



# Utilización de la IO en la actuación en mercados eléctricos competitivos

**Andrés Ramos**

**Universidad Pontificia Comillas, Madrid**

**28 de marzo de 2004**

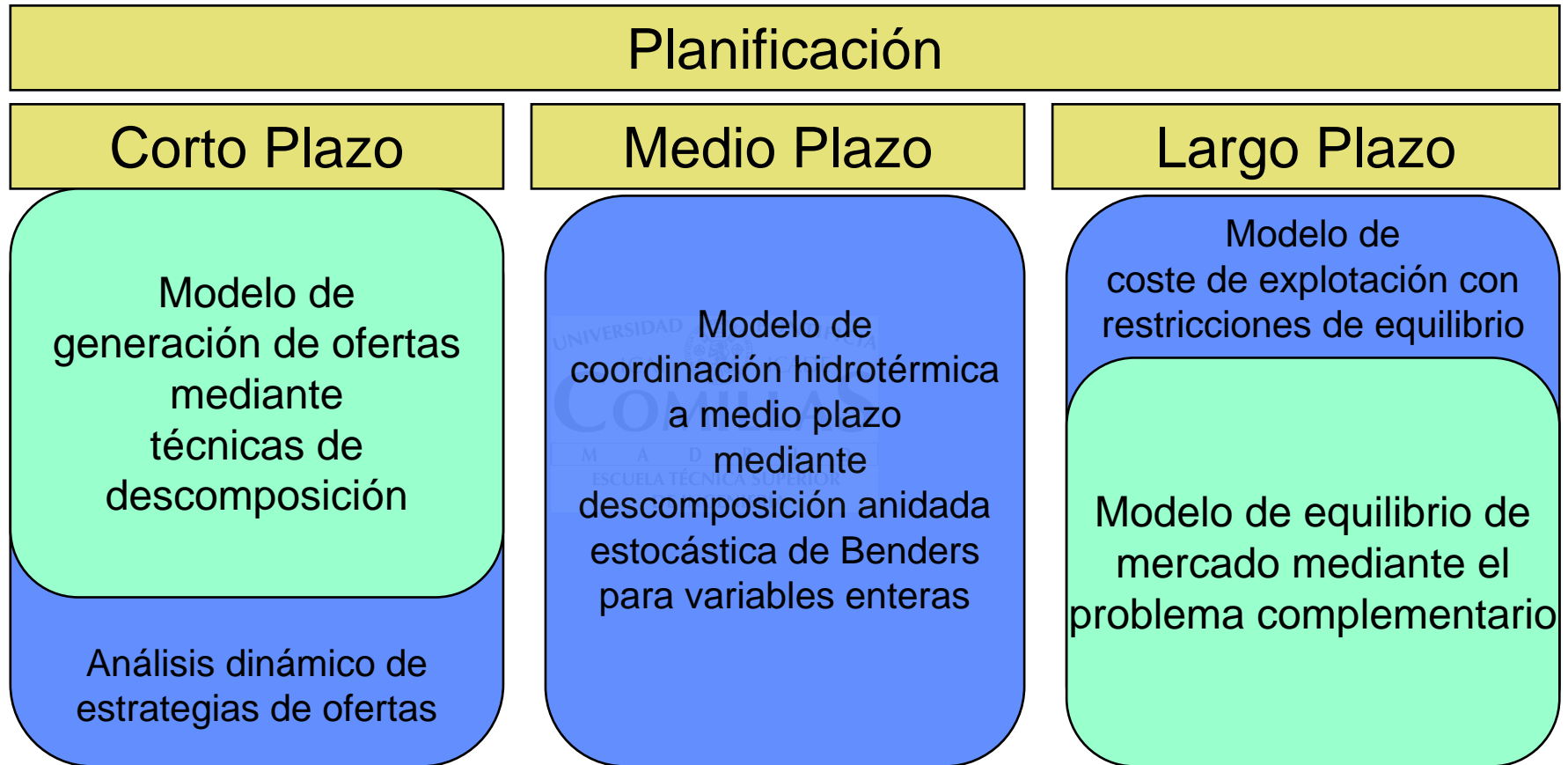
# Equipo de trabajo

---

- Álvaro Baíllo
- Santiago Cerisola
- Jesús María Latorre
- Michel Rivier
- Mariano Ventosa
- Begoña Vitoriano



# Líneas de trabajo



# Contenido

1. Modelo de coste de explotación a medio plazo con restricciones de equilibrio
2. Modelo de equilibrio de mercado mediante el problema complementario
3. Modelo de generación de ofertas mediante técnicas de descomposición
4. Análisis dinámico de estrategias de ofertas
5. Modelo de coordinación hidrotérmica a medio plazo mediante descomposición anidada estocástica de Benders para variables enteras

# Modelo de coste de explotación a medio plazo con restricciones de equilibrio

## ➤ Publicaciones

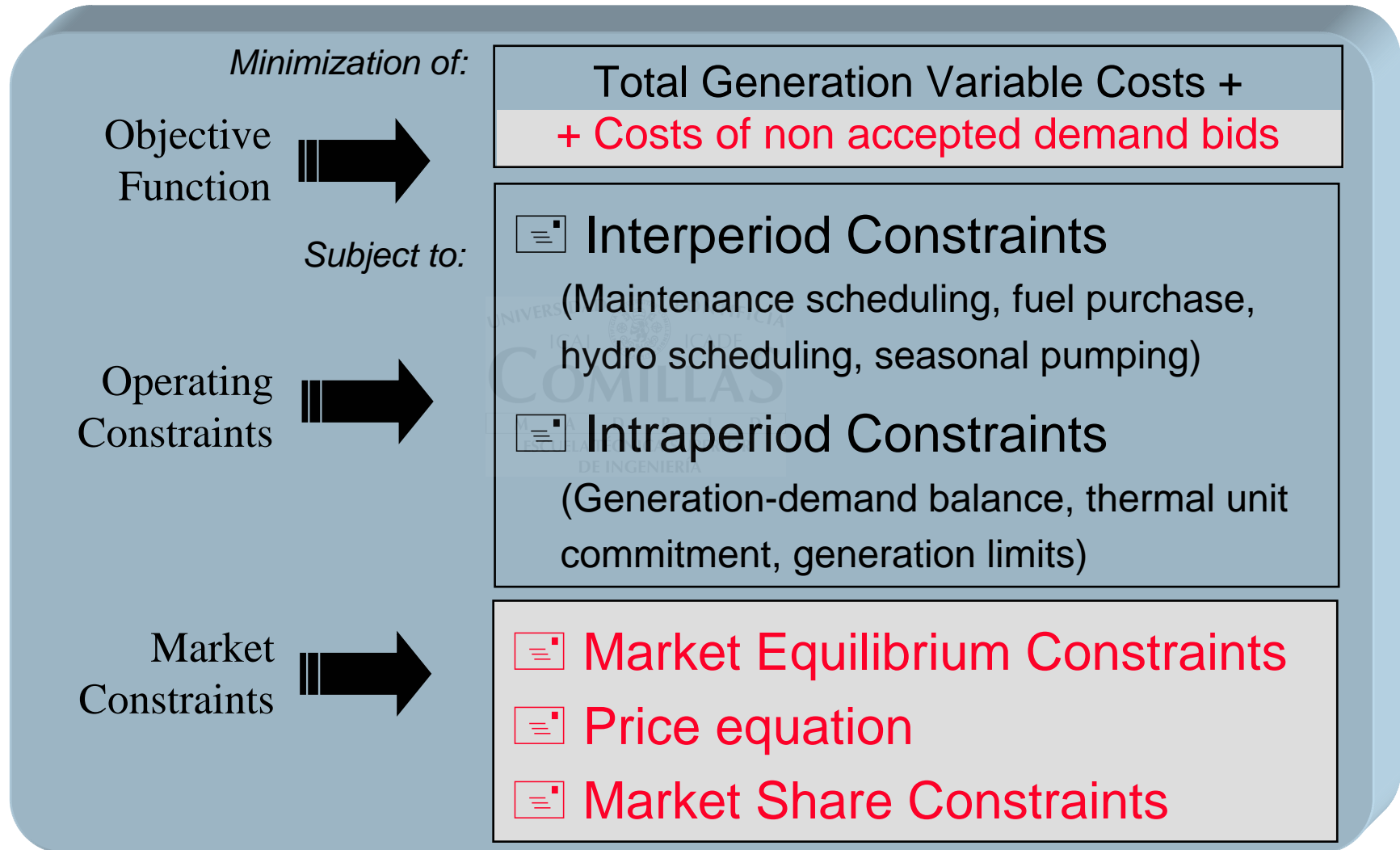
- ✓ A. Ramos, M. Ventosa, M. Rivier, A. Santamaría *An Iterative Algorithm for Profit Maximization by Market Equilibrium Constraints* 14th Power Systems Computation Conference (PSCC '02) Seville, Spain June 2002
- ✓ A. Ramos, M. Ventosa, M. Rivier *Modeling competition in electric energy markets by equilibrium constraints* Utilities Policy Vol 7 (4) pp. 233-242 April 1998

ESCUOLA TÉCNICA SUPERIOR  
DE INGENIERÍA

# Model Description

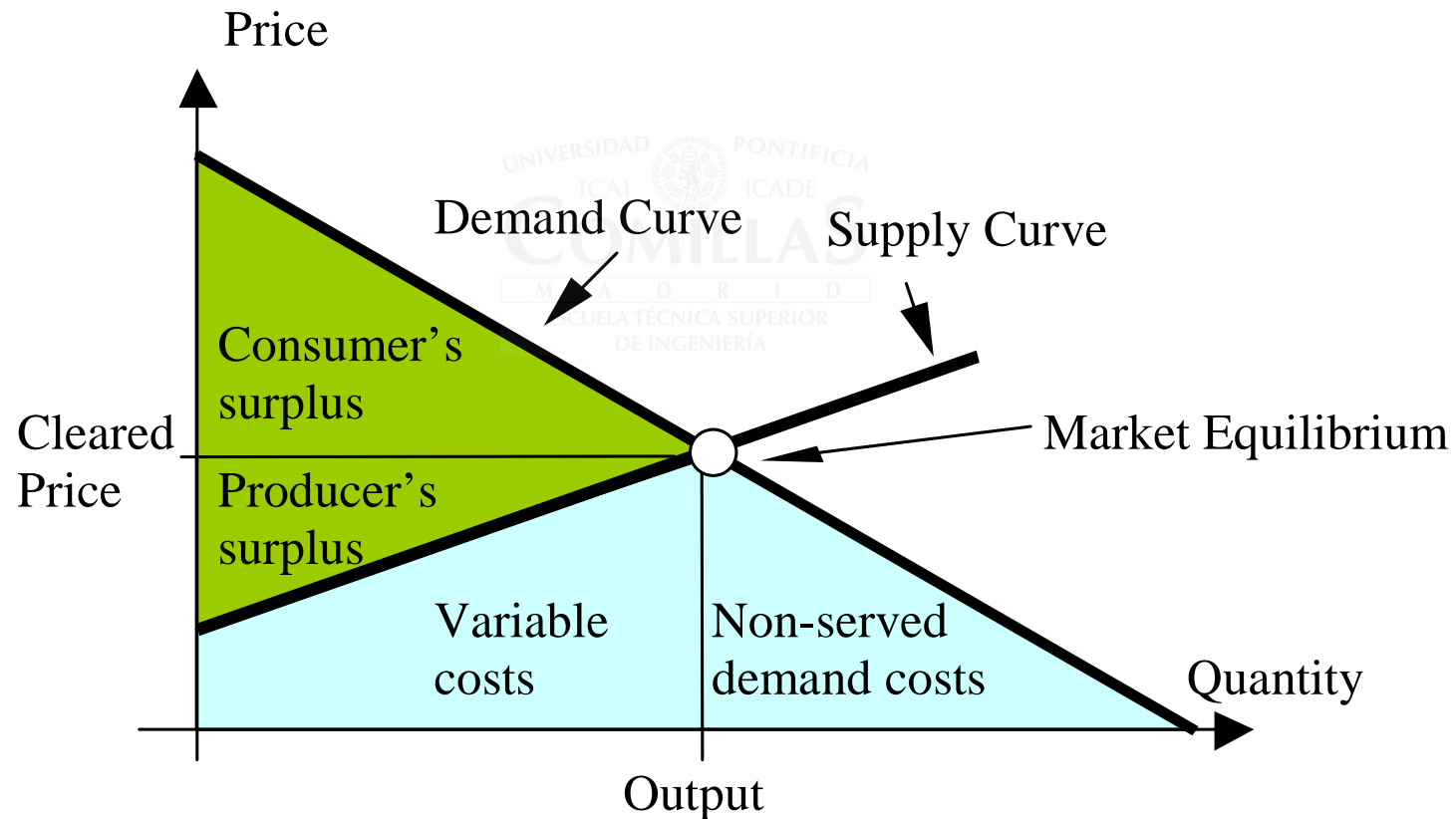
- Based on a detailed production cost model
  - ✓ Detailed representation of operation constraints
  - ✓ Decision variables are generator output levels
  - ✓ Determine the cheapest **commitment** and operation of the **hydrothermal** system
- **Market equilibrium** among firms represented by a set of **additional constraints**. By these constraints each **strategic agent maximizes its profit** (revenues minus costs)
  - ✓ Determine the output level for each strategic firm
- **Advantage:**
  - ✓ use of any available production cost model (PCM)
- **Drawback:**
  - ✓ market equilibrium constraints depend on SMP, not directly obtained from a PCM

