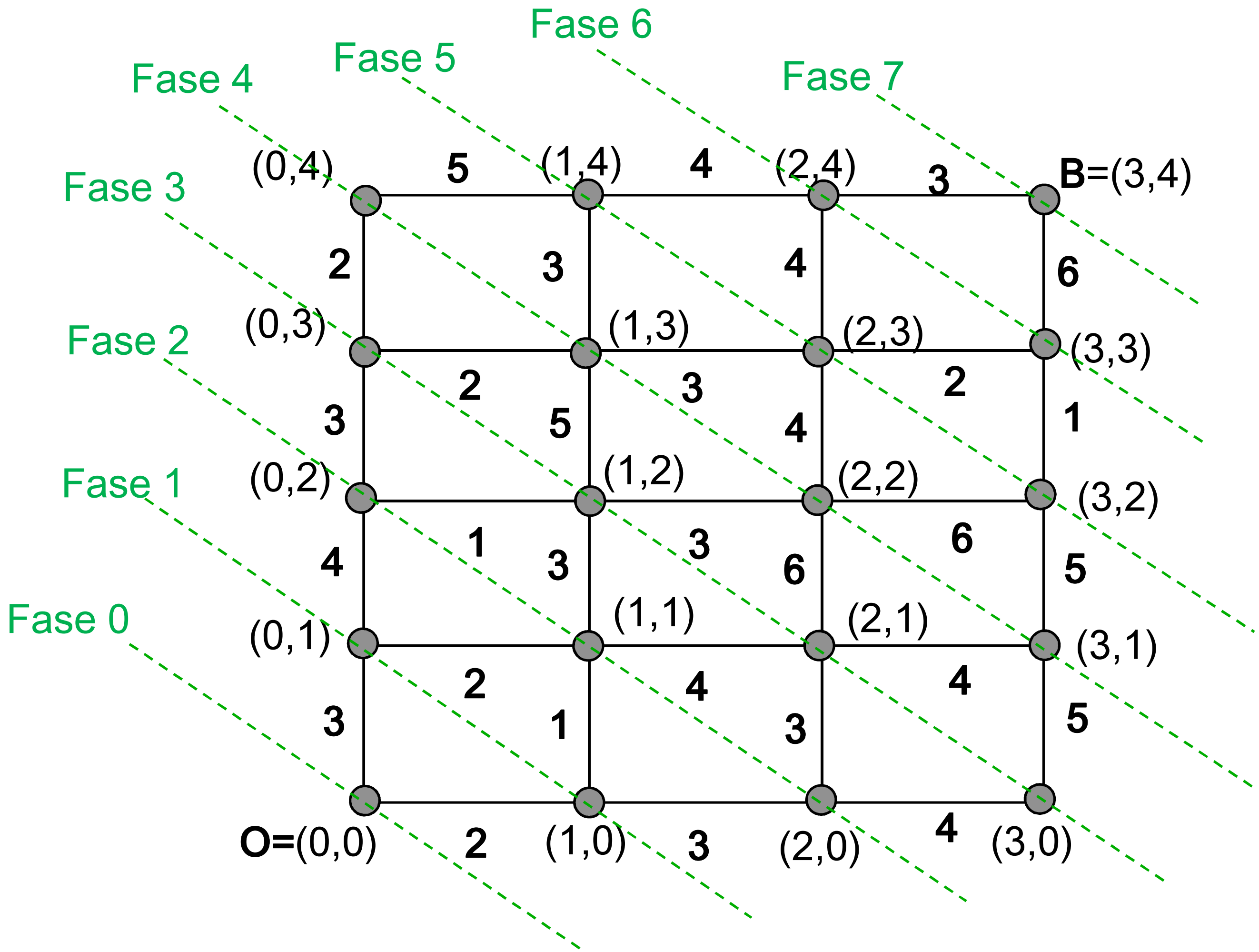
- A(i,j) → tiempo en recorrer el tramo ascendente del nodo (i,j-1) al nodo (i,j)
- D(i,j) → tiempo en recorrer el tramo horizontal del nodo (i-1,j) al nodo (i,j)
- t(i,j) → tiempo mínimo empleado desde O al nodo (i,j)
- El problema tiene m+n fases
- En cada fase k los estados posibles son los nodos (i,j) que cumplen i +j=k
- Los tiempos t(i,j) se calculan recursivamente mediante las fórmulas

