



**Jesús María Latorre Canteli**

Ingeniero Industrial del ICAI (1995) y Doctor Ingeniero Industrial del ICAI (2007). Es investigador en el Instituto de Investigación Tecnológica.



**Andrés Ramos Galán**

Ingeniero Industrial del ICAI (1982) y Doctor Ingeniero Industrial por la UPM (1990). Es investigador del Instituto de Investigación Tecnológica y Profesor Propio Ordinario de la ETS de Ingeniería (ICAI) de la Universidad Pontificia Comillas.



**Rafael Palacios Hielscher**

Ingeniero Industrial del ICAI (1990) y Doctor Ingeniero (1998). Es investigador del Instituto de Investigación Tecnológica y Profesor Propio del Departamento de Sistemas Informáticos. Imparte clases de programación y de seguridad informática en las titulaciones de Ingeniero Industrial y de Ingeniero en Informática del ICAI.

**Comentarios a:**  
[comentarios@icai.es](mailto:comentarios@icai.es)



## Optimización bajo incertidumbre. Técnicas de descomposición y aplicación en Grid

Al optimizar procesos cuyo comportamiento no está determinado a priori, es necesario considerar la incertidumbre asociada a la predicción de dicho comportamiento. Esto conlleva la construcción de modelos de gran tamaño que tengan en cuenta esa incertidumbre y ofrezcan resultados que sean óptimos frente al abanico de situaciones posibles. Ejemplos de este tipo de problemas son la planificación y operación de sistemas eléctricos, la planificación de la producción, la logística del transporte, la gestión de cartaras de valores... Como consecuencia de su gran tamaño, en muchas ocasiones es necesario descomponer los problemas de optimización estocástica para poder resolverlos. En este artículo se revisan las técnicas más habituales de descomposición aplicadas a problemas lineales y se presenta una variante que permite aprovechar las posibilidades que ofrecen los grid, que son entornos de cálculo distribuido que reúnen gran cantidad de recursos de cálculo. El enfoque empleado para este artículo se centra en la descripción de los conceptos básicos de los algoritmos de

descomposición, aunque para una explicación formal y detallada pueden consultarse [Birge, 1997] o [Kall, 1994].

### Optimización estocástica

La optimización es una herramienta de ayuda en la toma de decisiones que permite escoger la mejor estrategia para alcanzar un objetivo. Para esto es necesario modelar como problema de optimización el entorno en el que se produce esa toma de decisión. Este problema de optimización puede involucrar parámetros cuyo valor no es conocido exactamente en el momento de decidir. Cuando existe incertidumbre sobre los datos del problema se habla de optimización estocástica, a diferencia de la optimización determinista en la que todos los parámetros son conocidos en el momento de tomar la decisión. Ejemplos de parámetros con incertidumbre son la demanda esperada de un producto en el mercado o los precios de una materia prima. La estocasticidad puede influir en muchos aspectos relacionados directa o indirectamente con el

problema que se considere, aunque desde el punto de vista de la optimización estocástica sólo es relevante representar cómo afecta esta estocasticidad a los parámetros del problema.

Suele considerarse que el proceso de toma de decisiones está dividido en etapas, entre las cuales tiene lugar la realización de una parte de la incertidumbre. Por ejemplo, si se considera la gestión trimestral de un embalse hidráulico durante un año, las etapas son los trimestres al comienzo de los cuales debe decidirse cuánta agua gastar; y a lo largo de cada trimestre se producen las lluvias que modifican las reservas disponibles para los siguientes trimestres. Las decisiones en cada etapa futura dependen tanto de la incertidumbre en etapas anteriores como de las decisiones tomadas en esa etapa; en consecuencia, el proceso polietápico de toma de decisiones se desarrolla de la siguiente forma:

- Se toma la decisión inicial de la primera etapa. En esta etapa no se considera estocasticidad pues representa la situación inicial conocida.
- Se produce la realización de las variables aleatorias de la segunda etapa.
- Considerando las decisiones de la primera etapa y la aleatoriedad ya conocida, se toma la decisión de la segunda etapa.
- Se produce la realización de las variables aleatorias de la tercera etapa.
- Continúa el proceso, tomando las decisiones de cada etapa tras conocerse la realización de la incertidumbre en esa etapa.