# Production cost model with market equilibrium constraints



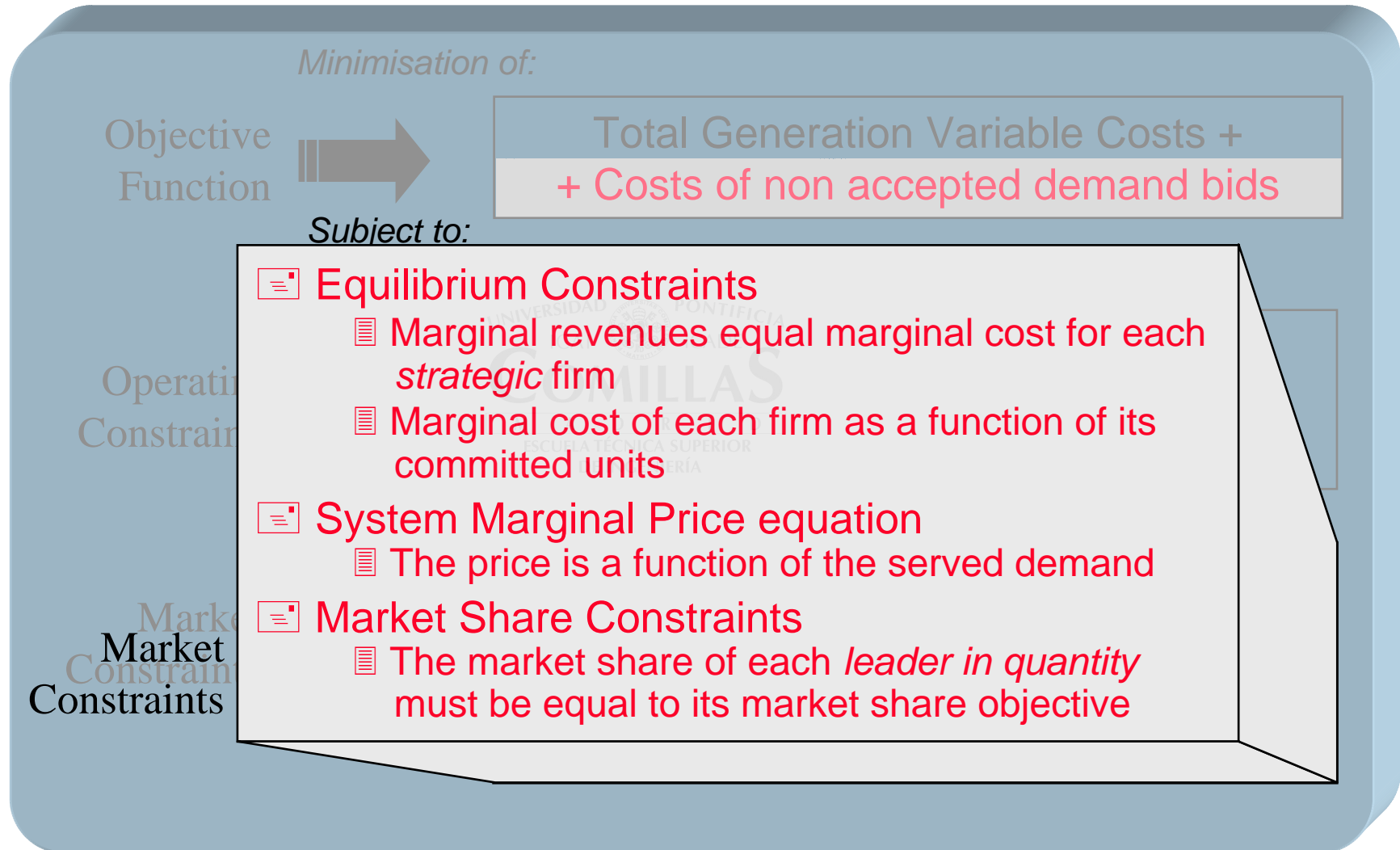
# Utility function

- Market equilibrium obtained by maximizing consumer's and producer's surplus





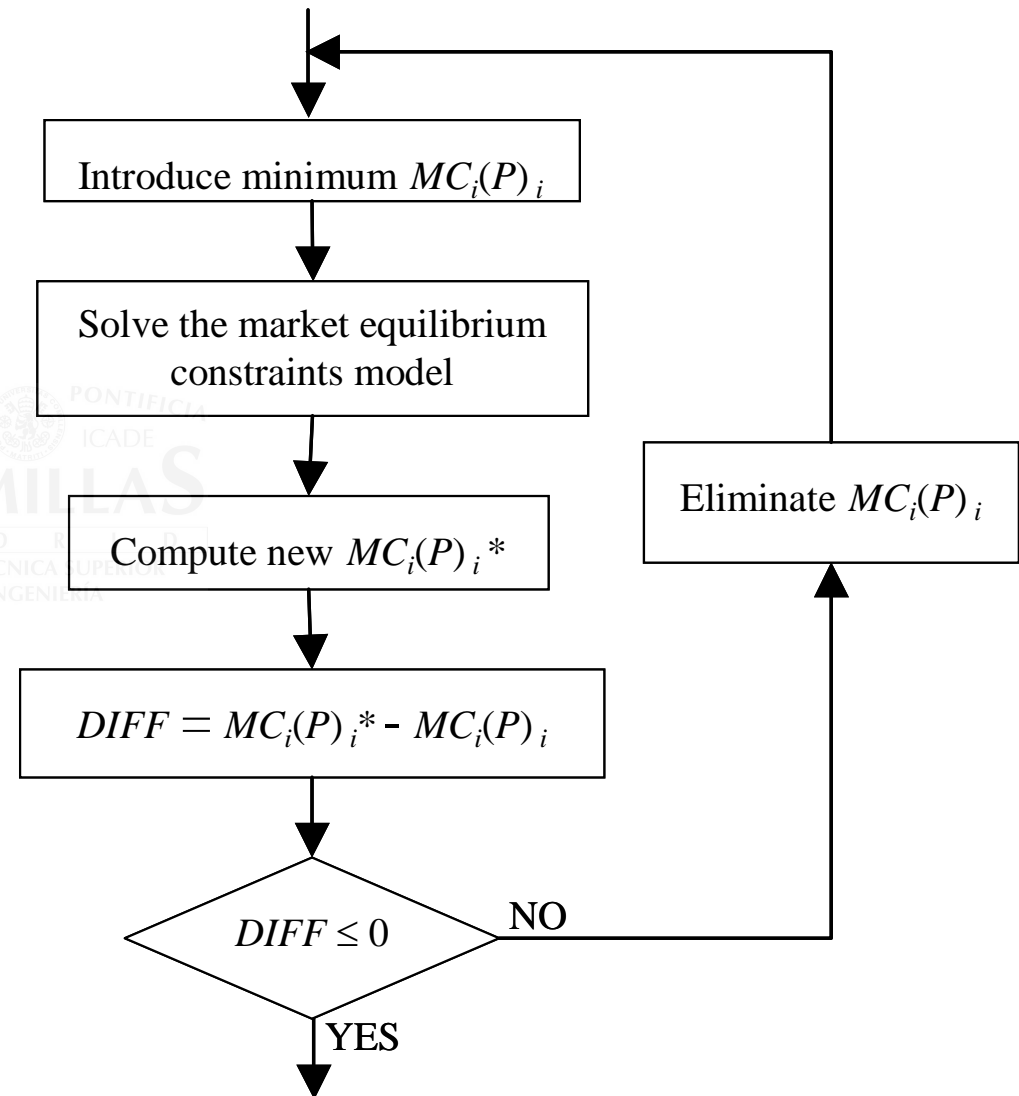
# Market equilibrium constraints



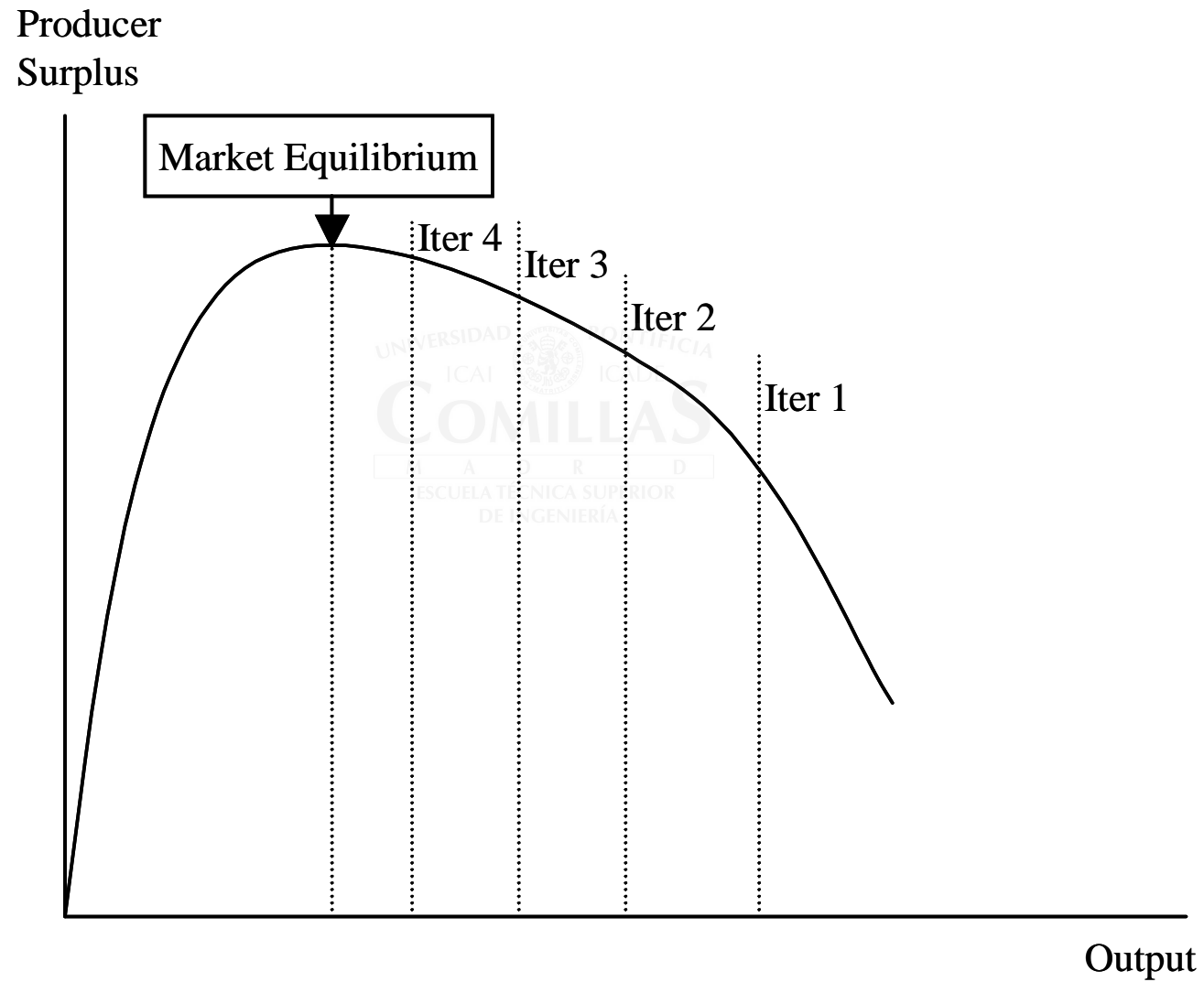
# Iterative computation of system marginal price (*SMP*)

- Marginal cost (*MC*) of each firm *i* not directly calculated by the PCM due to discrete commitment decisions
- $P_i$  output of firm *i*

$$P_i \leq \frac{SMP - MC_i(P_i)}{-\text{demand slope}}$$



# Producer surplus



# Iterative algorithm for hydro scheduling of strategic firms

1. Obtain an **initial market equilibrium** by solving the optimization problem
2. Select a load level **L1** with high SMP where the **market equilibrium constraints are not binding** for some **strategic company**
3. Select a load level **L2** with lower SMP where the same company **can decrease its production**
4. Find a **fringe company** that can **decrease** its production in load level **L1** and simultaneously **increase** in load level **L2**
5. **Exchange the hydro generation** of the strategic and fringe companies among load levels taking into account the technical hydro constraints (i.e., maximum and minimum output, maximum and minimum reserve levels, etc.) and any other constraint (i.e, firm market share)
6. If two load levels with different SMP can be selected go to step 2. In other case go to end

# Conclusions

- Market equilibrium under an oligopoly based on the Cournot conjecture, represented by a production cost model plus market equilibrium constraints
- Iterative algorithm to calculate the system marginal cost
- Iterative algorithm to refine hydro scheduling for strategic firms
- Resulting MIP problem solved by robust, efficient and reliable solvers



# Contenido

1. Modelo de coste de explotación a medio plazo con restricciones de equilibrio
2. Modelo de equilibrio de mercado mediante el problema complementario
3. Modelo de generación de ofertas mediante técnicas de descomposición
4. Análisis dinámico de estrategias de ofertas
5. Modelo de coordinación hidrotérmica a medio plazo mediante descomposición anidada estocástica de Benders para variables enteras

# Modelo de equilibrio de mercado mediante el problema complementario

## ➤ Publicaciones

- ✓ A. García-Alcalde, M. Ventosa, M. Rivier, A. Ramos, G. Relaño *Fitting Electricity Market Models. A Conjectural Variations Approach* 14th Power Systems Computation Conference (PSCC '02) Seville, Spain June 2002
- ✓ M. Rivier, M. Ventosa, A. Ramos, F. Martínez-Córcoles and A. Chiarri *A Generation Operation Planning Model in Deregulated Electricity Markets based on the Complementarity Problem* in book *Complementarity: Applications, Algorithms and Extensions* Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, The Netherlands. pp. 273-295. 2001
- ✓ A. García-Alcalde, M. Ventosa, M. Rivier, A. Ramos *Gestión del riesgo frente a la incertidumbre en las aportaciones hidráulicas en un mercado eléctrico mediante el problema complementario* VII Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica Vol III, pp. 39-45 Madrid, España Julio 2001

## ➤ Tesis doctoral

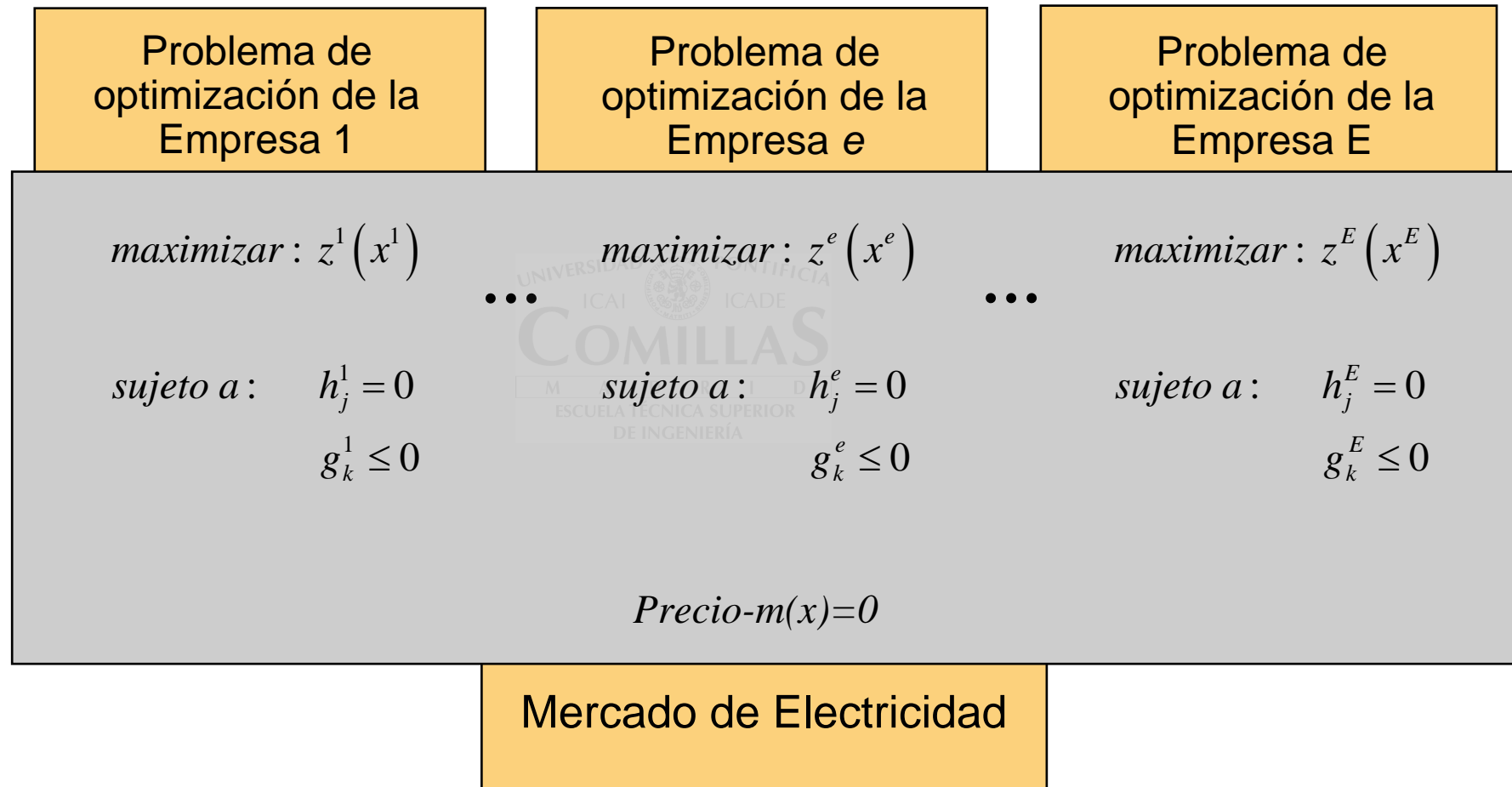
- ✓ *Modelado de la explotación de la generación en mercados eléctricos liberalizados mediante el problema complementario* Mariano Ventosa. Universidad Pontificia Comillas ETSI-ICAI. Enero 2001

# ¿Por qué un modelo de equilibrio basado en el Problema Complementario?

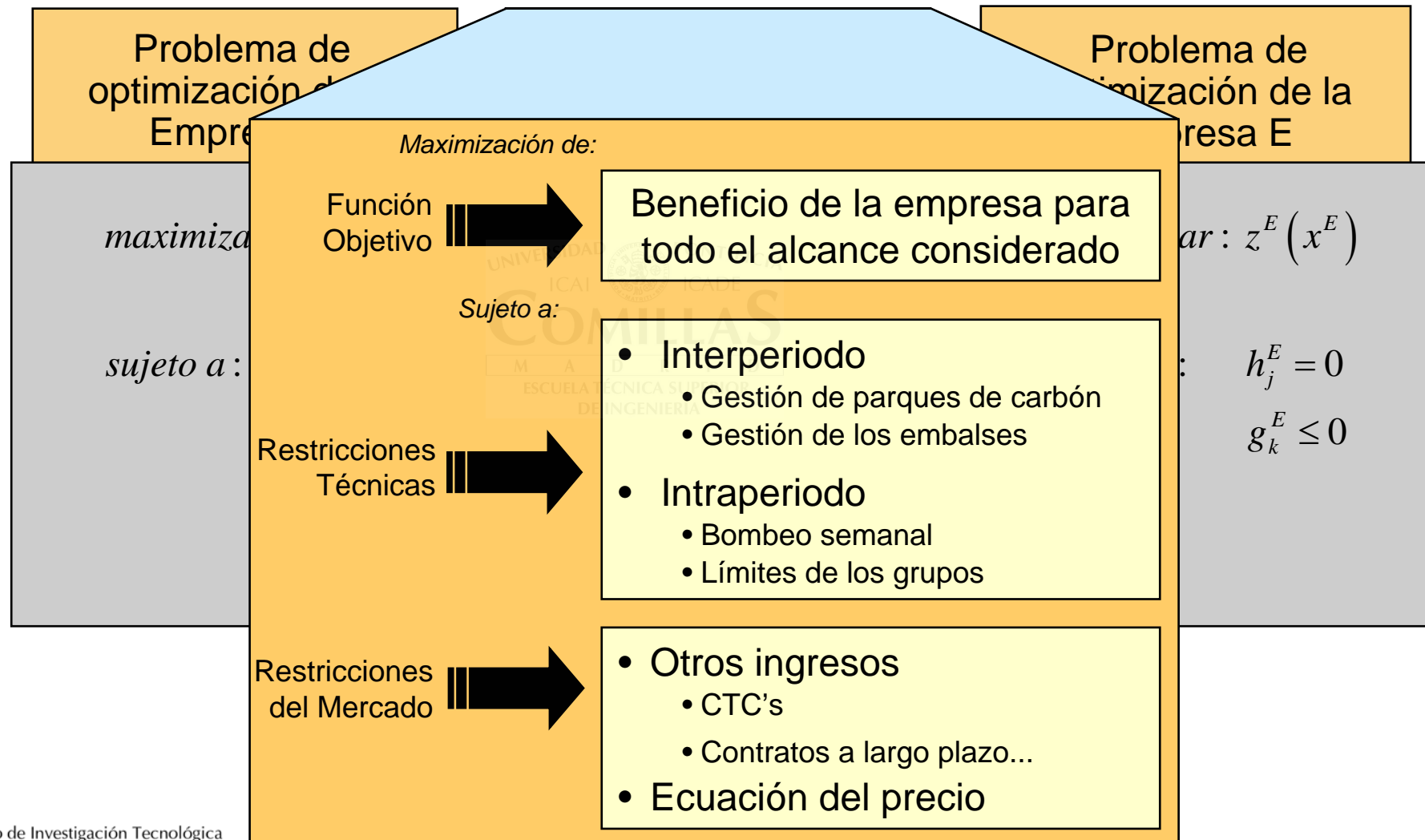
- Modelar el mercado eléctrico como un Problema Complementario permite
  - ✓ Una representación **flexible** del mercado y de la explotación a **medio y largo plazo**
    - Modelado de los grandes **movimientos de energía**
  - ✓ La solución obtenida es **técnicamente factible**
  - ✓ El equilibrio del mercado **existe y es único**
- Métodos de **solución** de Problemas Complementarios
  - ✓ **Tamaño realista: 10.000** variables
  - ✓ Aunque menor potencia de cálculo que con optimización lineal



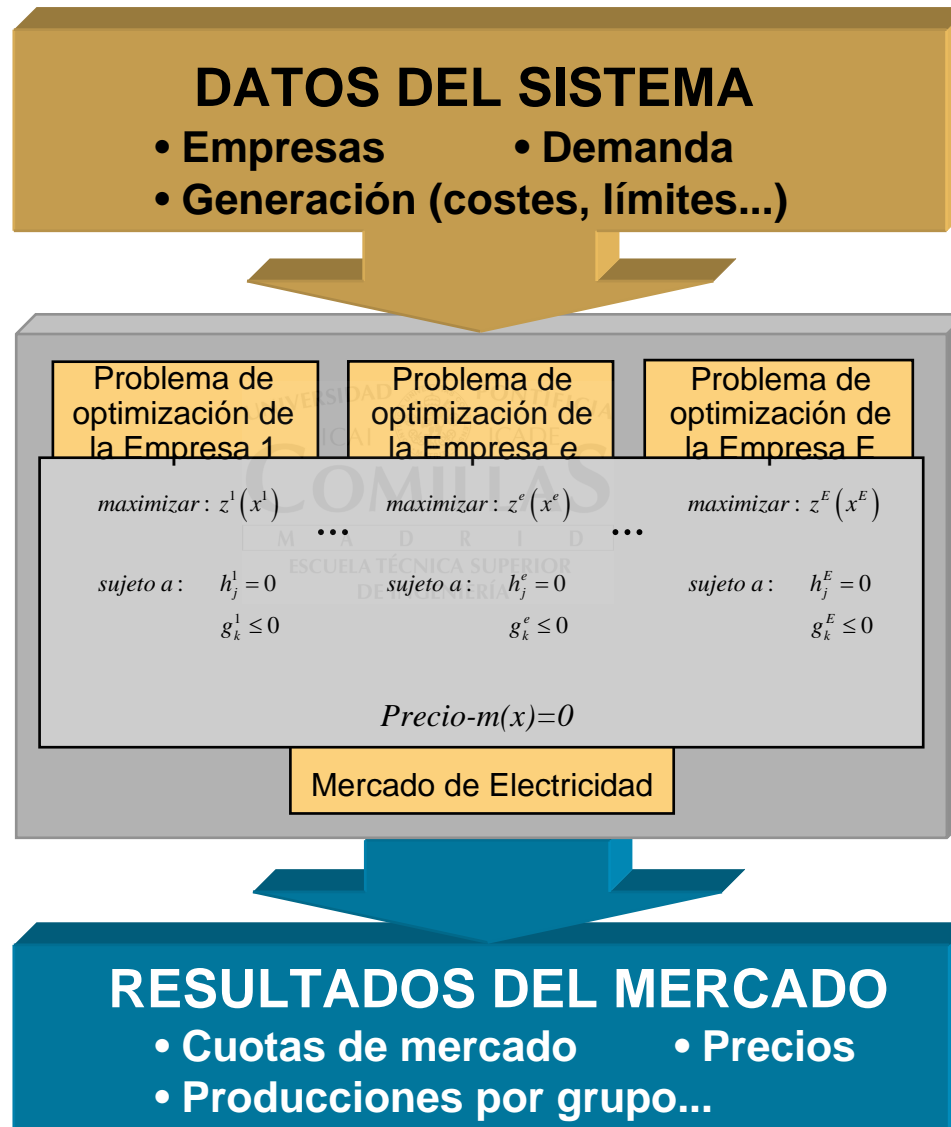
# Planteamiento del problema



# Planteamiento del problema: El problema de cada empresa



# Planteamiento del problema: Utilización del modelo



# Dificultades prácticas

- El planteamiento anterior es, desde el punto de vista **teórico**, indiscutible
- Sin embargo, **no existe** ni optimizador ni algoritmo **capaz** de **resolver** dicho problema matemático:
  - ✓ Varios problemas de optimización acoplados por la variable precio
- Hay que buscar un problema equivalente
  - ✓ Con la misma solución para sus variables
  - ✓ **Resoluble** numéricamente
- Existen varias alternativas
  - ✓ **Problema Complementario** [Ventosa, Hobbs]
  - ✓ Problema cuadrático equivalente [Barquín, Hobbs]
  - ✓ Inecuaciones variacionales [Smeers]

# Condiciones de Optimalidad del Problema de cada empresa

*maximizar*  $z^e(x)$

*sujeto a:*

$$h_j^e(x) = 0 \quad \perp \lambda_j^e$$

$$g_k^e(x) \leq 0 \quad \perp \mu_k^e$$

Función de Lagrange

$$\mathcal{L}^e(x, \lambda, \mu) = z^e + \sum_j \lambda_j^e \cdot h_j^e + \sum_k \mu_k^e \cdot g_k^e$$

**Condiciones de optimalidad KKT**

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}^e(x, \lambda, \mu) &= \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial x^e} = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}^e(x, \lambda, \mu) &= \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial \lambda_j^e} = h_j^e = 0 \\ \mu_k^e \cdot g_k^e &= 0 \quad g_k^e \leq 0 \quad \mu_k^e \leq 0 \end{aligned}$$

# Problema complementario mixto

- Unión de un **sistema de ecuaciones** con un **problema complementario**
- Generalización del problema complementario

**Sistema de ecuaciones**



$$\nabla_x \mathcal{L}^e(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial x^e} = 0$$
$$\nabla_\lambda \mathcal{L}^e(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial \lambda_j^e} = h_j^e = 0$$

$$\mu_k^e \cdot g_k^e = 0 \quad g_k^e \leq 0 \quad \mu_k^e \leq 0$$

**Problema  
Complementario**



UNIVERSIDAD PONTIFICIA  
ICAI ICADE  
COMILLAS  
M A D R I D  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR  
DE INGENIERÍA