$$\underset{i+j=k}{t\left(i,j\right)} = \begin{cases} \min\left[t\left(i-1,j\right)+D\left(i,j\right), t\left(i,j-1\right)+A\left(i,j\right)\right], & j \neq 0, i \neq 0 \\ t\left(i-1,j\right)+D\left(i,j\right), & \text{si } j=0 \\ t\left(i,j-1\right)+A\left(i,j\right), & \text{si } i=0 \end{cases}$$

$$t(0,0) = t(O) = 0$$

- El problema estará resuelto cuando se calcule t(m,n)

Caminos óptimos sobre redes Manhattan. Ejemplo (1)



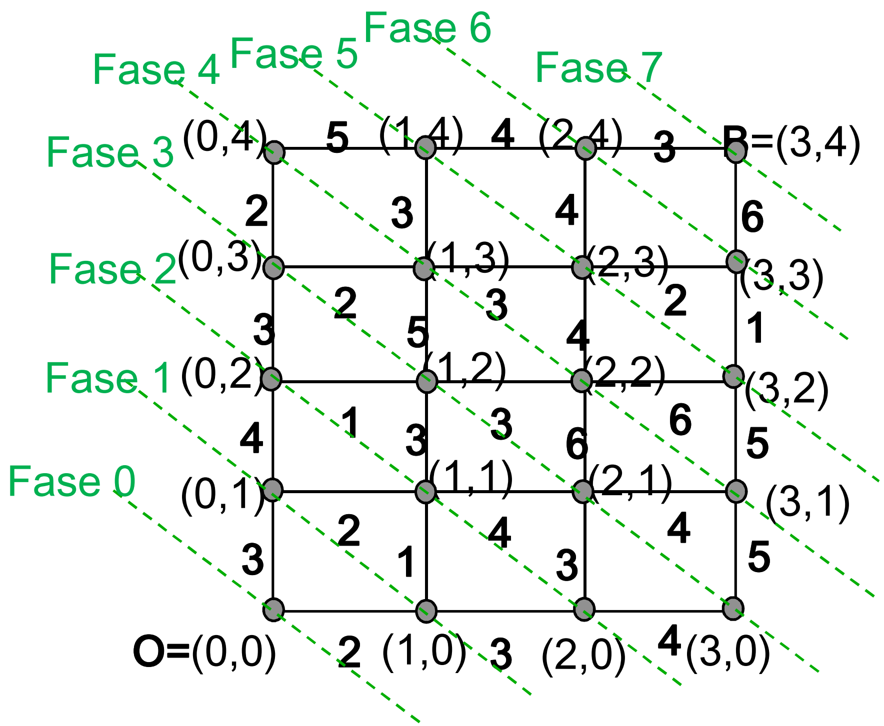
Caminos óptimos sobre redes Manhattan. Ejemplo (2)

- Aplicación del algoritmo recursivo (hacia adelante)

Fase 1	Vértice	t(i,j)	Decisión
	(0,1)	3	A (arriba)
	(1,0)	2	D (derecha)

Fase 2	Vértice	t(i,j)	Decisión
	(0,2)	7	A
	(1,1)	3	A
	(2,0)	5	D

Fase 3	Vértice	t(i,j)	Decisión
	(0,3)	10	A
	(1,2)	6	A
	(2,1)	7	D
	(3,0)	9	D



Por ejemplo:

$$t(2,1) = \min\left[t(1,1) + D(2,1), t(2,0) + A(2,1)\right] =$$
$$\min\left[\boxed{3+4}, 5+3\right] = 7$$