Un escenario es una realización de la aleatoriedad a lo largo de todas las etapas en que se divide el proceso de toma de decisión, y está compuesto por nodos, que corresponden con los valores que toma el escenario en cada etapa. En la Figura 1 se muestra un escenario para el problema de gestión hidráulica mencionado anteriormente, en el que cada círculo representa un nodo (es decir el problema de decisión de un trimestre) y el escenario, que comprende los nodos de las cuatro etapas, es el problema de un año completo.

Una de las maneras más habituales de representar la estocasticidad en los problemas de optimización es mediante el empleo de árboles de escenarios. La peculiaridad de los árboles es que cuando dichos escenarios consideran la misma realización de la incertidumbre en las etapas iniciales, comparten los nodos de esas etapas y ramifican en etapas

Figura 1. Ejemplo de escenario de cuatro nodos

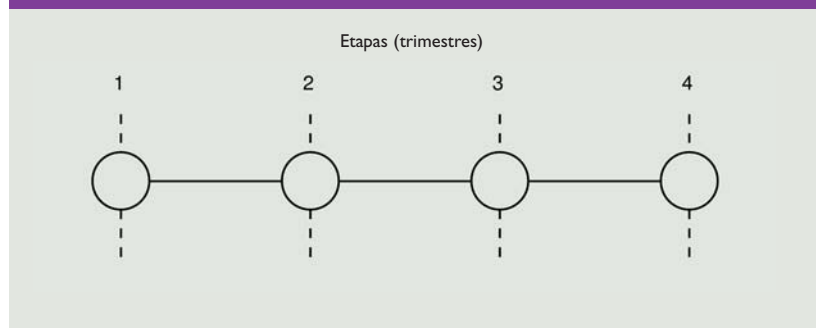
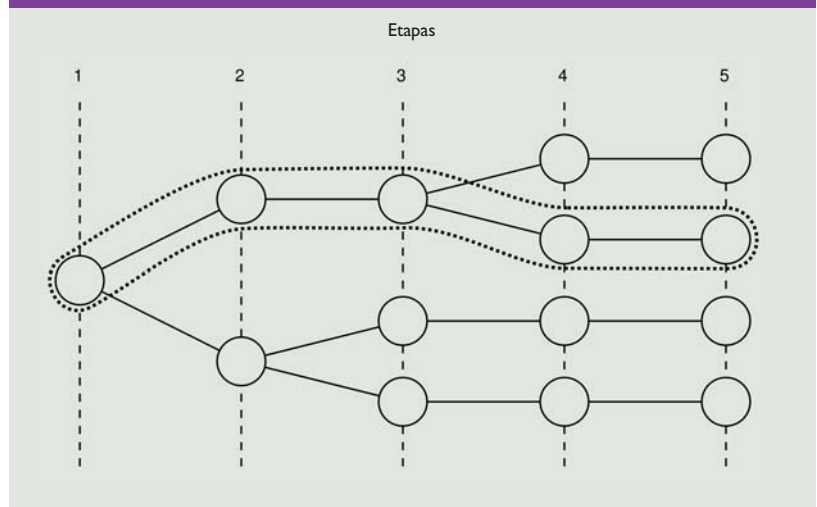


Figura 2. Ejemplo de árbol de escenarios



posteriores. Esto da lugar a una estructura en árbol como la que se ve en la Figura 2, en la que se ha señalado el escenario 2 con una línea de puntos. La estructura del árbol representa que:

- Se parte de una situación inicial conocida y por ello hay un solo nodo inicial.
- Según se avanza hacia el futuro, el transcurso de los procesos aleatorios es menos conocido. Por eso se producen ramificaciones en los escenarios y aumenta el número de nodos en las siguientes etapas.