# Problema Complementario equivalente

Condiciones de optimalidad de la Empresa 1

Condiciones de optimalidad de la Empresa e

Condiciones de optimalidad de la Empresa E

$$\nabla_x \mathcal{L}^1(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial x^1} = 0$$

$$\nabla_x \mathcal{L}^e(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial x^e} = 0$$

$$\nabla_x \mathcal{L}^E(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial x^E} = 0$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}^1(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \lambda_j^1} = h_j^1 = 0$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}^e(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial \mathcal{L}^e}{\partial \lambda_j^e} = h_j^e = 0$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}^E(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial \mathcal{L}^E}{\partial \lambda_j^E} = h_j^E = 0$$

$$\mu_k^1 \cdot g_k^1 = 0 \quad g_k^1 \leq 0 \quad \mu_k^1 \leq 0$$

$$\mu_k^e \cdot g_k^e = 0 \quad g_k^e \leq 0 \quad \mu_k^e \leq 0$$

$$\mu_k^E \cdot g_k^E = 0 \quad g_k^E \leq 0 \quad \mu_k^E \leq 0$$

$$Precio-m(y) = 0$$

Mercado de Electricidad

# Modelado detallado del sistema (I)

## ➤ Modelado del **mercado**

- ✓ Comportamiento de la **demanda**
  - Demanda total **función lineal del precio**
  - Curva duración-carga por periodo
- ✓ Competencia de las empresas a la **Cournot**
  - Maximización simultánea del beneficio
  - Ingresos del mercado **función cuadrática del precio**
- ✓ Otras características del mercado
  - **Contratos de venta** por diferencias
  - **Contratos** de compra ***take-or-pay***





# Modelado detallado del sistema (II)

- Equipo de **generación térmica**
  - Límites de producción
  - **Consumo** de combustible **cuadrático**
  - Mantenimiento programado
  - Modelado determinista del fallo de los grupos
  - **Gestión** lineal del **parque** de combustible
- Equipo de **generación hidráulica**
  - Centrales con embalse **regulable**
  - Centrales fluyentes
  - Centrales de **bombeo**
  - **Gestión** lineal de los **embalses**

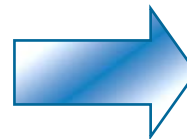
# Problema Complementario Mixto Lineal

- En un modelo de medio plazo formulado con
  - ✓ Las **restricciones** son **lineales**
  - ✓ La **función objetivo** es **cuadrática**



Sistema de ecuaciones con la estructura de un **problema complementario lineal mixto**

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ \text{sujeto a:} & Ax \geq b \quad \perp \mu \\ & Cx = d \quad \perp \lambda \end{array}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} c + Qx - C^T \lambda - A^T \mu = 0 \\ -d + Cx = 0 \end{array} \right\}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \geq 0 \\ -b + Ax \geq 0 \\ \mu^T \cdot (-b + Ax) = 0 \end{array} \right\}$$

# Condiciones de existencia y unicidad

- En un modelo de medio plazo formulado con
  - ✓ Las **restricciones** son **lineales**
  - ✓ La **función objetivo** es **cuadrática**



Sistema de ecuaciones con la estructura de un **problema complementario lineal mixto**

- Condiciones suficientes de **existencia y unicidad**



**Coste marginal** estrictamente monótono **creciente** y función de la **demanda** lineal **decreciente**

# Comparison of a production cost model with MEC with a MCP approach

## ➤ Advantages of PCM with MEC approach

- ✓ Realistic modeling of the electric system (e.g., binary unit commitment variables)
- ✓ Robust and efficient solution methods (e.g., Branch and bound for MIP)
- ✓ Constraints must be linear
- ✓ Convergence not guaranteed but obtained in practice

## ➤ Advantages of MCP approach

- ✓ Compact problem formulation
- ✓ Only continuous variables
- ✓ Possibility of introducing nonlinear constraints
- ✓ Optimality guaranteed and solution uniqueness with linear constraints
- ✓ Slow solution method and depending of the initial value

# Contenido

1. Modelo de coste de explotación a medio plazo con restricciones de equilibrio
2. Modelo de equilibrio de mercado mediante el problema complementario
3. Modelo de generación de ofertas mediante técnicas de descomposición
4. Análisis dinámico de estrategias de ofertas
5. Modelo de coordinación hidrotérmica a medio plazo mediante descomposición anidada estocástica de Benders para variables enteras

# Modelo de generación de ofertas mediante técnicas de descomposición

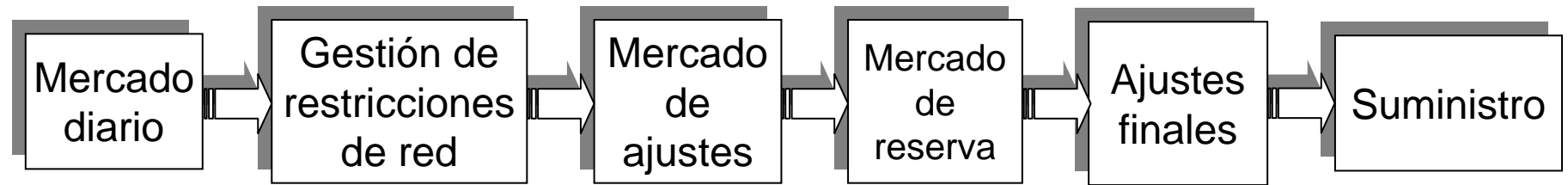
## ➤ Publicaciones

- ✓ A. Baíllo, M. Ventosa, M. Rivier, A. Ramos, G. Relañó *Bidding in a Day-Ahead Electricity Market: A Comparison of Decomposition Techniques* 14th Power Systems Computation Conference (PSCC '02) Seville, Spain June 2002
- ✓ A. Baíllo, M. Ventosa, A. Ramos, M. Rivier, A. Canseco *Strategic unit commitment for generation companies in deregulated electricity markets* in book *The Next Generation of Electric Power Unit Commitment Models* Kluwer Academic Publishers Boston, MA, USA pp. 227-248 2001

## ➤ Tesis doctoral

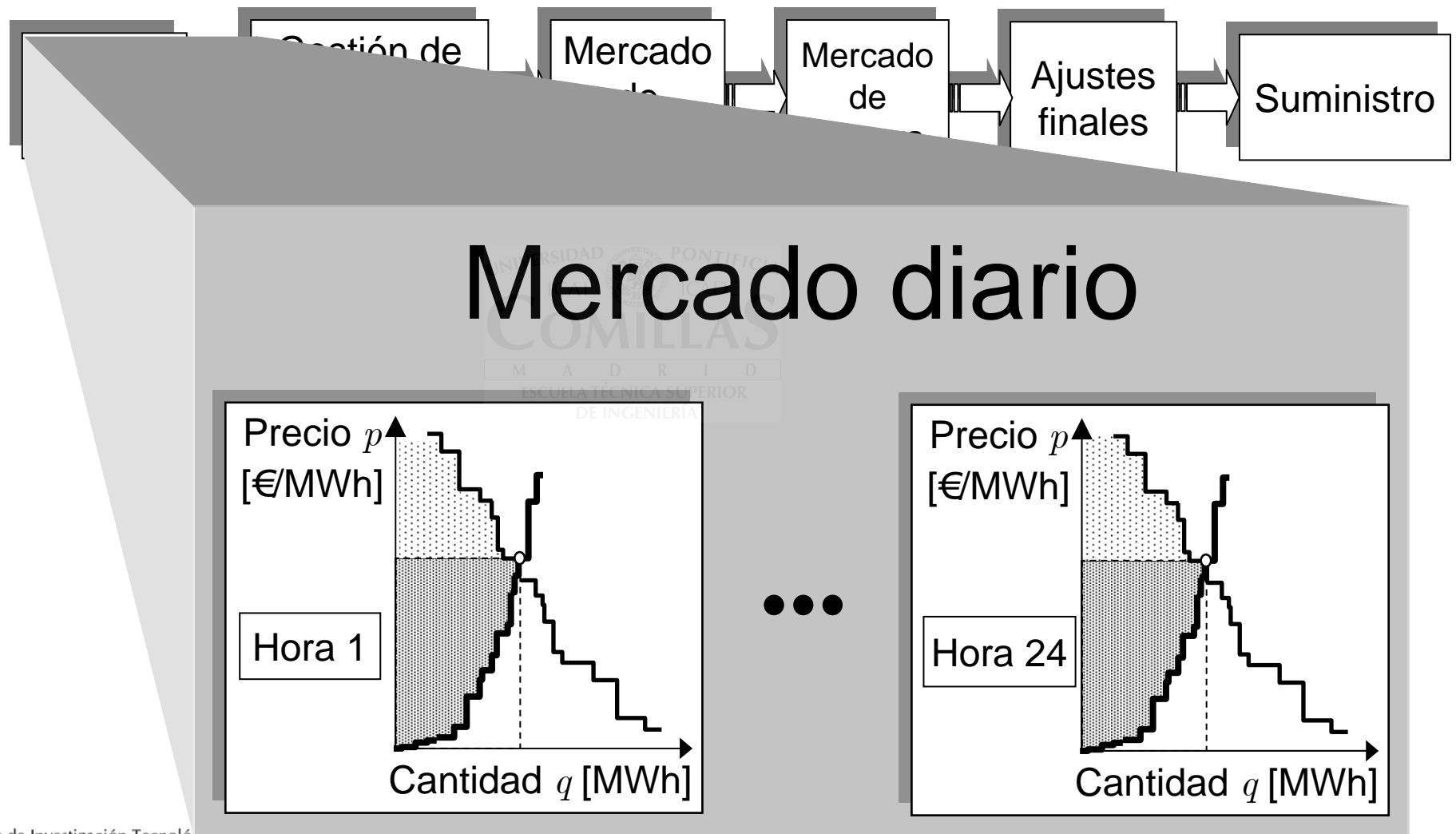
- ✓ *Optimización de la explotación y de la preparación de ofertas de una empresa de generación de energía eléctrica para mercados de corto plazo* Álvaro Baíllo. Universidad Pontificia Comillas ETSI-ICAI. Septiembre 2002

# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa



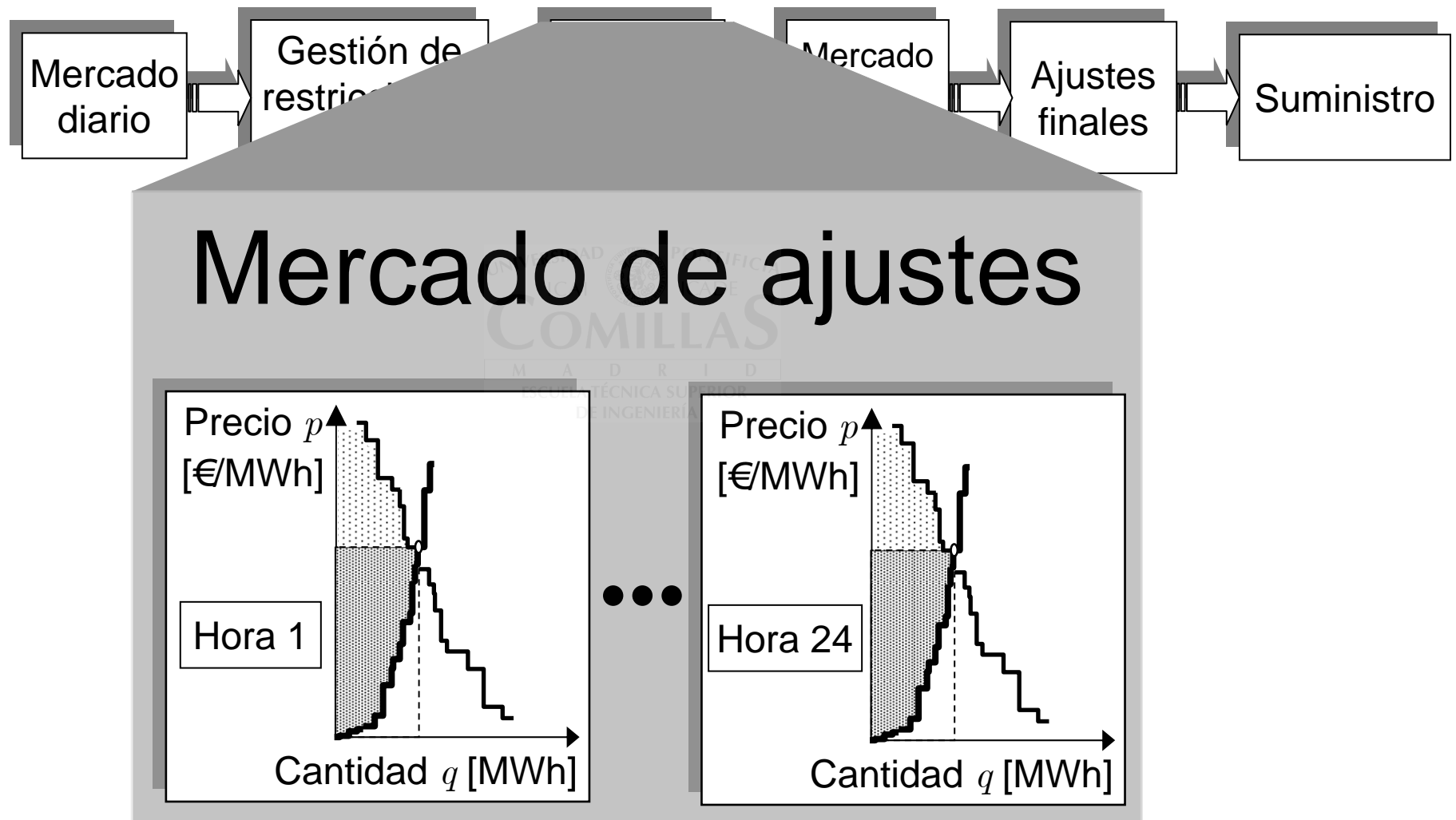
- **El mercado spot** normalmente se organiza como una secuencia de mecanismos de mercado.

# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

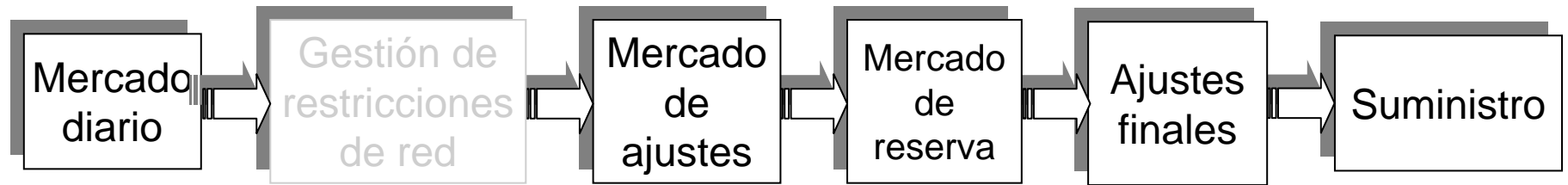




# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

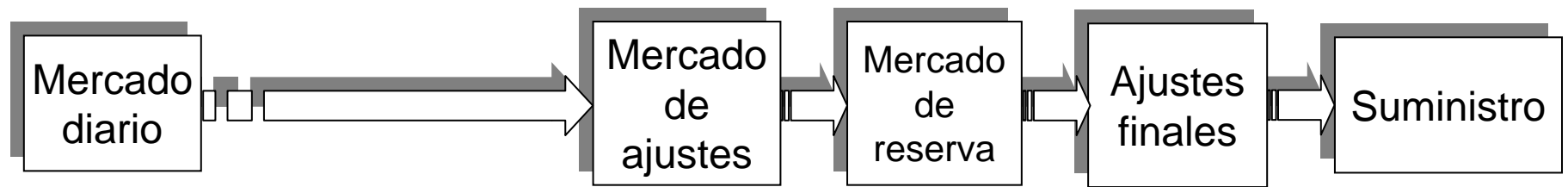


# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa



**Hipótesis: la red no impone restricciones significativas para la transferencia de energía**

# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

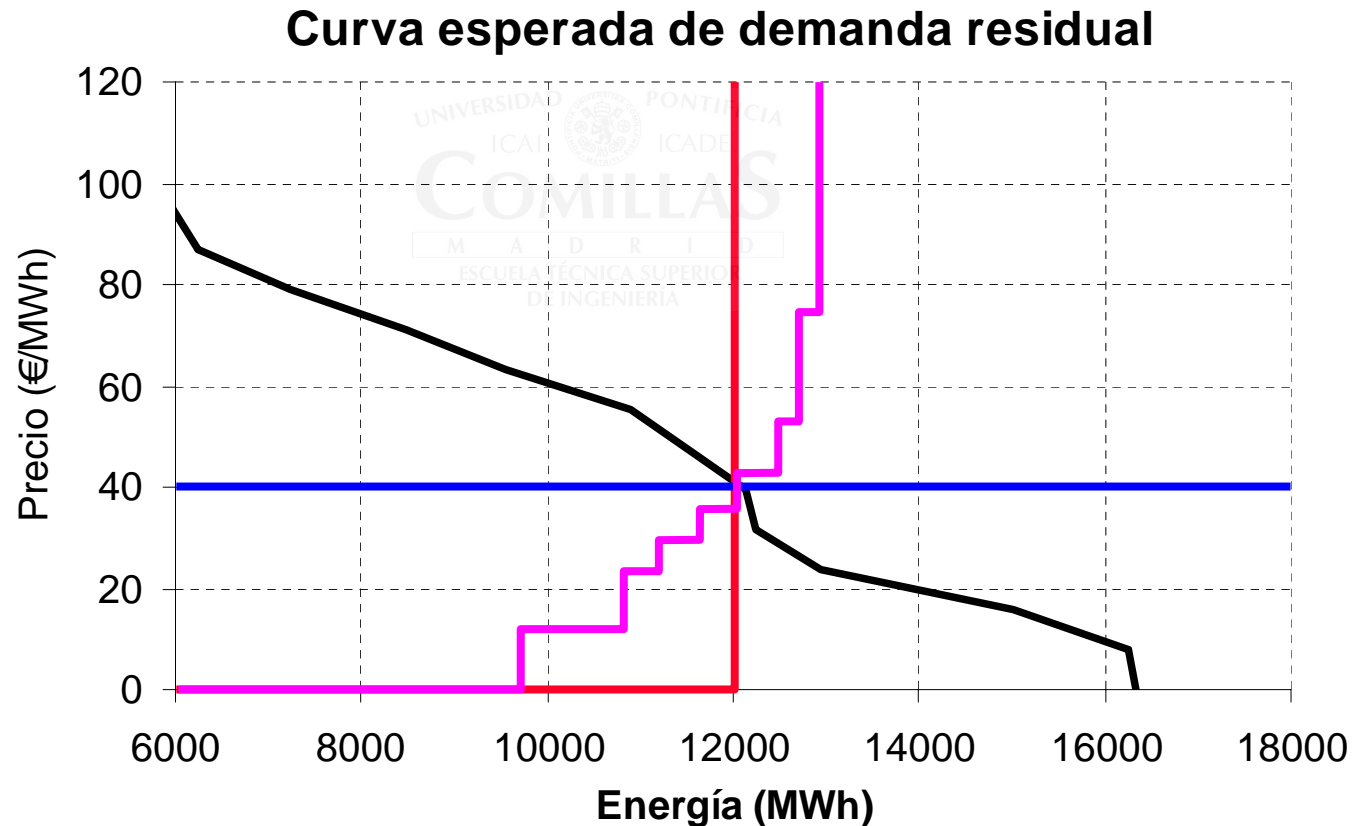


**Hipótesis: el volumen de negocio disminuye a medida que se aproxima el momento del suministro**



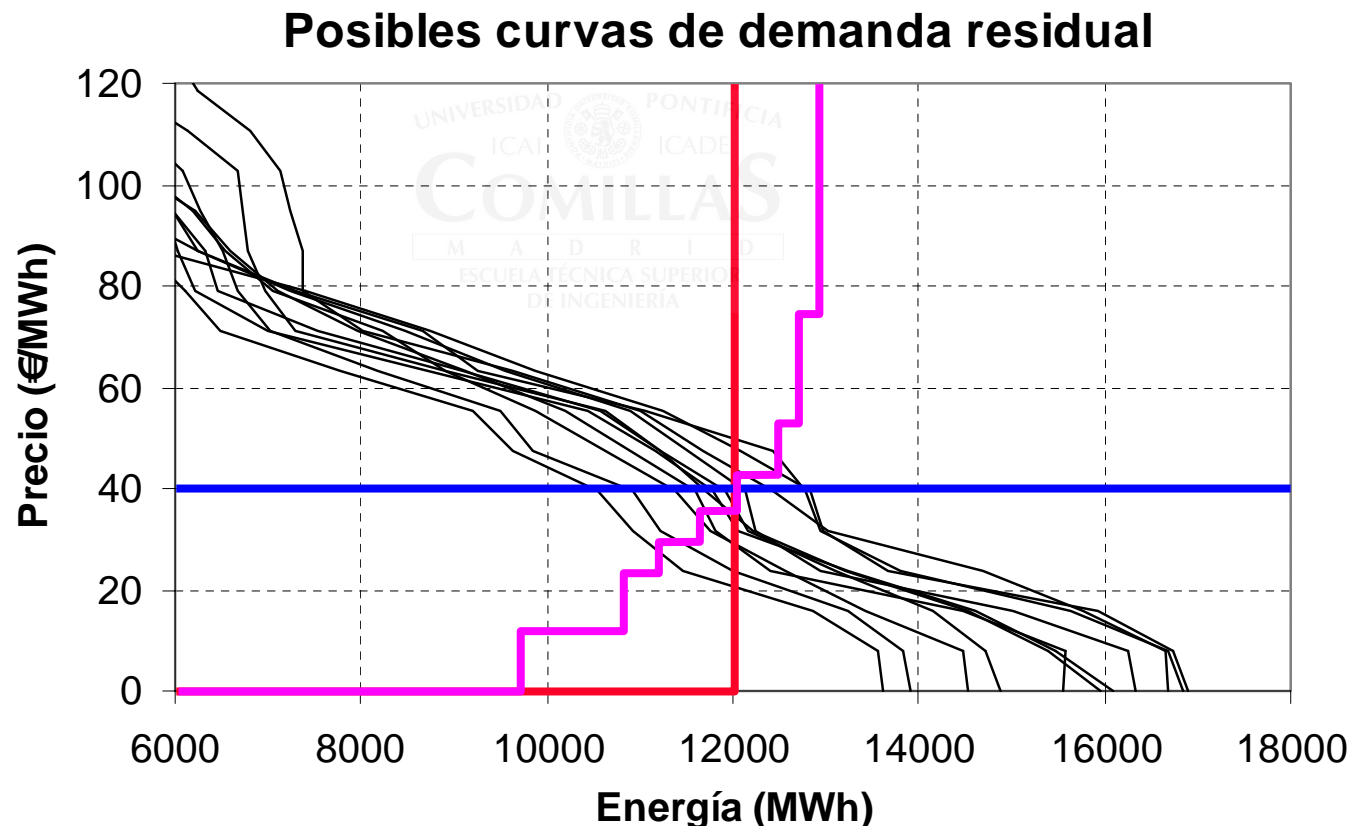
# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