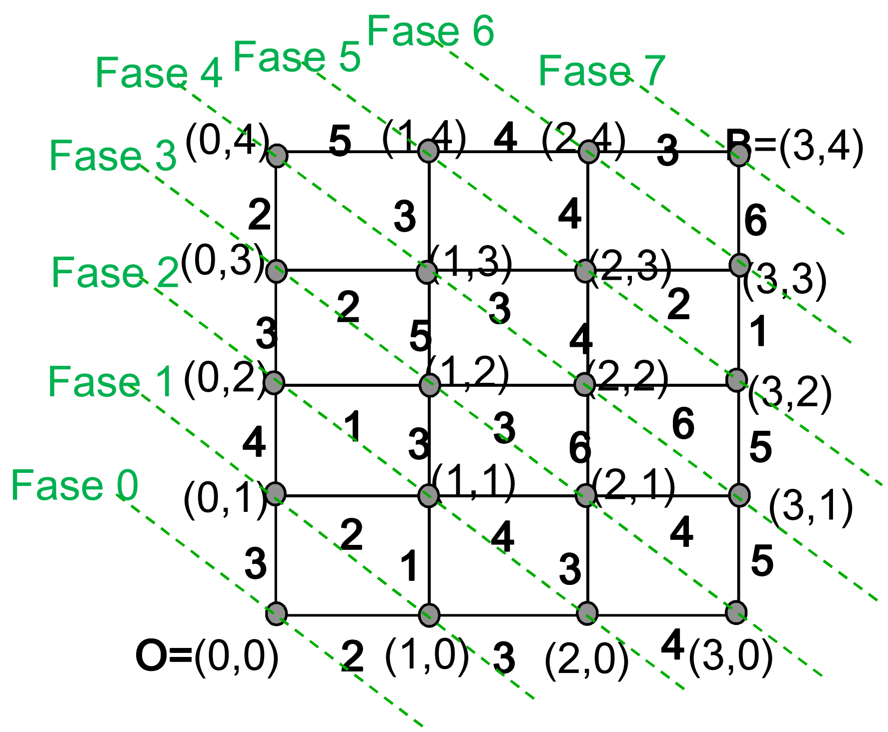
Caminos óptimos sobre redes Manhattan. Ejemplo (3)

Fase 4	Vértice	t(i,j)	Decisión
	(0,4)	12	A
	(1,3)	11	A
	(2,2)	9	D
	(3,1)	11	D

Fase 5	Vértice	t(i,j)	Decisión
	(1,4)	14	A
	(2,3)	13	A
	(3,2)	15	D

Fase 6	Vértice	t(i,j)	Decisión
	(2,4)	17	A
	(3,3)	15	D

Fase 7	Vértice	t(i,j)	Decisión
	(3,4)	20	D

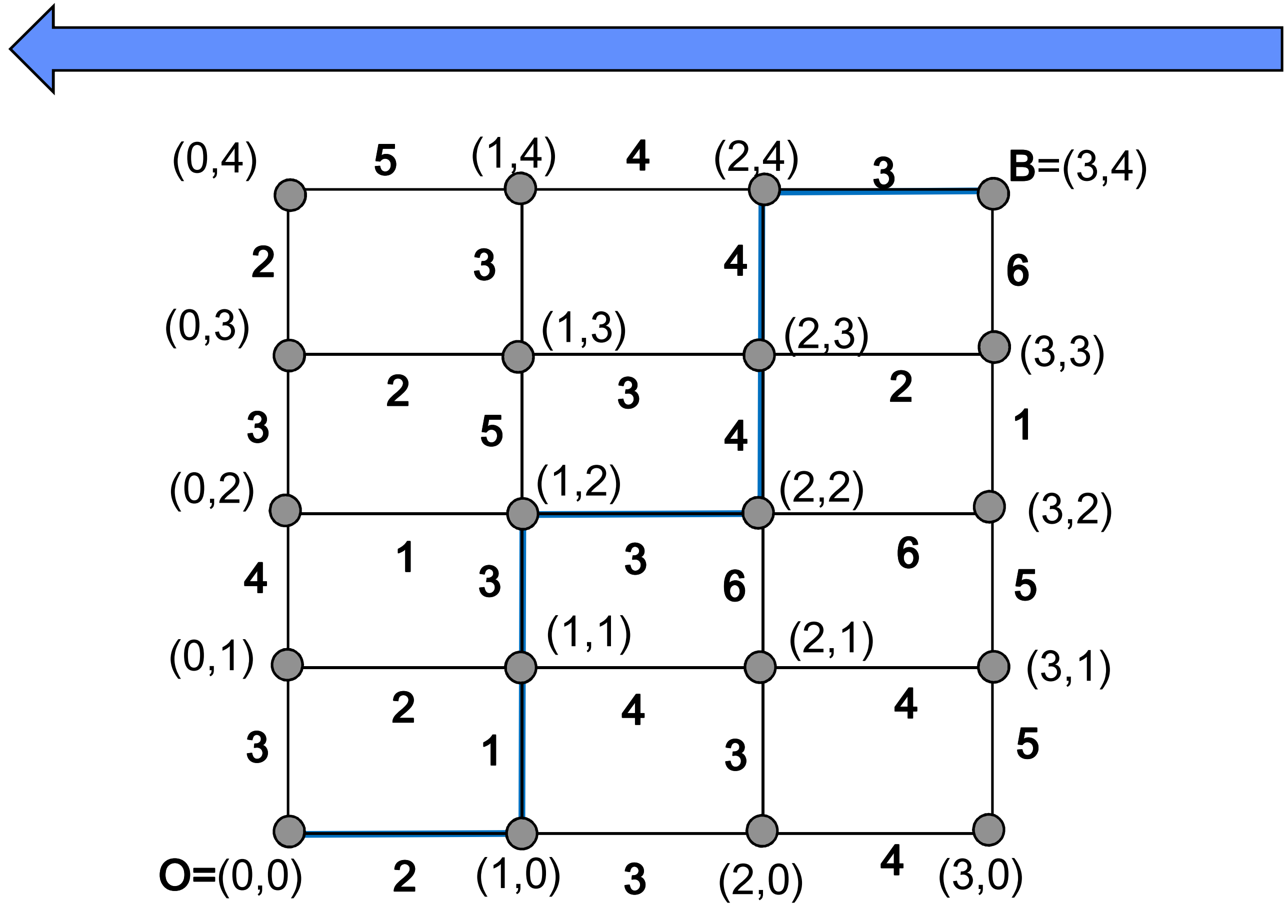


$$t(3,4) = \min\left[t(2,4) + D(3,4), t(3,3) + A(3,4)\right] = \min\left[\boxed{17+3}, 15+6\right] = 20$$

Caminos óptimos sobre redes Manhattan. Ejemplo (4)

- La solución óptima se reconstruye desde el final al principio:

  (3,4) D (2,4) A (2,3) A (2,2) D (1,2) A (1,1) A (1,0) D (0,0)



UNIVERSIDAD PONTIFICIA ICAI ICADE COMILLAS MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Caminos óptimos sobre redes Manhattan. Eficiencia del algoritmo

- El número de caminos posibles en la red es

$$C_{m+n,m} = \binom{m+n}{m}$$

  - ✓ Para el ejemplo hay 35 caminos
- Cada camino requiere m+n–1 operaciones básicas, para comparar los caminos se necesitan $C_{m+n,m}$-1 operaciones
  - ✓ En el ejemplo, 35 x 6 = 210 operaciones más 34 comparaciones= 244
- Con el algoritmo recursivo propuesto, hay que analizar todos los nodos menos el inicial, (m+1)x(n+1)-1 nodos
- En cada nodo con i=0 o j=0 se realiza 1 operación (1 suma)
- En el resto de nodos se realizan 3 operaciones (2 sumas y una comparación)
  - ✓ En el ejemplo, 5x4-1=19 nodos a evaluar
  - ✓ En 7 de ellos, 1 operación → 7 operaciones
  - ✓ En 12 de ellos, 3 operaciones → 36 operaciones
  - ✓ En total: 43 operaciones básicas