- La empresa de generación **no sabe** la curva de **demanda residual** con la que se va a enfrentar en cada subasta horaria:



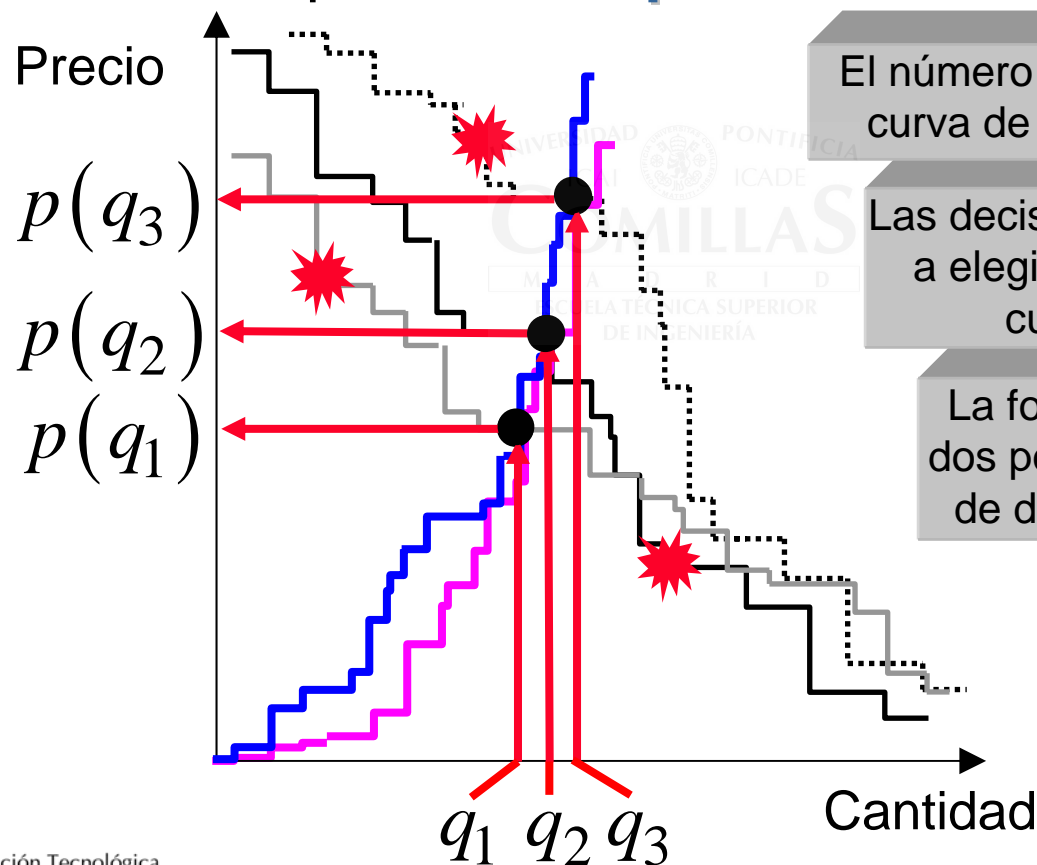
# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

- El **reconocimiento explícito** de la **incertidumbre** justifica la importancia del problema de elaboración de ofertas:



# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

- **Hipótesis:** La **distribución de probabilidad** de la curva de **demanda residual** de cada subasta del mercado spot tiene **soporte finito**:



El número de posibles realizaciones de la curva de demanda residual es limitado

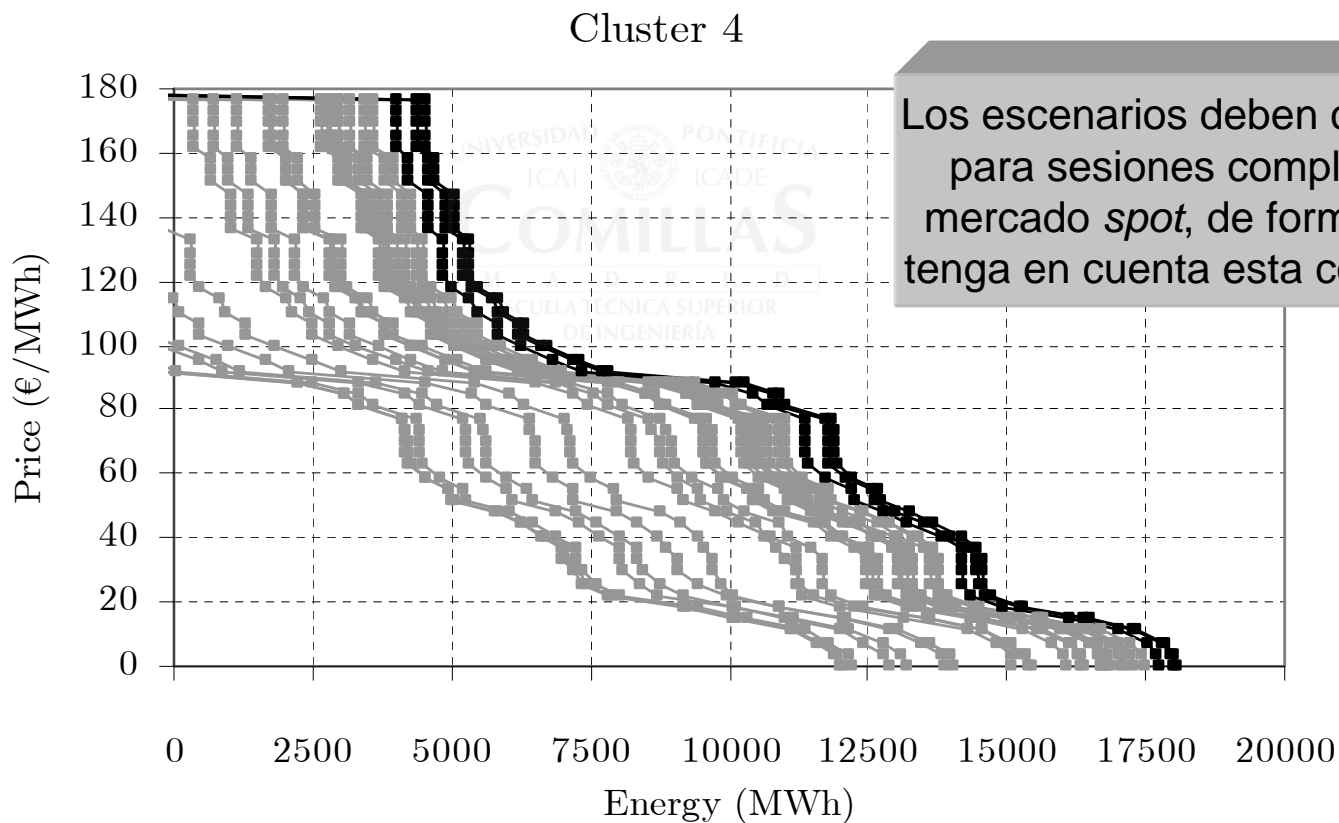
Las decisiones de la empresa se reducen a elegir un nivel de ventas para cada curva de demanda residual

La forma de la curva de oferta entre dos posibles realizaciones de la curva de demanda residual es irrelevante

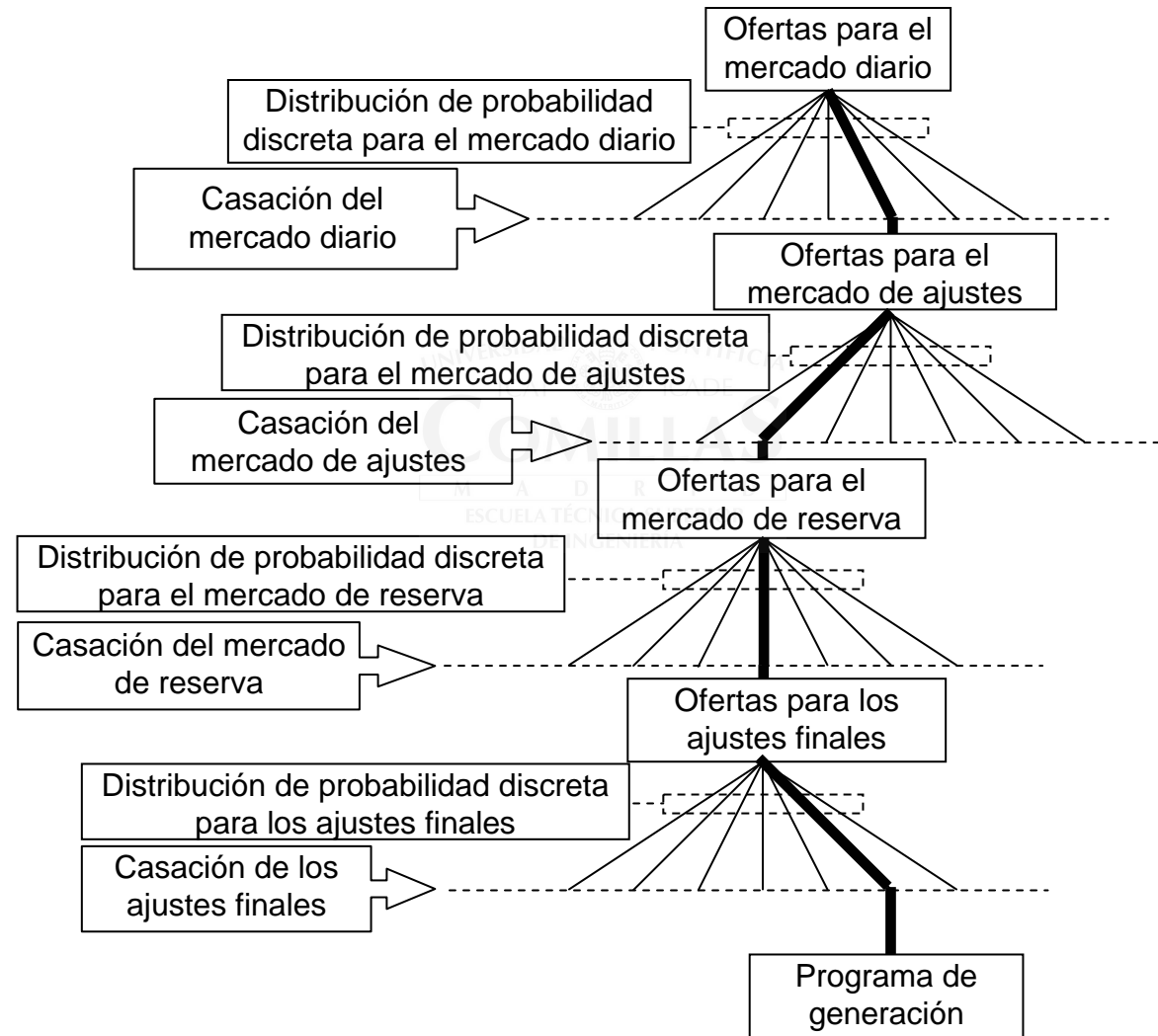
Las cantidades decididas por la empresa deben constituir una curva de oferta creciente.

# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

- Las curvas de **demanda residual** de subastas celebradas en la misma sesión del mercado diario pueden tener un **elevado nivel de correlación**:



# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa





# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

## ➤ Cálculo de los **ingresos esperados**:

$$\mathbb{E}R = \sum_{k \in K} \pi_k \sum_{n \in N} r_{nk} (q_{nk}) = \sum_{k \in K} \pi_k \sum_{n \in N} \sum_{j \in J_{kn}} \sum_{i \in I_j} m_{ijnk} q_{ijnk}$$

donde:

$\pi_k$  probabilidad del escenario  $k$ .

$r_{nk}(\cdot)$  función de ingresos para el escenario  $k$  en la hora  $n$  [M€]

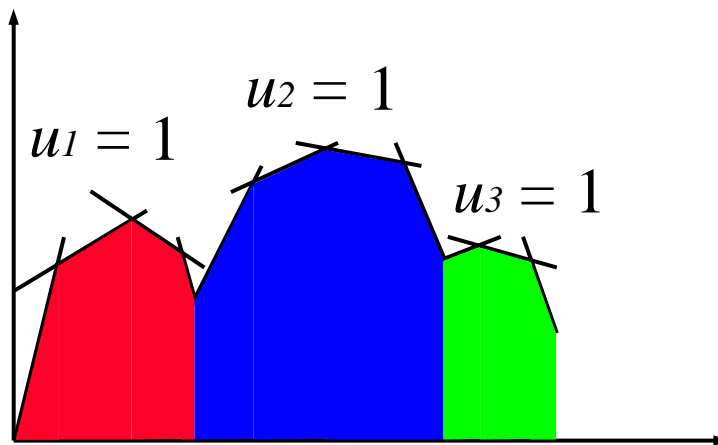
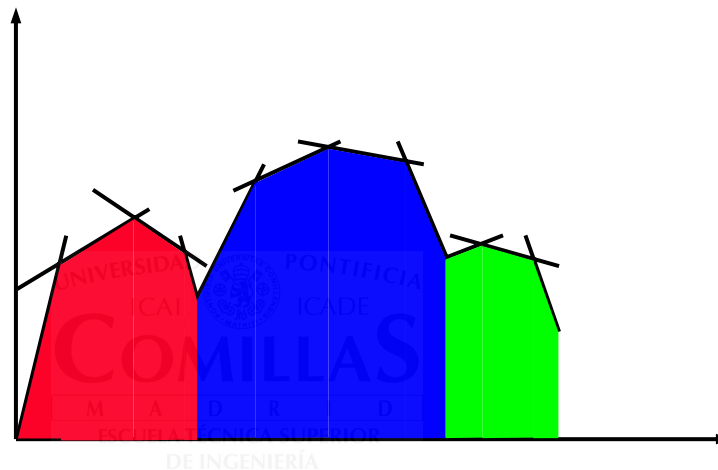
$q_{nk}$  cantidad vendida por la empresa en la hora  $n$  y en el escenario  $k$  [GWh]

$m_{ijnk}$  pendiente del tramo  $i$  de la sección cóncava  $j$  de la curva de ingresos del escenario  $k$  en la hora  $n$  [M€/GWh]

$q_{ijnk}$  llenado del tramo  $i$  de la sección cóncava  $j$  de la curva de ingresos del escenario  $k$  en la hora  $n$  [GWh].

# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

- Recordatorio: necesidad de las variables binarias:



# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

- Cálculo del **precio esperado** en la hora  $n$ :

$$\mathbb{E}p_n = \sum_{k \in K} \pi_k p_{nk}(q_{nk}) = \sum_{k \in K} \pi_k \left[ p_{nk}^0 + \sum_{j \in J_{kn}} \sum_{i \in I_j} a_{ijnk} q_{ijnk} \right]$$

donde:

$\pi_k$  probabilidad del escenario  $k$ .

$p_{nk}(\cdot)$  demanda residual para el escenario  $k$  en la hora  $n$  [€/MWh]

$q_{nk}$  cantidad vendida por la empresa en la hora  $n$  y en el escenario  $k$  [GWh]

$p_{nk}^0$  precio para ventas nulas en la hora  $n$  y en el escenario  $k$  [€/MWh]

$a_{ijnk}$  pendiente del tramo  $i$  de la sección  $j$  de la curva de demanda residual del escenario  $k$  en la hora  $n$  [M€/GWh]

$q_{ijnk}$  llenado del tramo  $i$  de la sección cóncava  $j$  de la curva de ingresos del escenario  $k$  en la hora  $n$  [GWh].

# Modelado avanzado de la incertidumbre en el corto plazo: enfoque multietapa

- Modelado del portfolio de la empresa:
  - ✓ Modelado del **equipo generador**.
  - ✓ Modelado de **posiciones en otros mercados**.
  - ✓ Consignas de **largo plazo**.



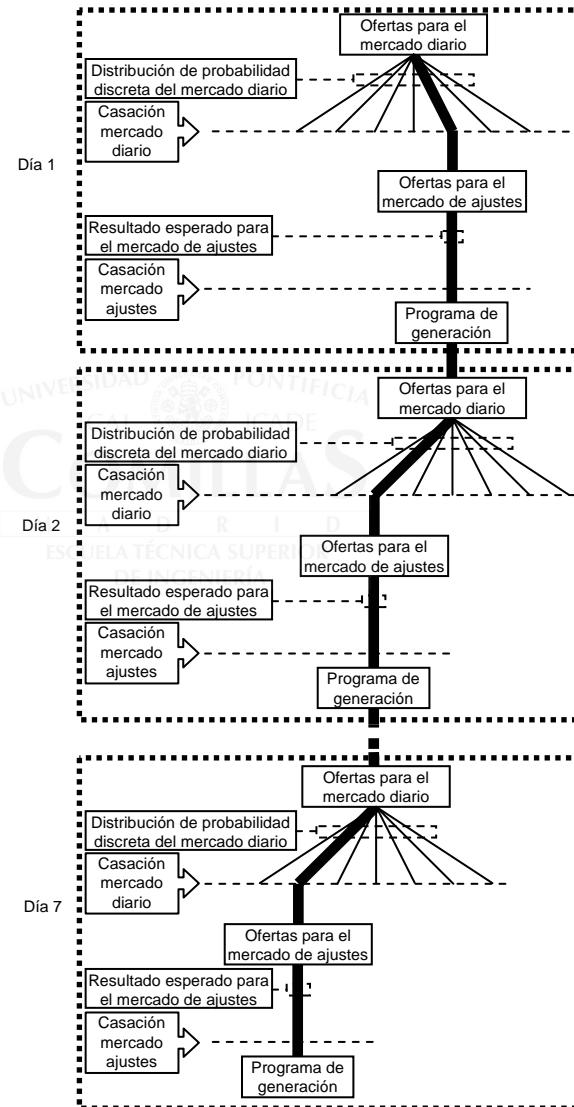
# Estrategias de solución del problema

- **Solución en dos fases:**
  - ✓ Planificación semanal de la producción ante incertidumbre en el mercado diario (*unit commitment* estocástico).
  - ✓ Preparación de ofertas óptimas para un mecanismo de mercado concreto ante incertidumbre.
- **Análisis de la estructura** de estos problemas.
- **Dos posibles técnicas de descomposición:**
  - ✓ Benders.
  - ✓ Relajación lagrangiana.

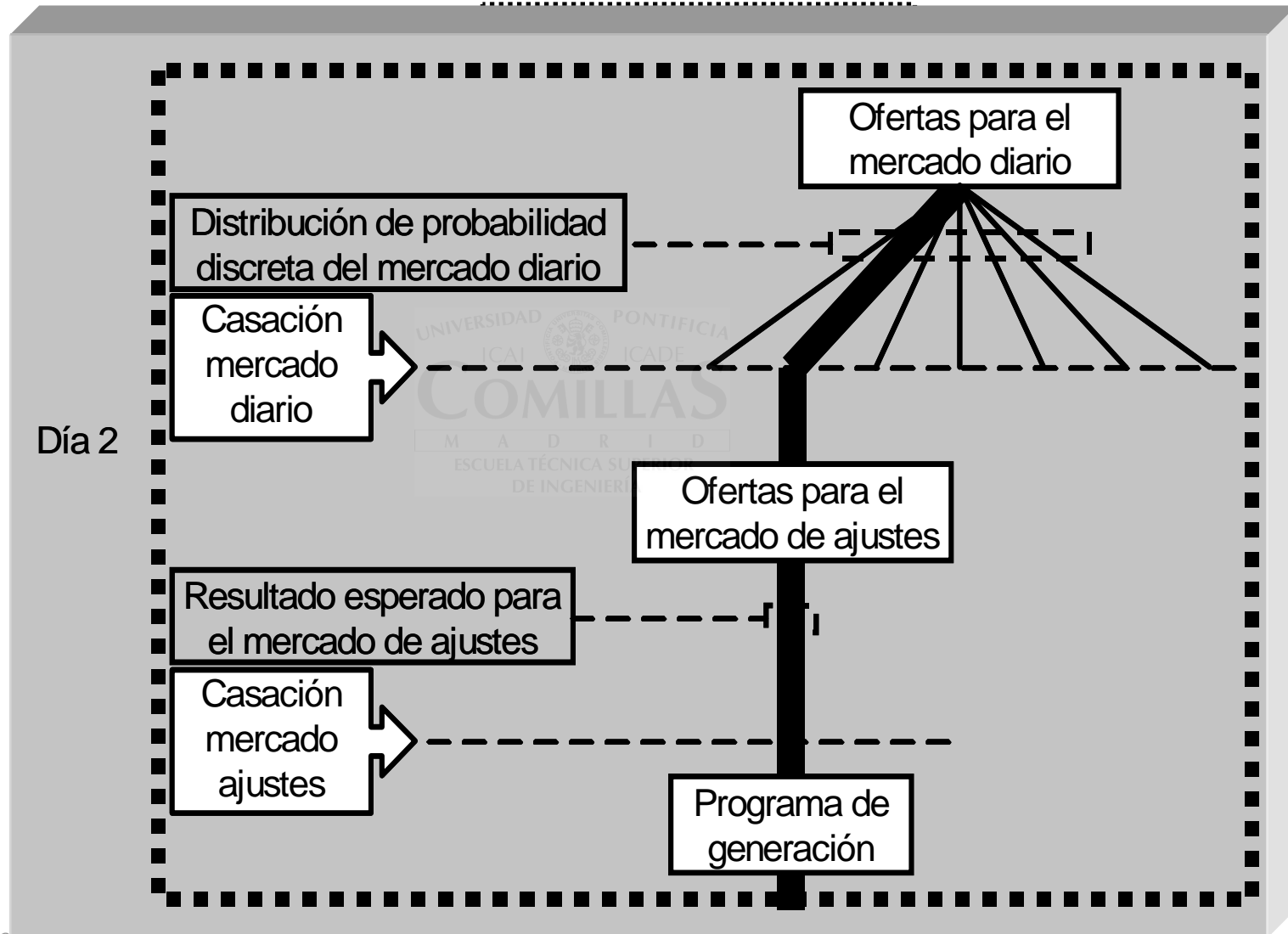
# Primer tipo de problema: problema semanal estocástico multietapa

- Hay **decisiones de corto plazo** que deben tomarse con un horizonte temporal de **una semana**:
  - ✓ Planificación de arranques y paradas: ***unit commitment***.
  - ✓ Reparto diario de los recursos hidráulicos disponibles para la semana: **hydrothermal coordination**.
- Este problema semanal puede verse como una **secuencia de programas estocásticos bietapa**, uno para cada día de la semana.

# Primer tipo de problema: problema semanal estocástico multietapa

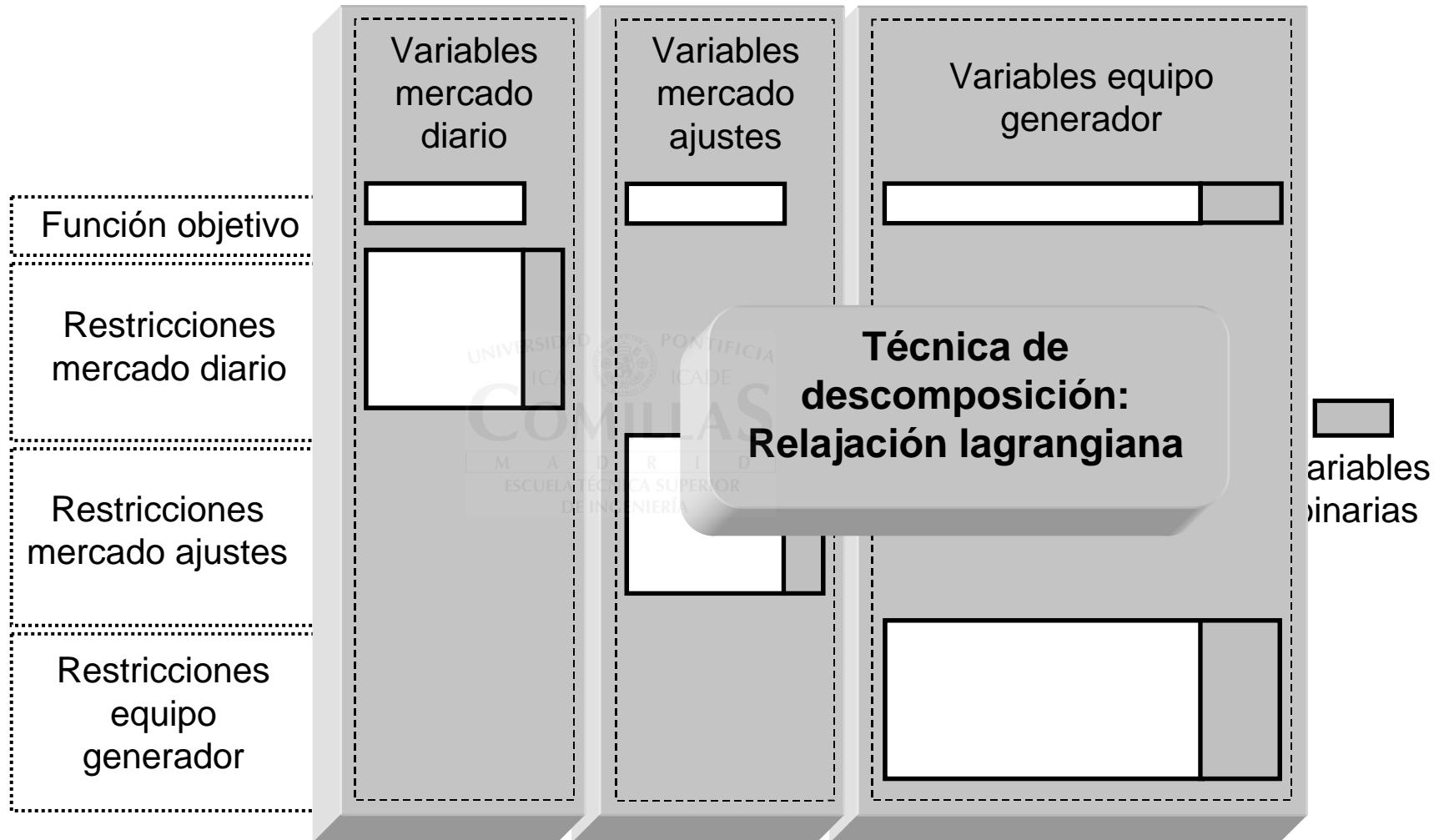


# Primer tipo de problema: detalle de cada día de la semana





# Análisis de la estructura del problema: Énfasis en la restricción de complicación



# Técnicas de resolución:

## Relajación lagrangiana

- Permite obtener una **buena aproximación** de la solución de **problemas no convexos** de gran tamaño con **restricciones de complicación**.
- Consiste en resolver el **problema dual**:
  - ✓ El problema dual **se resuelve de forma iterativa**, aproximando su función objetivo mediante sucesivos cortes lineales.
  - ✓ Si el problema primal es convexo, la solución del problema dual coincide con la del primal.
  - ✓ Si el problema primal no es convexo, existe una diferencia entre la solución del primal y la del dual (duality gap).

# Relajación lagrangiana

➤ **Restricciones de complicación** en nuestro problema:

$$\text{Max} \sum_{k \in K} \pi_k \sum_{n \in N} \left\{ r_{nk} (q_{nk}) + r_{nk}^a (q_{nk}^a) + \sum_c (p_n^c - p_{nk}) q_n^c - \sum_t c_{nk}^t \right\}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} q_{nk} - q_{nk'} &\geq -x_{nkk'} M^q, \quad \forall n, k, k' > k \\ q_{nk'} - q_{nk} &\geq -(1 - x_{nkk'}) M^q, \quad \forall n, k, k' > k \\ p_{nk} - p_{nk'} &\geq -x_{nkk'} M^p, \quad \forall n, k, k' > k \\ p_{nk'} - p_{nk} &\geq -(1 - x_{nkk'}) M^p, \quad \forall n, k, k' > k \end{aligned}$$

Restricciones de monotonía de las ofertas

$$q_{nk} + q_{nk}^a + \sum_c q_n^c = \sum_{g \in G} q_{nk}^g - \sum_{h \in H} b_{nk}^h, \quad \forall n, k$$

Balance de energía

$$\{q_{nk}^g, b_{nk}^g\} \in Q_g, \quad \forall g$$

Factibilidad de la producción de los grupos

# Relajación lagrangiana

## ➤ **Detalle** de las restricciones de complicación:

- ✓ Restricciones de monotonía de las ofertas: Ligaduras entre las ofertas decididas para los distintos escenarios.

$$\begin{aligned}q_{nk} - q_{nk'} &\geq -x_{nkk'} M^q, \quad \forall n, k, k' > k \\q_{nk'} - q_{nk} &\geq -(1 - x_{nkk'}) M^q, \quad \forall n, k, k' > k \\p_{nk} - p_{nk'} &\geq -x_{nkk'} M^p, \quad \forall n, k, k' > k \\p_{nk'} - p_{nk} &\geq -(1 - x_{nkk'}) M^p, \quad \forall n, k, k' > k\end{aligned}$$

Restricciones  
de monotonía  
de las ofertas

- ✓ Ecuación de balance de energía: Relaciona el modelo del mercado diario con el modelo de generación y el del mercado de ajustes.

$$q_{nk} + q_{nk}^a + \sum_c q_n^c = \sum_{g \in G} q_{nk}^g - \sum_{h \in H} b_{nk}^h, \quad \forall n, k$$

Balance  
de energía

# Relajación lagrangiana

- El **problema dual** se formula de la siguiente manera:

$$\text{Min}_{\lambda_{nk}, \mu_{nkk'}} \theta(\lambda_{nk}, \mu_{nkk'}) = \text{Min}_{\lambda_{nk}, \mu_{nkk'}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \mathcal{L}(q_{nk}, q_{nk}^a, q_{nk}^g, b_{nk}^h, \lambda_{nk}, \mu_{nkk'}) \\ q_{nk}, q_{nk}^a \\ q_{nk}^g, b_{nk}^h \\ \text{s.a: } \{q_{gkn}, b_{gkn}\} \in Q_g, \quad \forall g \end{array} \right\}$$

donde

$\lambda_{nk}$  Multiplicador asociado a la ecuación de balance de energía.

$\mu_{nkk'}$  Multiplicadores asociados a las restricciones de monotonía de ofertas.

$\mathcal{L}(\cdot)$  Lagrangiano: devuelve el valor de la función dual para un valor concreto de  $\lambda_{nk}$  y  $\mu_{nkk'}$

$\theta(\lambda_{nk}, \mu_{nkk'})$  Función dual

## Relajación lagrangiana

- Obsérvese que la **función dual**  $\theta(\lambda_{nk}, \mu_{nkk'})$  no tiene una expresión conocida. **Sólo podemos evaluarla en cada punto**  $(\lambda_{nk}, \mu_{nkk'})$  resolviendo el problema de maximización:

$$\text{Min}_{\lambda_{nk}, \mu_{nkk'}} \theta(\lambda_{nk}, \mu_{nkk'}) = \text{Min}_{\lambda_{nk}, \mu_{nkk'}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } \mathcal{L}(q_{nk}, q_{nk}^a, q_{nk}^g, b_{nk}^h, \lambda_{nk}, \mu_{nkk'}) \\ q_{nk}, q_{nk}^a \\ q_{nk}^g, b_{nk}^h \\ \text{s.a: } \{q_{gkn}, b_{gkn}\} \in Q_g, \quad \forall g \end{array} \right\}$$

- Esta maximización no sólo nos da el valor de la función dual, sino **también la derivada** de esa función respecto a los multiplicadores: criterio para probar nuevos multiplicadores que disminuyan el valor de la función dual.

# Relajación lagrangiana

- El **lagrangiano** en este caso se define como sigue:

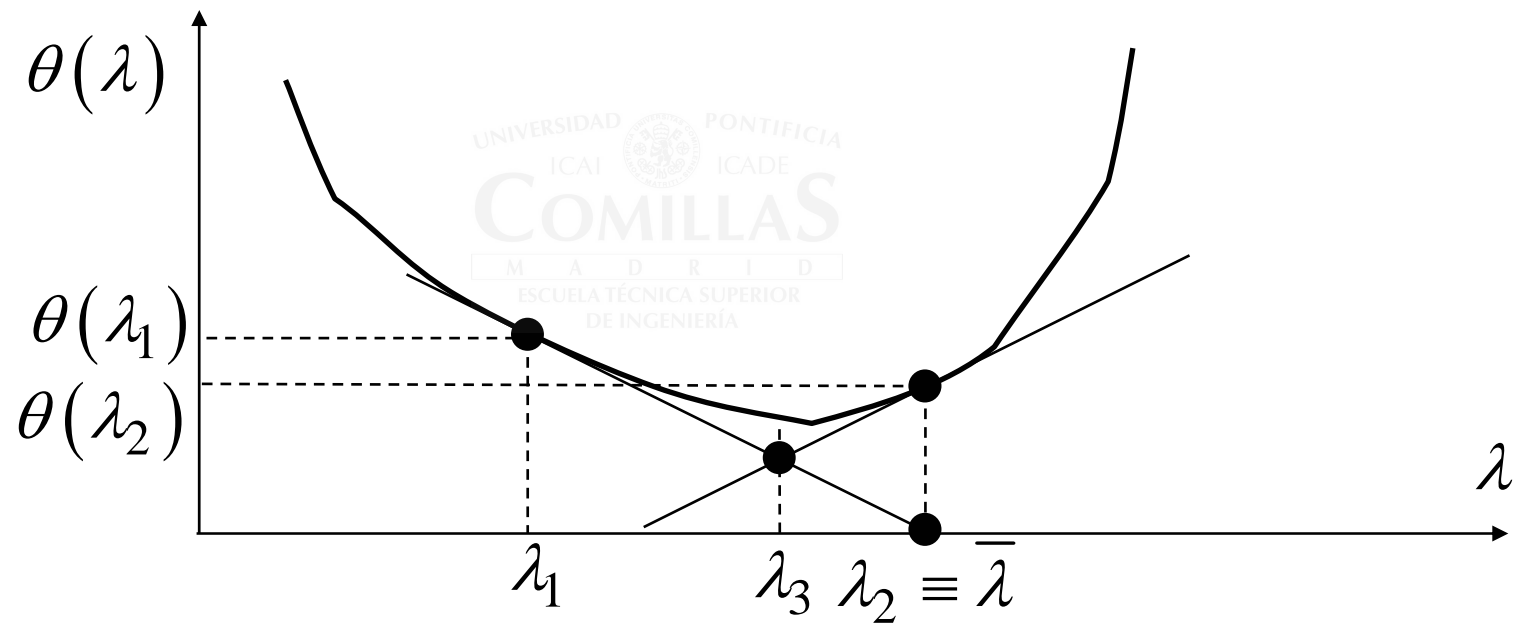
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(q_{nk}, q_{nk}^a, q_{nk}^g, b_{nk}^h, \lambda_{nk}, \mu_{nkk'}) = & \\
 \sum_{k \in K} \sum_{n \in N} \left\{ \pi_k \left[ r_{nk}(q_{nk}) + r_{nk}^a(q_{nk}^a) + (p_n^c - p_{nk})q_n^c - \sum_t c_{nk}^t \right] \right. & \\
 + \lambda_{nk} \left[ \sum_{g \in G} q_{nk}^g - \sum_{h \in H} b_{nk}^h - q_{nk} - q_n^c - q_{nk}^a \right] & \\
 + \sum_{k' \in K - \{k\}} \mu_{nkk'} \left[ q_{nk} - q_{nk'} + x_{nkk'} M^q \right] & \\
 + \mu_{nkk'}^{-q} \left[ q_{nk'} - q_{nk} + (1 - x_{nkk'}) M^q \right] & \\
 + \mu_{nkk'}^p \left[ p_{nk} - p_{nk'} + x_{nkk'} M^p \right] & \\
 + \mu_{nkk'}^{-p} \left[ p_{nk'} - p_{nk} + (1 - x_{nkk'}) M^p \right] & \left. \right\}
 \end{aligned}$$

## Relajación lagrangiana

- El **lagrangiano** se ha definido de tal manera que, cada vez que quiero evaluar la función dual, la maximización se descompone en un conjunto de subproblemas:
  - ✓ Subproblemas horarios del mercado diario.
  - ✓ Subproblemas horarios del mercado de ajustes.
  - ✓ Subproblemas semanales de generación para cada unidad.
- **Resolver muchas veces** estos subproblemas es menos costoso que resolver el problema completo.
- Pasos a seguir:
  - ✓ Seleccionar **valores iniciales** para los multiplicadores  $(\lambda_{nk}^0, \mu_{nkk'}^0)$
  - ✓ Maximizar el lagrangiano (resolver subproblemas): se obtiene el valor de la función dual y su pendiente en el punto  $(\lambda_{nk}^0, \mu_{nkk'}^0)$
  - ✓ Actualizar los multiplicadores para reducir la función dual.



# Relajación lagrangiana



# Relajación lagrangiana

➤ Función objetivo del **subproblema de mercado diario**:

$$\textcircled{1} \quad \text{Max}_{q_{nk}} \pi_k \left[ r_{nk}(q_{nk}) + (p_n^c - p_{nk}) q_n^c \right]$$

$$\textcircled{2} \quad - \lambda_{nk}^v \left[ q_{nk} + q_n^c \right]$$

$$\textcircled{3} \quad + \sum_{k' \neq k} \left\{ \begin{aligned} & \mu_{nkk'}^q{}^v \left[ q_{nk} + x_{nkk'} M^q \right] \\ & + \mu_{nkk'}^{-q}{}^v \left[ -q_{nk} + (1 - x_{nkk'}) M^q \right] \\ & + \mu_{nkk'}^p{}^v \left[ p_{nk} + x_{nkk'} M^p \right] \\ & + \mu_{nkk'}^{-p}{}^v \left[ -p_{nk} + (1 - x_{nkk'}) M^p \right] \\ & + \left[ -\mu_{nk'k}^q{}^v + \mu_{nk'k}^{-q}{}^v \right] q_{nk} \\ & + \left[ -\mu_{nk'k}^p{}^v + \mu_{nk'k}^{-p}{}^v \right] p_{nk} \end{aligned} \right\}$$

- Se define un subproblema para cada hora y cada escenario de mercado.
- La función objetivo incluye:
  - ① Valoración de los ingresos en el mercado diario.
  - ② Valoración de los costes de producción.
  - ③ Valoración del coste asociado a las restricciones de monotonía.

# Relajación lagrangiana

## ➤ Subproblemas de **generación**:

✓ Grupo **térmico**:

$$\text{Max}_{q_{nk}^t} \sum_{k \in K} \sum_{n \in N} \lambda_{nk}^v q_{nk}^t - \pi_k c_{nk}^t$$

s.a.: Restricciones grupo  $t$

✓ Grupo **hidráulico**:

$$\text{Max}_{q_{nk}^h, b_{nk}^h} \sum_{k \in K} \sum_{n \in N} \lambda_{nk}^v \left[ q_{nk}^h - b_{nk}^h \right]$$

s.a.: Restricciones grupo  $h$

## ➤ Subproblema de **mercado de ajustes**:

$$\text{Max}_{q_{nk}^a} \sum_{k \in K} \sum_{n \in N} \pi_k r_{nk}^a \left( q_{nk}^a \right) - \lambda_{nk}^v q_{nk}^a$$

s.a.: Restricciones mercado ajustes

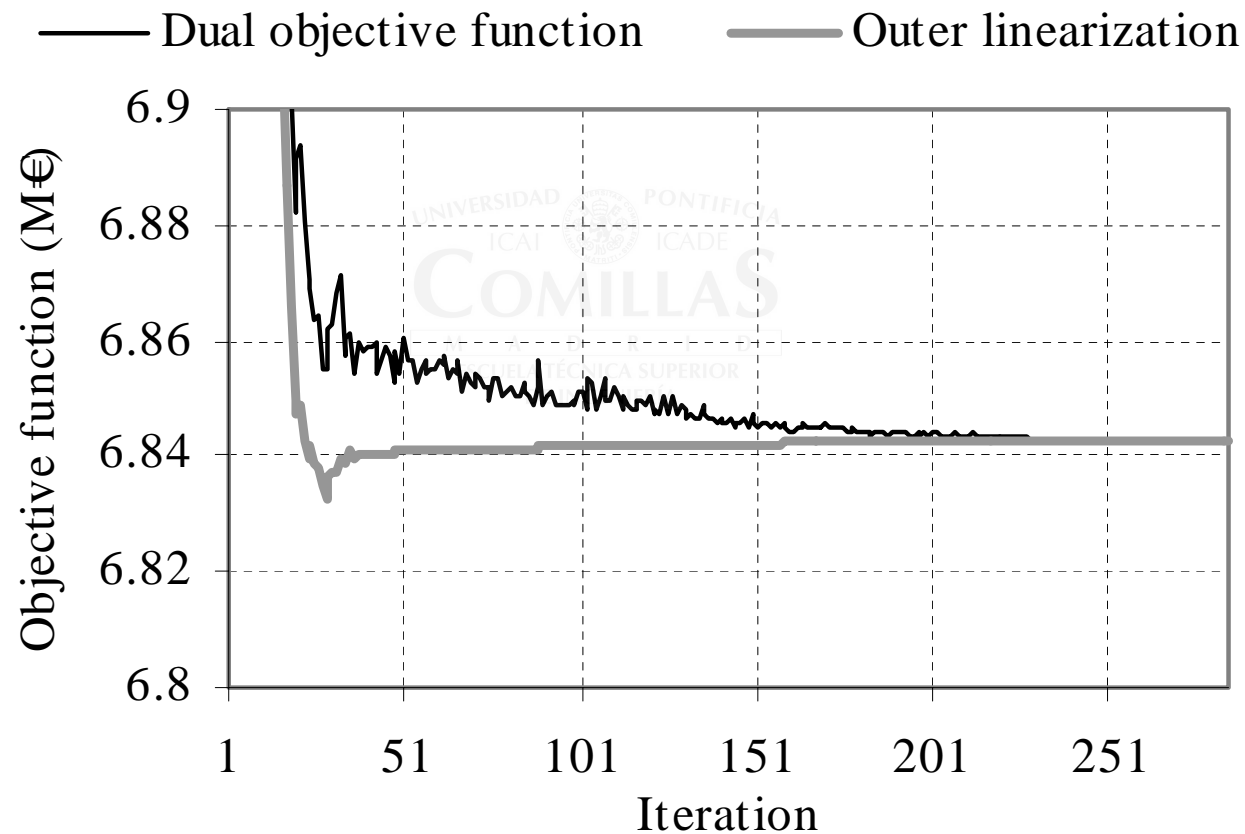
# Relajación lagrangiana

- Resolución de la aproximación lineal del problema dual:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } w \\
 & \lambda_{nk}, \mu_{nkk'} \geq 0 \\
 \\
 w \geq & \sum_{n \in N} \pi_k \left[ r_{nk}^v + r_{nk}^{av} + (p_n^c - p_{nk}^v) q_n^c - \sum_t c_{nk}^{tv} \right] \\
 & + \lambda_{nk} \left[ \sum_{g \in G} q_{nk}^{gv} - \sum_{h \in H} b_{nk}^{hv} - q_{nk}^v - q_n^{cv} - q_{nk}^{av} \right] \\
 & + \sum_{k' > k} \mu_{nkk'}^q \left[ q_{nk}^v - q_{nk'}^v + x_{nkk'}^v M^q \right] \\
 & \quad + \mu_{nkk'}^{-q} \left[ q_{nk'}^v - q_{nk}^v + (1 - x_{nkk'}^v) M^q \right] \\
 & \quad + \mu_{nkk'}^p \left[ p_{nk}^v - p_{nk'}^v + x_{nkk'}^v M^p \right] \\
 & \quad + \mu_{nkk'}^{-p} \left[ p_{nk'}^v - p_{nk}^v + (1 - x_{nkk'}^v) M^p \right]
 \end{aligned}$$

# Relajación lagrangiana

- Ejemplo de la evolución del algoritmo:



# Relajación lagrangiana

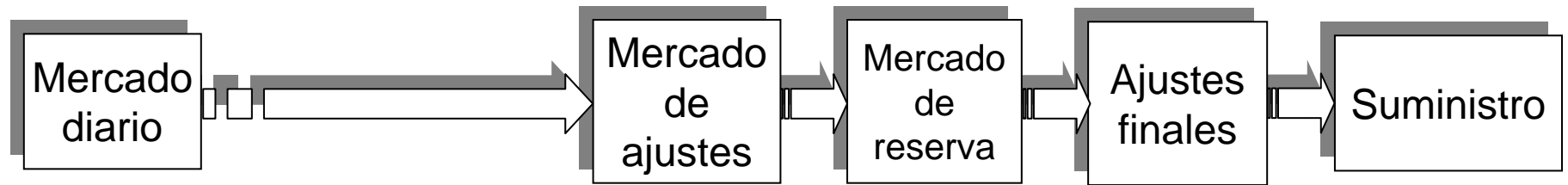
## ➤ Ventajas:

- ✓ El problema dual es **convexo**.
- ✓ La resolución de los subproblemas es sencilla (se han relajado las restricciones de complicación), incluso si tienen variables enteras.
- ✓ La actualización de los multiplicadores se lleva a cabo mediante un problema LP.
- ✓ Los multiplicadores tienen una **interpretación económica**.

## ➤ Desventajas:

- ✓ La solución óptima del dual **no es factible** para el primal (no se cumplen las restricciones de complicación).
- ✓ El valor de los multiplicadores **oscila mucho** al principio.
- ✓ Requiere de **heurísticos** para acelerar su convergencia.

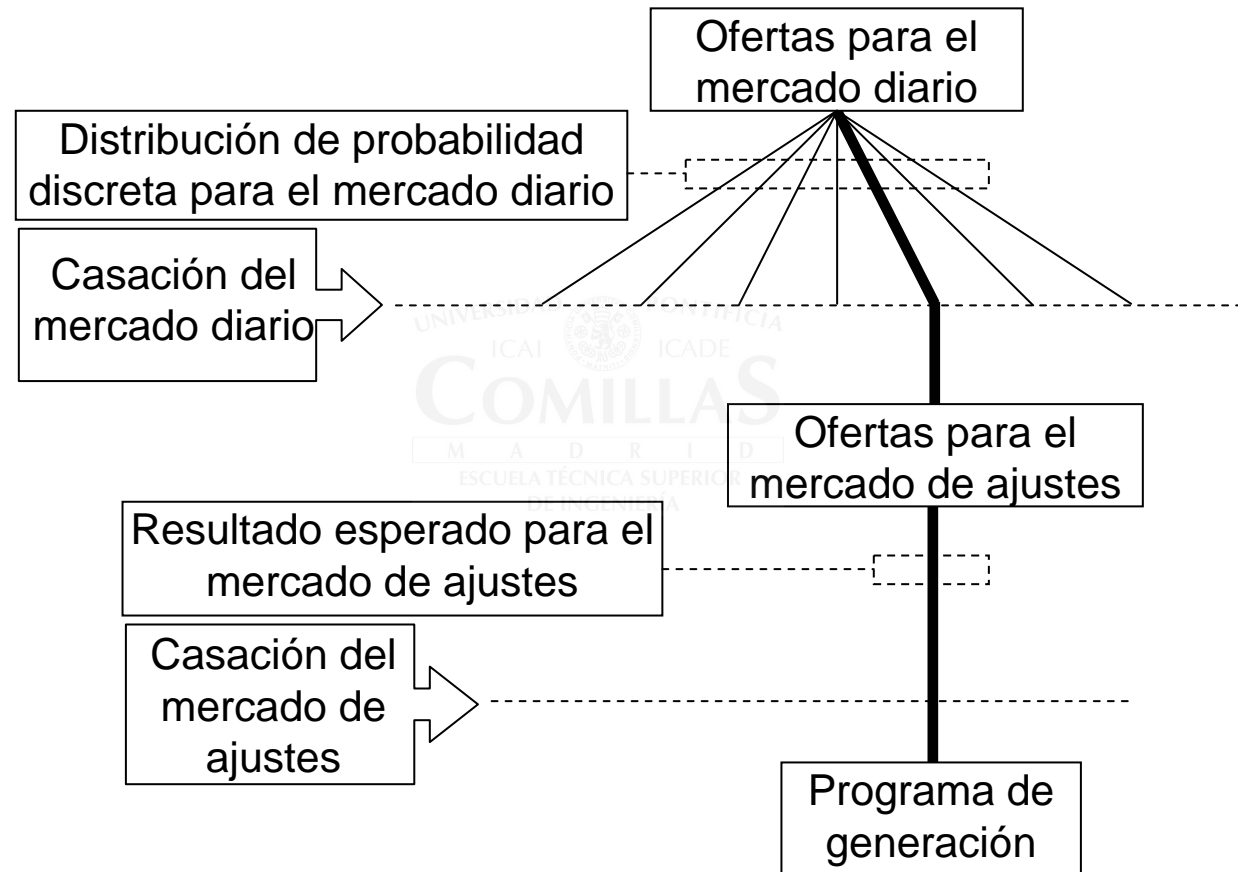
# Segundo tipo de problema: problema bietapa de preparación de ofertas



**Hipótesis: el volumen de negocio disminuye a medida que se aproxima el momento del suministro**



# Segundo tipo de problema: problema bietapa de preparación de ofertas





## Segundo tipo de problema: caracterización

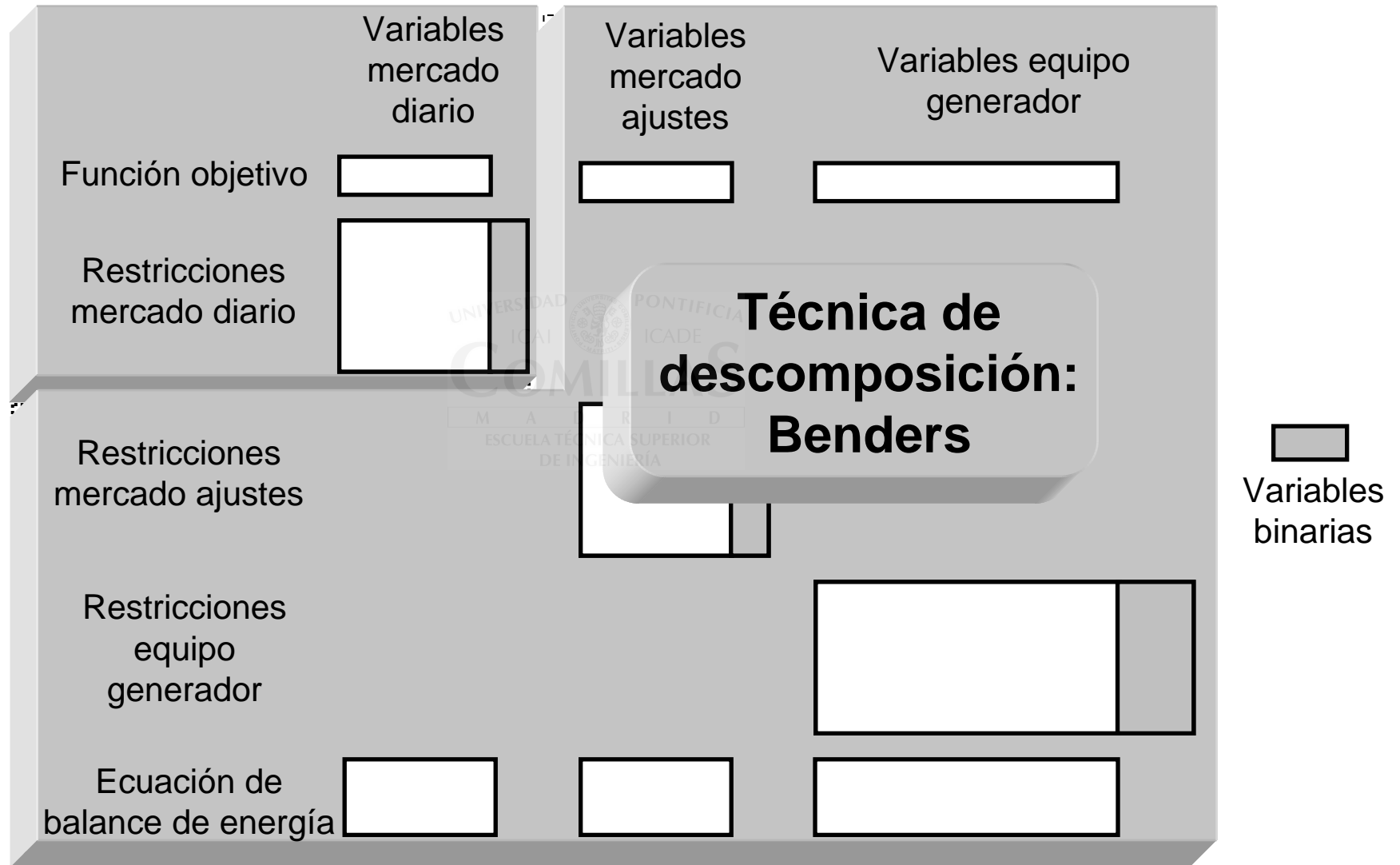
- Problema MIP.
- **Tamaño para un caso de estudio real** con once escenarios de mercado spot:

### MODEL STATISTICS

BLOCKS OF EQUATIONS	22	SINGLE EQUATIONS	99758
BLOCKS OF VARIABLES	14	SINGLE VARIABLES	91043
NON ZERO ELEMENTS	414855	DISCRETE VARIABLES	10529

- CPLEX no puede resolver este problema.
- Es necesario el uso de una **técnica de descomposición** para resolver este problema.
  - ✓ La elección de la técnica más adecuada depende de la estructura del problema.

# Análisis de la estructura del problema: Énfasis en la estructura bietapa

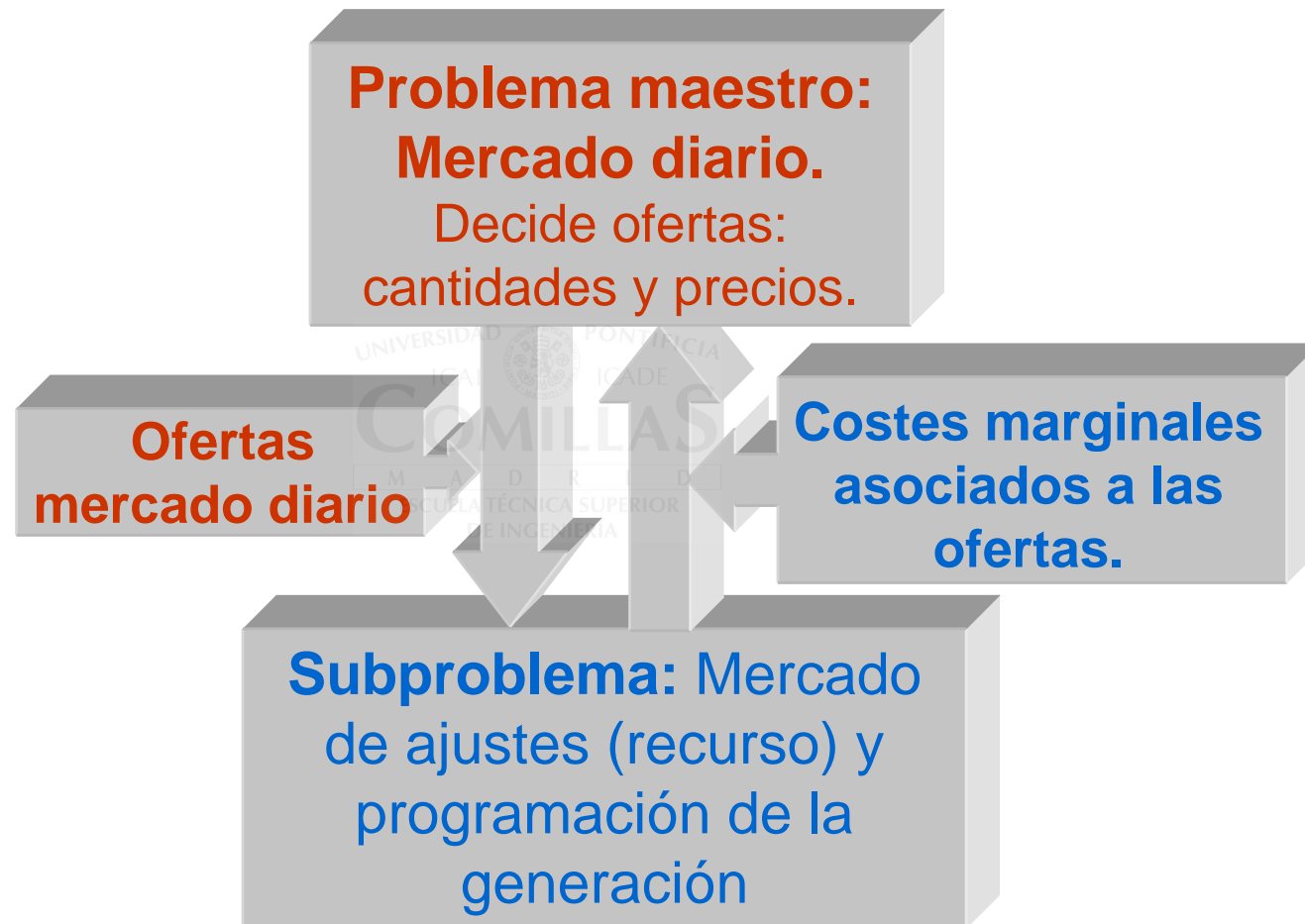


# Técnicas de resolución:

## Benders

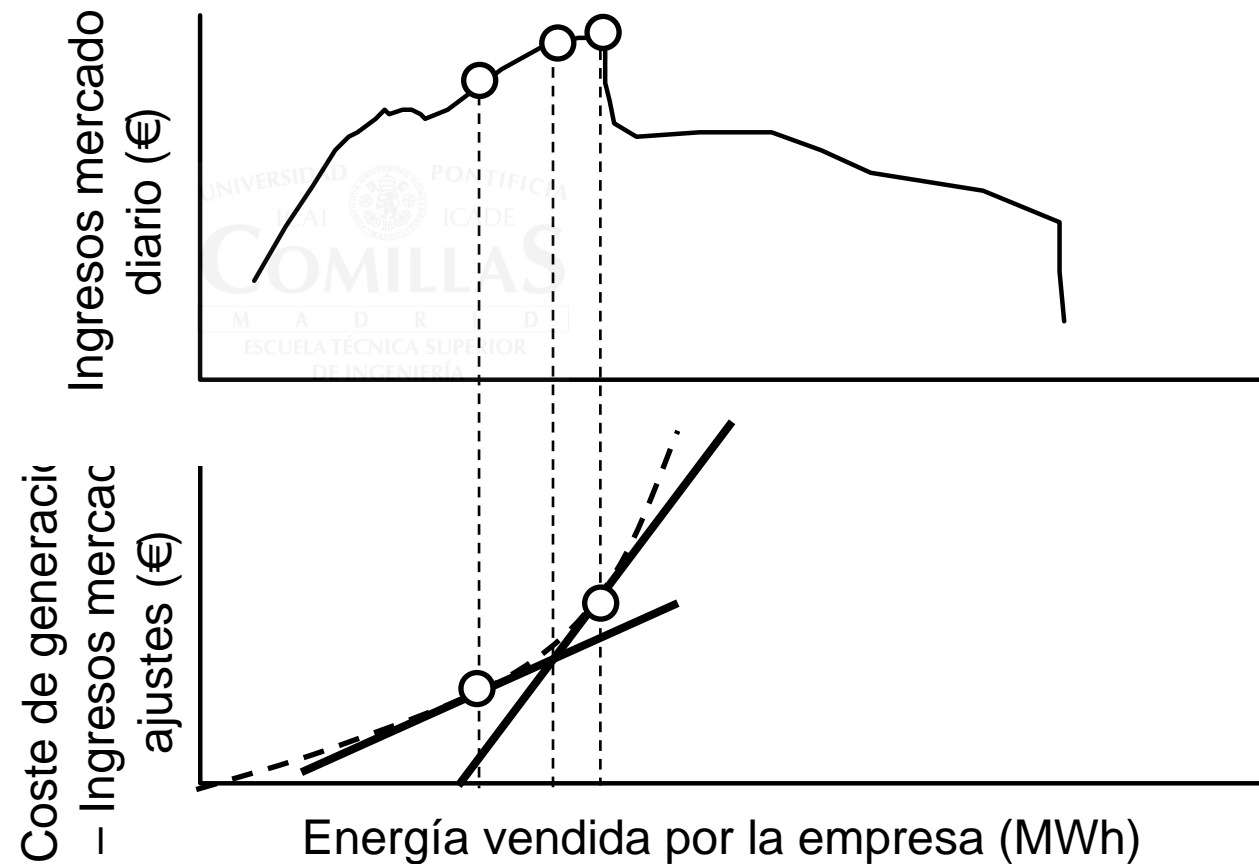
- Benders es la **opción natural** cuando el problema tiene una **estructura bietapa**.
- La descomposición de Benders se basa en dividir el problema original en **dos partes**:
  - ✓ **Problema maestro:**
    - Contiene las decisiones de la primera etapa.
    - Decisiones previas al conocimiento de un futuro incierto
    - Puede ser cualquier tipo de problema: No lineal, no convexo.
  - ✓ **Subproblema:**
    - Contiene las decisiones de la segunda etapa.
    - Decisiones para adaptarse al resultado de ese futuro incierto (decisiones de recurso)
    - Debe ser convexo: **no puede tener variables binarias**.

# Técnicas de resolución: Benders



# Técnicas de resolución: Benders

- El **problema maestro** incluye una valoración aproximada del beneficio que suponen las decisiones de recurso: **función de recurso**.



# Benders: Problema maestro

$$\begin{aligned}
 \text{Max}_{q_{nk}, \theta, u_{nk}^o, p_{nk}^o} \sum_{k \in K} \pi_k & \left[ \sum_{n \in N} p_{nk}(q_{nk}) \cdot q_{nk} + \sigma_n \frac{q_{nk}}{Q_{nk}} \right. \\
 & \left. + \sum_{c \in C^P} \sum_{n \in N} p_n^c q_n^c + \sum_{c \in C^D} \sum_{n \in N} (p_n^c - p_{nk}(q_{nk})) \cdot q_n^c \right. \\
 & \left. + \sum_{o \in O^P} \sum_{n \in N} u_{nk}^o \cdot p_n^o \cdot q_n^o + \sum_{o \in O^F} \sum_{n \in N} (p_{nk}^o - p_{nk}(q_{nk})) \cdot q_n^o \right] + \theta
 \end{aligned}$$

Ingresos mercado diario

Valor cuota mercado

Contratos

Opciones

s.a: Restricciones mercado diario

$$\theta - \theta^l - \sum_{k \in K} \sum_{n \in N} \lambda_{nk}^l (q_{nk} - q_{nk}^l) \leq 0$$

Valor de la función de recurso en la iteración  $l$ .

Variables duales que indican los costes marginales asociados a las decisiones de la primera etapa en la iteración  $l$ .



# Benders: Subproblema

$$\theta^v = \text{Max}_{\substack{q_{nk}^a, q_{nk}^t, \\ q_{nk}^h, b_{nk}^h}}$$

$$\sum_{k \in K} \pi_k \left[ \sum_{n \in N} p_{nk}^a (q_{nk}^a) \cdot q_{nk}^a \right]$$

Ingresos mercado de ajustes

$$- \sum_{t \in T} \sum_{n \in N} c_{nk}^t (q_{nk}^t, y_{nk}^t, u_{nk}^t)$$

Costes de producción

s.a: Restricciones mercado ajustes

Restricciones equipo generador

$$\sum_{t \in T} q_{nk}^t + \sum_{h \in H} q_{nk}^h - b_{nk}^h - q_{nk}^a = q_{nk}^v + \sum_{c \in C^P} q_n^c + \sum_{o \in O^P} u_{nk}^o{}^v q_n^o$$

Ecuación de balance de energía en la iteración  $v$ .

# Técnicas de resolución:

## Benders

### ➤ Ventajas:

- ✓ Descomposición **más natural** para la estructura bietapa del problema de construcción de ofertas:
  - **Maestro** correspondiente al mecanismo de mercado actual (e.g. mercado diario): modelado detallado.
  - **Subproblema** correspondiente al siguiente mecanismo de mercado y al programa de generación.
- ✓ **Solución final factible**, incluso si el proceso se detiene antes de tiempo.

### ➤ Inconvenientes:

- ✓ El **subproblema debe ser convexo**: no puede incluir variables binarias:
  - Modelado del mercado de ajustes simplificado.
  - No se pueden decidir arranques y paradas de grupos.



# Técnicas de resolución:

## Conclusiones

### ➤ Problema de planificación semanal:

✓ **RL** es el método idóneo:

- Proporciona una buena aproximación de la solución incluso aunque haya un gran número de variables binarias.
- El incumplimiento de la ecuación de balance de potencia no es crítico de cara a decidir los arranques y paradas de los grupos y el reparto de la energía hidráulica a lo largo de la semana.
- Benders es inviable.

### ➤ Problema de preparación de ofertas bietapa:

✓ **Benders** es un método más adecuado que RL:

- Proporciona una solución factible.
- Converge mucho más rápidamente (~100 veces).
- Las simplificaciones que exige son razonables.

# Contenido

1. Modelo de coste de explotación a medio plazo con restricciones de equilibrio
2. Modelo de equilibrio de mercado mediante el problema complementario
3. Modelo de generación de ofertas mediante técnicas de descomposición
- 4. Análisis dinámico de estrategias de ofertas**
5. Modelo de coordinación hidrotérmica a medio plazo mediante descomposición anidada estocástica de Benders para variables enteras

# Análisis dinámico de estrategias de ofertas

## ➤ Publicaciones

- ✓ A. Ramos, A. Baíllo, S. López, M. Rivier, M. Ventosa *Analysis of short-term dynamic behavior of an electricity market* Internal Report IIT-02-057A September 2001



# Models for competitive markets

- **Static equilibrium models**
  - ✓ Static representation of competition among companies
  - ✓ All the agents play the game in a **single act**
  - ✓ Resort to **optimization**
- **Dynamic simulation models**
  - ✓ The order of the bids is important
  - ✓ The game is played by the agents in **multiple acts** (many stages)
  - ✓ Resort to **simulation**

# Static equilibrium models

- Two main approaches to model static market equilibrium:
  - ✓ Cournot (firms compete only in quantities)
  - ✓ Supply function equilibrium (in quantities and prices)
- A great number of models are based on Cournot equilibrium
- Time scope
  - ✓ Long-term: expansion planning
  - ✓ Medium-term: hydrothermal coordination, contracting decisions, risk management
  - ✓ Short-term: strategic unit commitment



# Short-term dynamic decision process

- Main objectives of the model:
  - ✓ How the guidelines of medium-term models are internalized into daily offers sent to a day-ahead single-node electricity market. How to reach medium-term objectives by means of short-term decisions
  - ✓ How to analyze severe market perturbations
- At the same time:
  - ✓ How to analyze the consequences of different decisions
  - ✓ Review past results to gain understanding of the market

# Game theory approach

- Provides the general framework to characterize the market: **N-person discrete-time stochastic infinite noncooperative dynamic game**
  - ✓ **N-person**: more than two players
  - ✓ **Discrete-time**: game is played only at certain periods
  - ✓ **Stochastic**: “nature” may affect the results of the game in an unpredictable way
  - ✓ **Infinite**: any player can use “infinite” actions and strategies
  - ✓ **Noncooperative**: each agent pursues his own interests, ignores the others behavior
  - ✓ **Dynamic**: the order in which decisions are made is important
  - ✓ **Multi-act** or **multi-stage**: the game is played repetitively along the time
- Only **equilibrium conditions** are obtained under game theory

# Simulation approach

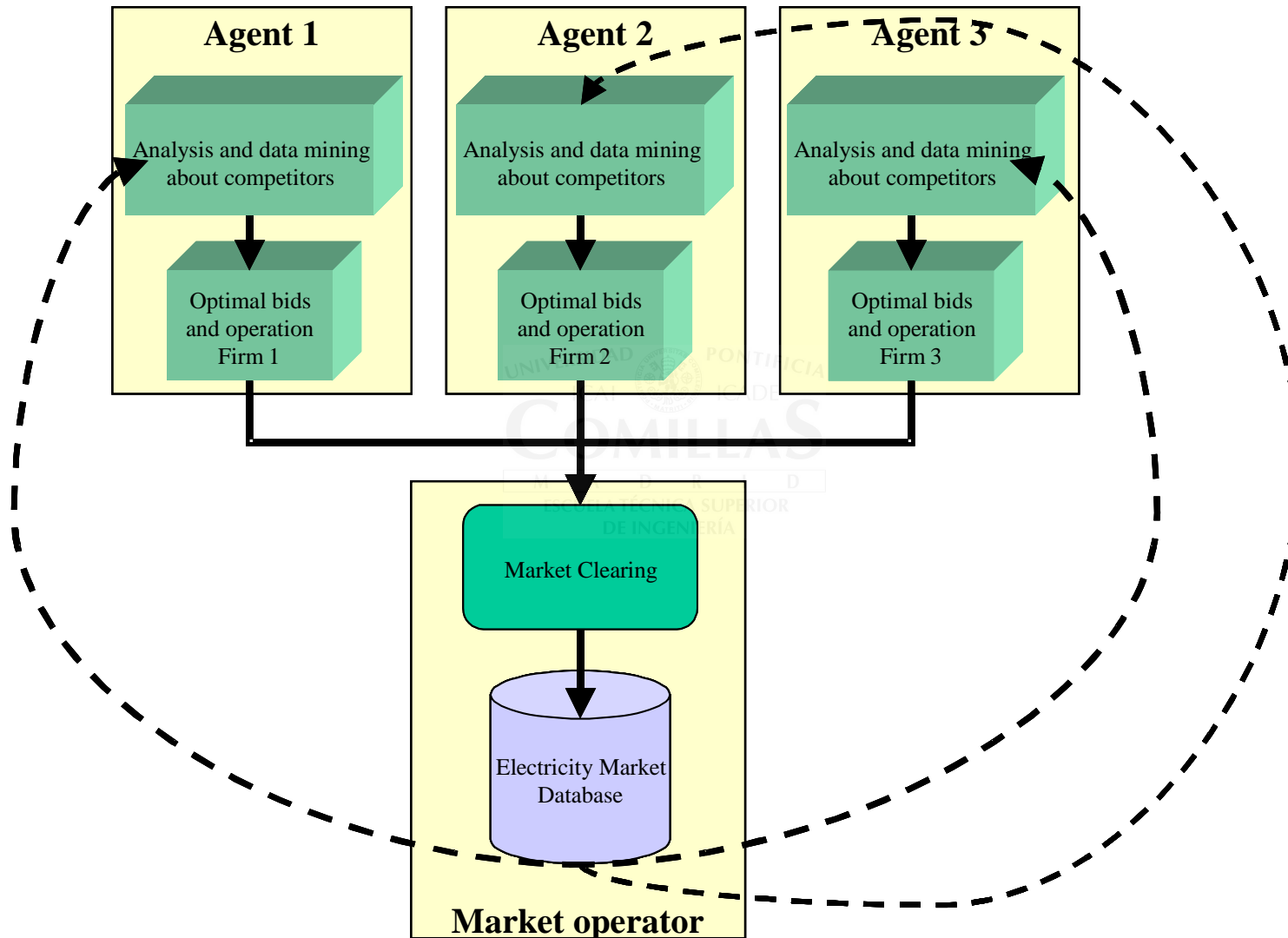
- Represent, analyze, and provide quantitative results of the electricity market game
- Main characteristics of simulation:
  - ✓ Capability of modeling complex systems
  - ✓ Ability to incorporate the dynamic aspects
- Drawback: more complex to understand, much more effort to validate
- Helpful training tool for traders, better understanding of the electricity market in the short-term



# System characterization

- Each generation agent
  1. Analysis and **data mining** about the competitors' behavior
  2. Determination of **optimal bids** and expected operation
- **Market operator**
  1. Receives the daily offers from the agents
  2. Clears the market according to the specified rules
  3. Incorporates the information to a database accessible for any agent. Publishes the daily results
- **System operator** is currently **ignored**

# Electricity market simulator structure



## Model implementation (i)

- Some **indices of the system performance** are obtained (market share and market revenues for each generation agent, and SMP).
- These results should conduct the **reaction of each agent in the repetition of the game**. They can incorporate some **reaction mechanism** (e.g., **aggressive or conservative decision rules**) that considers the achievement degree of these objectives depending on the results obtained in the previous days.
- Bids could be further manipulated to consider **other different complementary objective functions** that are translated to the bids.
- **Feedback mechanism** closed through the information that any agent gets from the market operator and **internalizes it in the previous step**.

## Model implementation (ii)

- Simulation allows **modules** to be **conceived as black boxes**.
- Each module **can be adapted to any specific company** (with emphasis in hydro production, thermal commitment decisions), **can use the same or different mathematical representation for each company**.
- In the simplest case the bidding module **can just replicate past bids** (e.g., fringe companies).

# Contenido

1. Modelo de coste de explotación a medio plazo con restricciones de equilibrio
2. Modelo de equilibrio de mercado mediante el problema complementario
3. Modelo de generación de ofertas mediante técnicas de descomposición
4. Análisis dinámico de estrategias de ofertas
5. Modelo de coordinación hidrotérmica a medio plazo mediante descomposición anidada estocástica de Benders para variables enteras

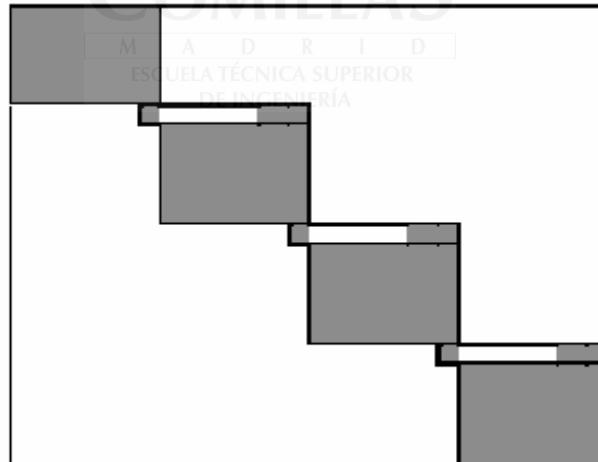
# Modelo de coordinación hidrotérmica a medio plazo

## ➤ Publicaciones

- ✓ S. Cerisola, A. Ramos *Benders Decomposition for Mixed-Integer Hydrothermal Problems by Lagrangean Relaxation* 14th Power Systems Computation Conference (PSCC '02) Seville, Spain June 2002
- ✓ S. Cerisola, A. Ramos *Node Aggregation in Stochastic Nested Benders Decomposition Applied to Hydrothermal Coordination* 6th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems Madeira, Portugal September 2000
- ✓ B. Vitoriano, S. Cerisola, A. Ramos *Generating Scenario Trees for Hydro Inflows* 6th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (PMAPS) Madeira, Portugal September 2000

# Hydrothermal coordination problem

- Minimization of total operation cost subject to demand supply.
- Multiperiod problems usually present a staircase matrix structure suitable to be solved via a Benders decomposition algorithm.



# Mixed integer variables

- Appear when modeling nonlinear curves (e.g., PQH curves) as a piecewise functions
- Mixed integer variables that represent commitment, start up and shut down of thermal units





# Benders decomposition review (I)

- Resolution of an LP problem with the form

$$\min z = c^1 x + c^2 y$$

$$A^{11} x = b^1$$

$$A^{21} x + A^{22} y = b^2$$

$$x \geq 0, y \geq 0; x, y \in \mathbb{R}^n$$

via formulating a master problem that considers all ‘first stage’ variables  $x$  and a subproblem in the remaining variables  $y$

# Benders decomposition review (II)

- LP master Problem (MP)

$$\min z = c^1 x + \theta(x)$$

$$A^{11} x = b^1$$

$$x \geq 0, x \in V$$

- LP subproblem (S)

$$\theta(x) = \left\{ \min c^2 y / A^{22} y = b^2 - A^{21} x / y \geq 0 \right\}$$

with

$$V = \{x / \theta(x) < \infty\}$$

## Benders decomposition review (II)

- Master problem MP is solved by sequentially outer approximating the recourse function  $\theta(x)$  and the set  $V$ . This outer approximations define a relaxed master problem (RMP) with the form

$$\min z = c^1 x + \theta$$

$$A^{11} x = b^1$$

$$0 \geq \sigma^k (b^2 - A^{21} x) \quad k = 1, \dots, K \quad \text{feasibility cut}$$

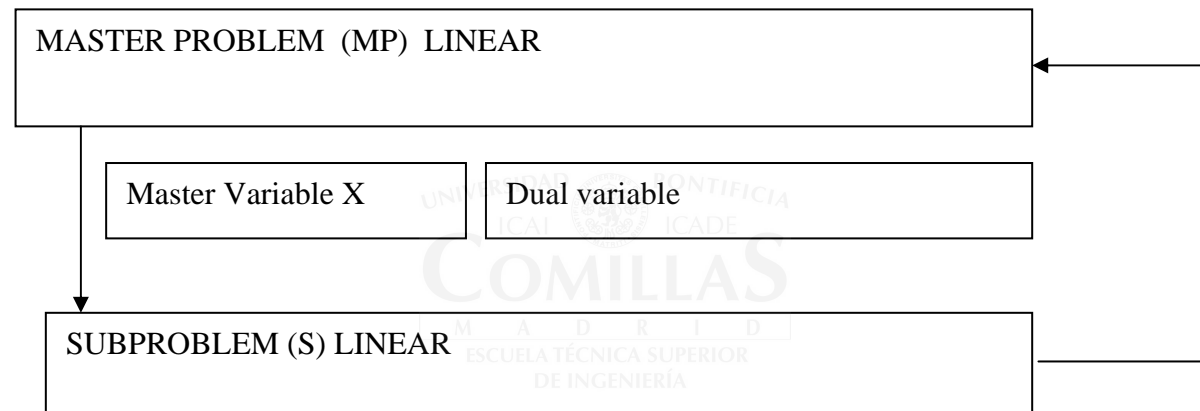
$$\theta \geq \pi^j (b^2 - A^{21} x) \quad j = 1, \dots, J \quad \text{optimality cut}$$

$$x \geq 0$$



# Benders decomposition review (IV)

- The Benders decomposition algorithm is summarized on the following picture



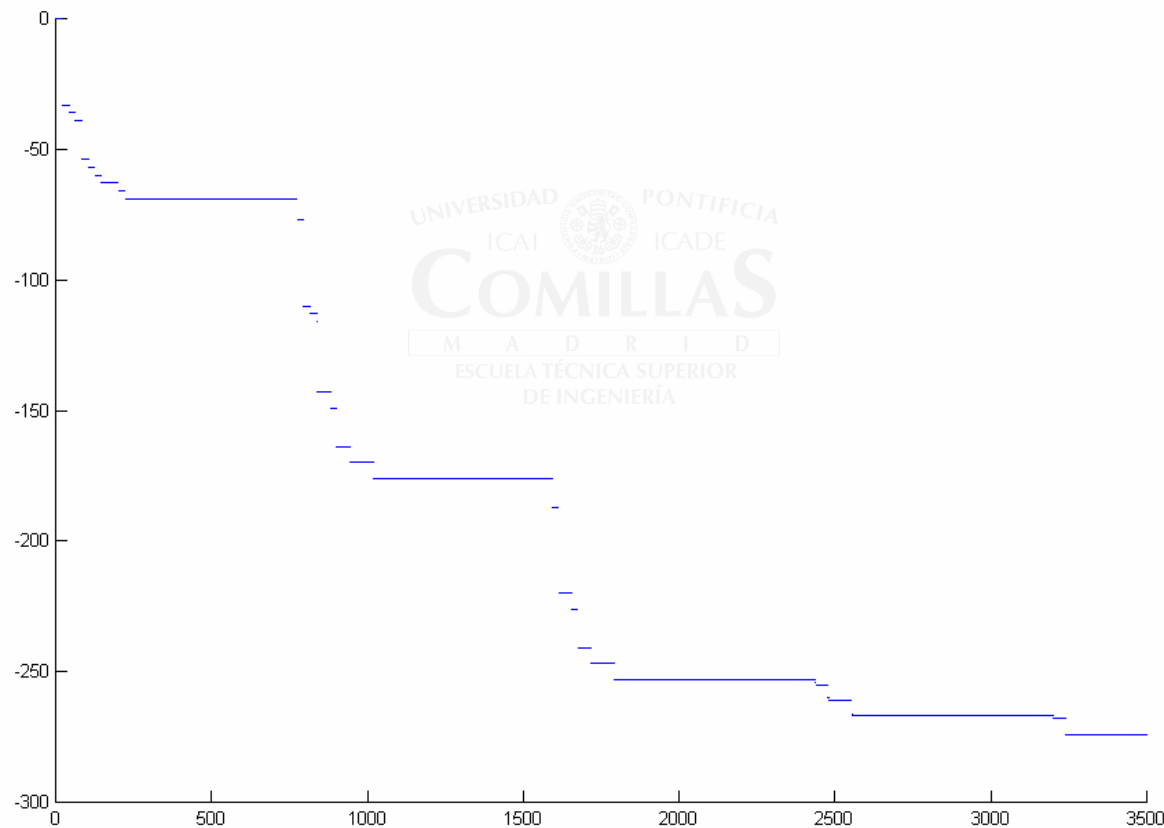
# Benders decomposition review (V)

- Benders algorithm is based on the linear duality theorem that guarantees the solution of the primal problem to be equal to the solution of the dual problem.
- In particular this leads to the convexity of the recourse function.



# Extension to mixed integer variables (I)

- Example of non convex recourse function for a MIP problem



UNIVERSIDAD PONTIFICIA  
ICAI ICADE  
**COMILLAS**  
M A D R I D  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR  
DE INGENIERÍA

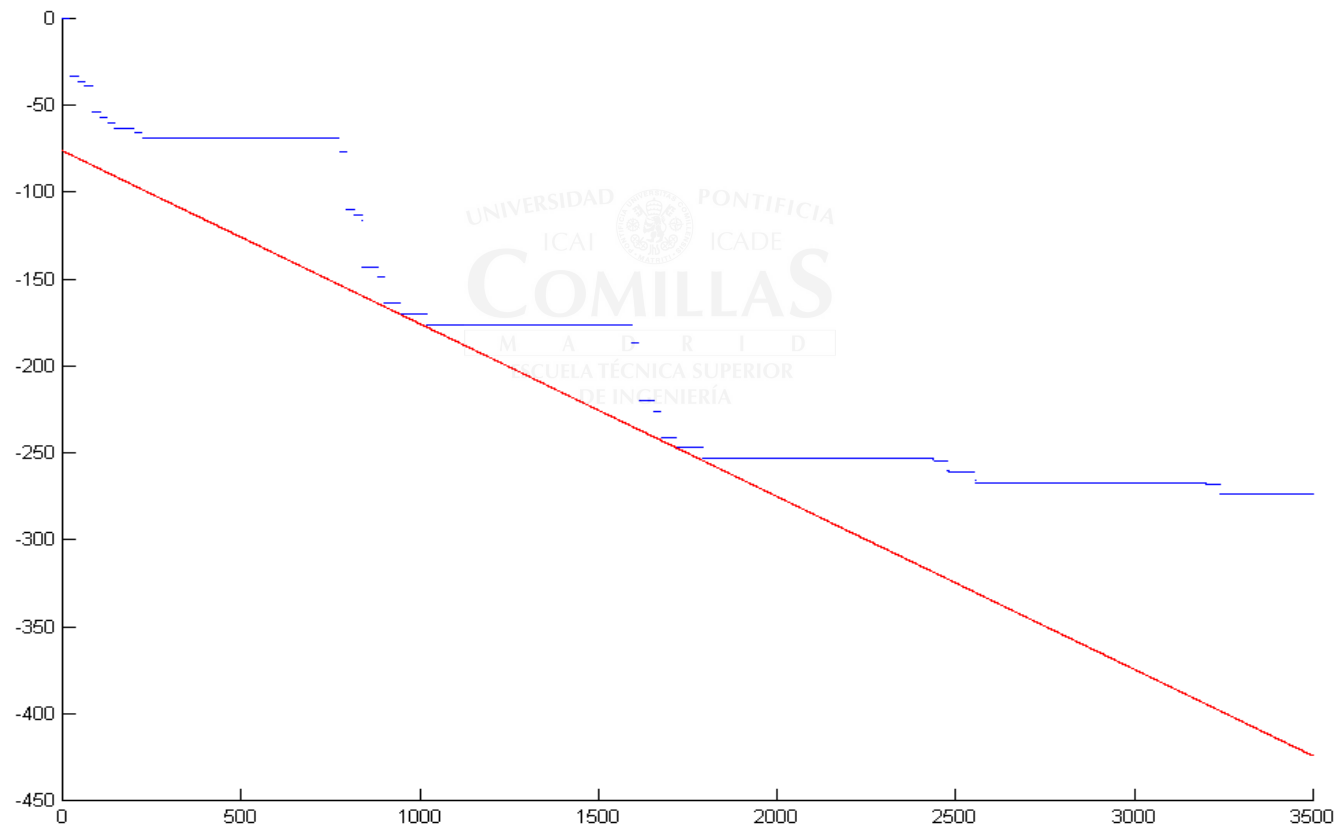
## Extension to mixed integer variables (II)

- Using Geoffrion results a partial convexification of the recourse function is obtained using a Lagrangean relaxation algorithm to solve the Benders subproblem.



# Extension to mixed integer variables (III)

- Example of non convex recourse function for a MIP problem





## Extension to mixed integer variables (IV)

- Using Geoffrion results a partial convexification of the recourse function is obtained using a Lagrangean relaxation algorithm to solve the Benders subproblem.
- The relaxed equations are those that connect first and second stage variables.
- In a hydrothermal coordination problem these are the equations of reserve management and the equations that represents start up and shut down variables for thermal units

$$R_{p-1} + I_p - P_p = R_p$$

$$c_p - c_{p-1} = a_p - p_p$$

# Lagrangian Relaxation (I)

1. To solve the MIP Benders Subproblem (S) via Lagrangian relaxation we formulate the dual problem (D) that consist of

$$(D) \quad \max \{w(\lambda), \lambda \geq 0\}$$

2. With Lagrangian subproblem (LS)

$$(LS) \quad w(\lambda) = \min c^2 y + \lambda (A^{22} y - b^2 + A^{21} x)$$
$$y \in Y, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{Z}^{m_2}$$

## Lagrangian relaxation (II)

- The resolution of the dual problem (D) is carried out formulating a relaxed dual problem (RD) and a subproblem that outer approximates the dual function

$$\max w$$

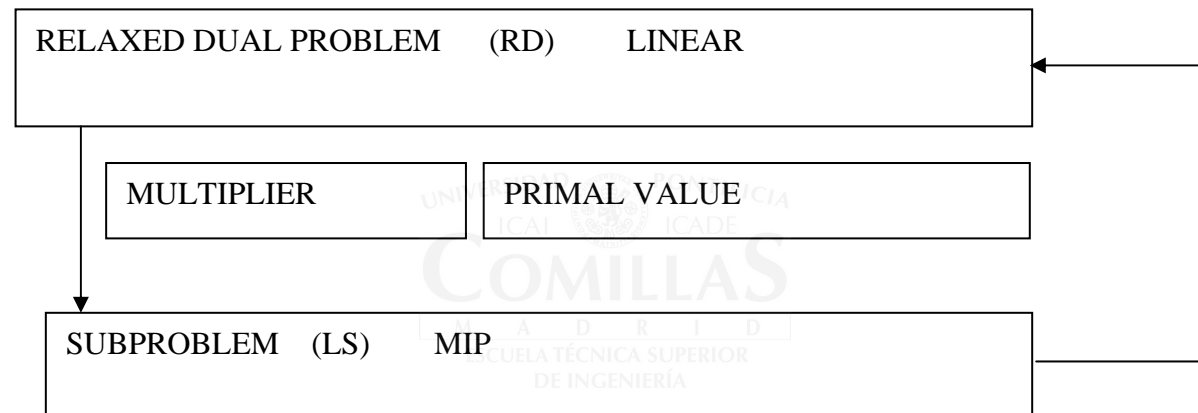
$$w \leq c^2 y^k + \lambda (A^{22} y^k - b^2 + A^{21} x)$$

$$(RD) \quad y^k \in \text{conv} \left\{ y \in Y, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{Z}^{m_2} \right\}$$

$$k : 1, \dots, K$$

# Lagrangean Relaxation (III)

- Summary of the Lagrangean Relaxation algorithm



# Lagrangian Relaxation (IV)

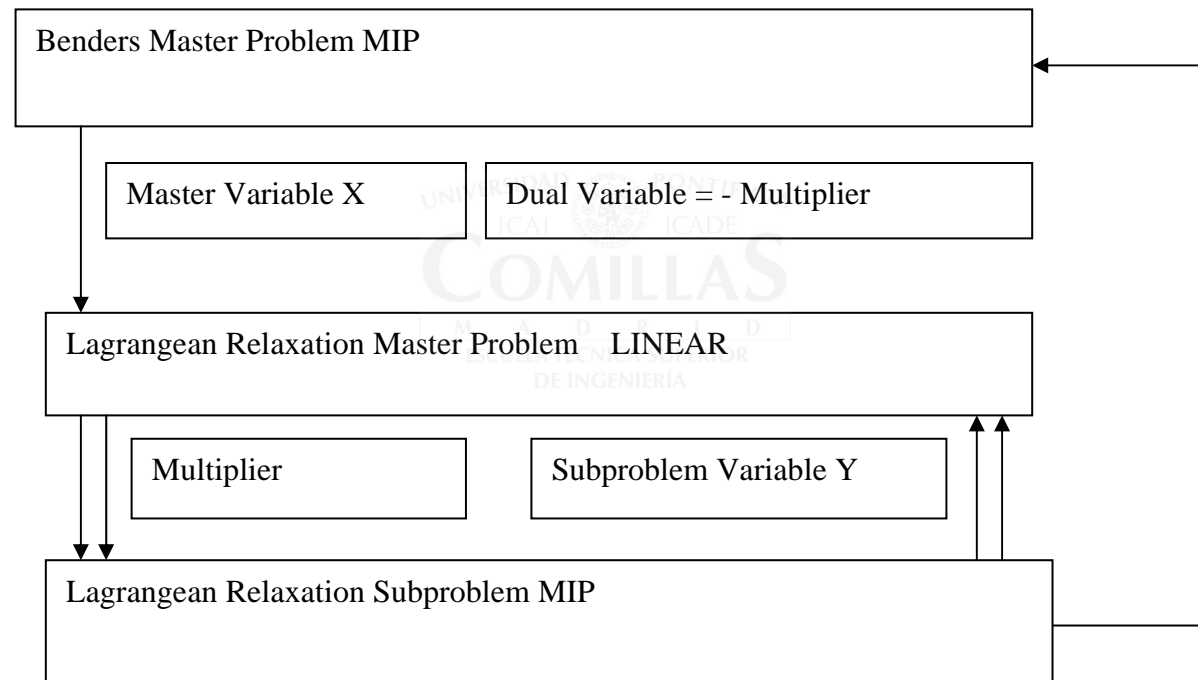
## ➤ Phase I

- ✓ Determines the minimum number of Lagrangian cuts needed to have a bounded relaxed dual problem (RD).
- ✓ In case of unboundness of the relaxed dual problem the lagrangian relaxation phase I finishes with the minimization of infeasibilities of the subproblem due to the coupling constraints

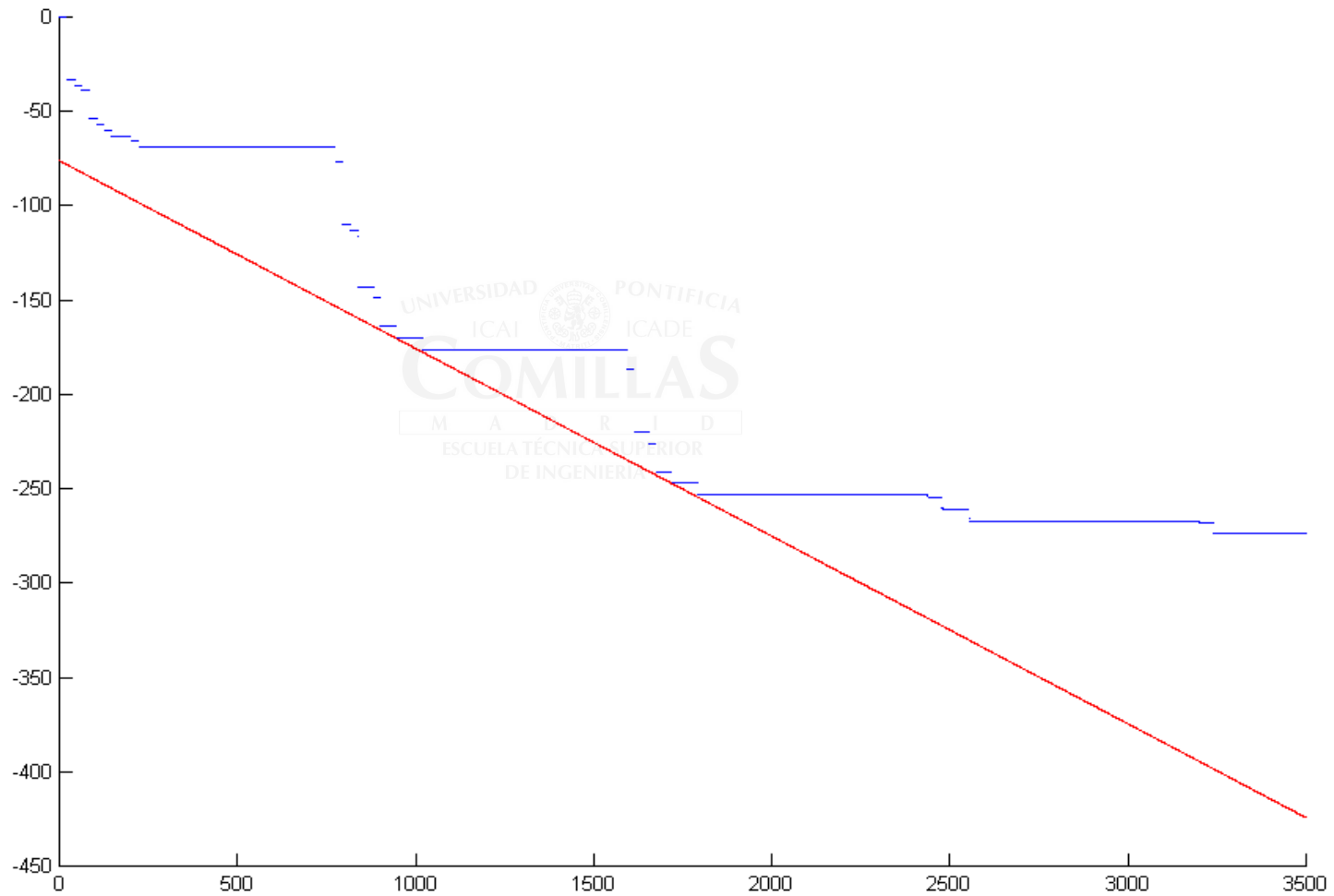


# Lagrangian Relaxation (V)

- Benders decomposition with MIP subproblem



# Lagrangean Relaxation (VI)



# Numerical Results (I)

- Results for a MIP deterministic 12 period problem.
- Coded in a modeling language
- Resolution via two stage decomposition

Master per.	Master size (r,v,n,b)				Subproblem size (r,v,n,b)				Bd Iter.	LR Iter.	Exec. time (s)	Solution time (s)
1	1605	2183	6767	146	17127	23374	72167	1606	11	166	3365	7438
1,2	3128	4265	13165	292	15604	21292	65769	1460	22	196	4646	10065
1,2,3	4644	6342	19569	438	14089	19215	59391	1314	18	176	2908	7184
1,2,3,4	6215	8489	26179	584	12517	17068	52755	1168	40	266	5209	15264
1,2,3,4,5	7714	10541	32476	730	11018	15016	46458	1022	42	243	2861	8327
<b>1,2,3,4,5,6</b>	<b>9316</b>	<b>12721</b>	<b>39238</b>	<b>876</b>	<b>9416</b>	<b>12836</b>	<b>39696</b>	<b>876</b>	<b>4</b>	<b>266</b>	<b>1075</b>	<b>3673</b>
1,.....,7	10906	14890	45950	1022	7826	10667	32984	730	5	304	1063	3860
1,.....,8	12463	17019	52521	1168	6269	8538	26413	584	71	413	5426	32176
1,.....,9	15598	21306	65747	1314	3134	4251	13187	438	94	336	2771	22737

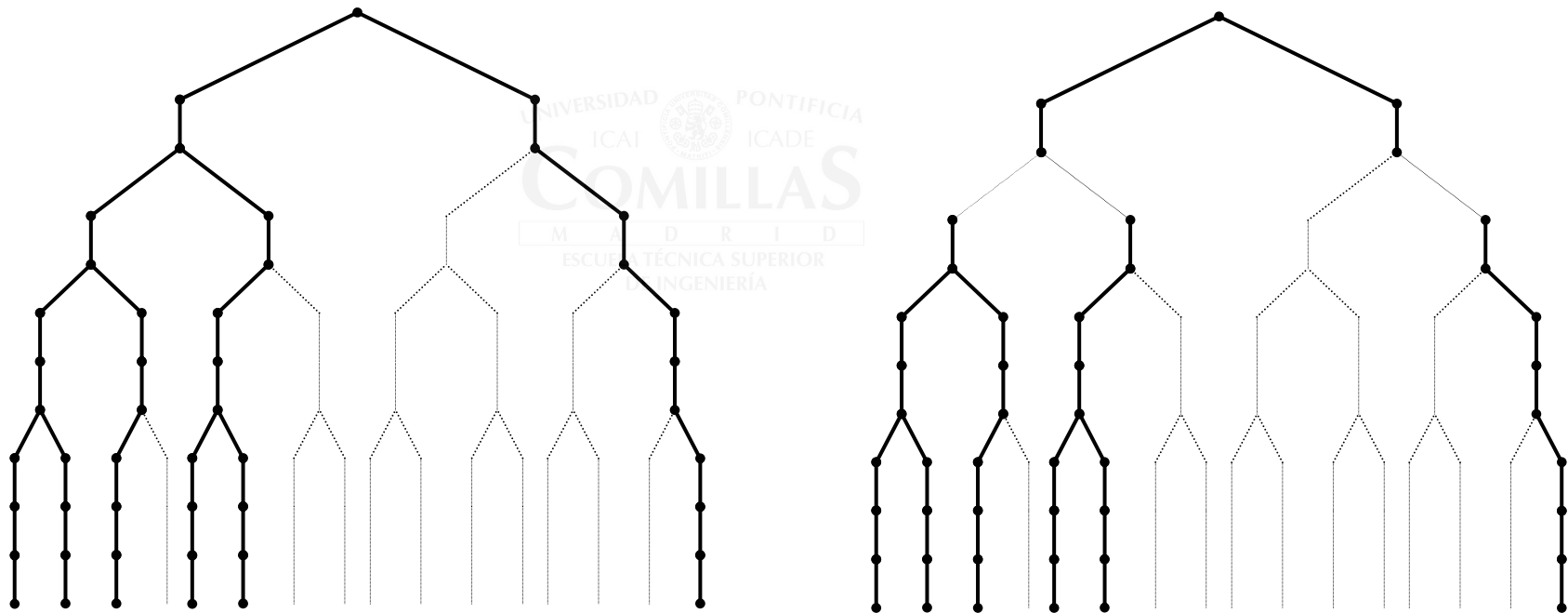
Table 1. Iterations for a MIP fastpass traversing strategy.

- Numerical results of the last column due to the modeling language.



## Numerical results (II)

- Extension to stochastic problems
- Resolution of a stochastic problem via subtree decomposition



## Numerical Results (III)

- Resolution of a stochastic problem via subtree decomposition

Decomposition	Feasibility strategy			
	Bd It	Sol time	Exec time	Quality
1	OUT OF MEMORY			
1 2	2	408	294	3.2e-6
1 2 4	5	3258	2558	3.2e-6
1 2 4 6	17	2762	1056	158.1e-6
1 3 5	11	2554	1801	158.1e-6
1 2 3	5	648	340	80.6e-6

Table 4. Comparison among subtrees.