### Técnicas de descomposición

Cuando se trata con problemas de gran tamaño que no pueden ser resueltos en los equipos informáticos disponibles, suele recurrirse a técnicas de descomposición, que permiten fragmentar el problema y coordinar la resolución de los subproblemas para alcanzar la solución del problema completo. En este sentido, las técnicas de descomposición se pueden ver como estrategias de partición del grafo que representa el árbol de escenarios y de resolución coordinada

de los fragmentos del grafo. Este proceso de resolución es de naturaleza iterativa y amplía el tiempo de solución total, por lo que debe ser evitado siempre que sea posible la resolución directa. En el caso de los problemas de optimización estocástica, el empleo de técnicas de descomposición permite la consideración de gran cantidad de escenarios o de problemas con un mayor nivel de detalle en el modelado.

Existen dos técnicas principales de descomposición que pueden considerarse como duales entre sí, ya que realizan la descomposición en dos dimensiones transversales. Estas dos técnicas son la descomposición de Benders y la relajación lagrangiana, que se explican en los dos siguientes apartados.

### Descomposición de Benders

La descomposición de Benders [Benders, 1962], [VanSlyke, 1969] propone separar en subproblemas las decisiones tomadas en diferentes etapas. Para ello se necesita que las decisiones de una etapa sólo dependan de las consecuencias de las decisiones tomadas en la etapa anterior. Con esta descomposición se plantea un problema por cada etapa, y en ese problema se incluye tanto la parte correspondiente a la propia etapa como la parte que liga esa etapa a las decisiones tomadas en la etapa anterior.

Cuando se aplica esta técnica de descomposición al caso bietapa, se calculan las decisiones de la primera etapa de forma

independiente, ya que no hay una etapa anterior que la condicione. Posteriormente, se comunica esa solución a la segunda etapa, y ésta resuelve su problema y devuelve las consecuencias de esa decisión de la primera etapa. Repitiendo el proceso, la primera etapa vuelve a proponer otras decisiones, considerando esta vez además la nueva información devuelta por la segunda etapa. Comienza un procedimiento iterativo de resolución que finaliza cuando la primera etapa tiene una descripción suficientemente aproximada de cómo afectan sus decisiones a la siguiente etapa. En ese momento, las decisiones que toma la primera etapa se consideran óptimas o suficientemente cercanas a ellas.

En problemas de este tipo se puede ver que si se fijasen las variables de la primera etapa, resolver el problema de la segunda etapa sería más sencillo. Esto es más evidente en los casos en los que la primera etapa tiene un tamaño reducido y la segunda etapa está a su vez formada por varios conjuntos de variables no relacionados entre sí. Un ejemplo de problemas de este tipo es el problema clásico de inversión en el sector eléctrico: en la primera etapa decide las inversiones en nuevos grupos de generación, mientras que en la segunda etapa se decide la producción eléctrica con los grupos disponibles, frente a diferentes escenarios de demanda de energía. En ese caso los diferentes conjuntos de variables de la segunda etapa (decisiones de gestión del sistema en cada escenario de demanda) sólo están relacionadas con las variables de la primera etapa (decisiones de inversión). Entonces es claro que fijando el pequeño grupo de variables de la primera etapa se obtiene una gran ventaja en la resolución, al poder resolver cada conjunto de variables de la segunda etapa de forma independiente. Por ello, suelen denominarse variables de complicación a las variables que impiden una fácil resolución del problema (en este caso las variables de la primera etapa). Además, al problema de la primera etapa (que propone sus decisiones independientemente) se le llama habitualmente problema maestro, y al problema de la segunda etapa (que calcula las consecuencias de las decisiones anteriores ya fijadas) se le llama problema esclavo o subproblema.

El procedimiento iterativo de resolución se aplica también al caso en que haya varias etapas, en lo que se llama la descomposición anidada de Benders. En este esquema se realiza una primera pasada resolviendo los



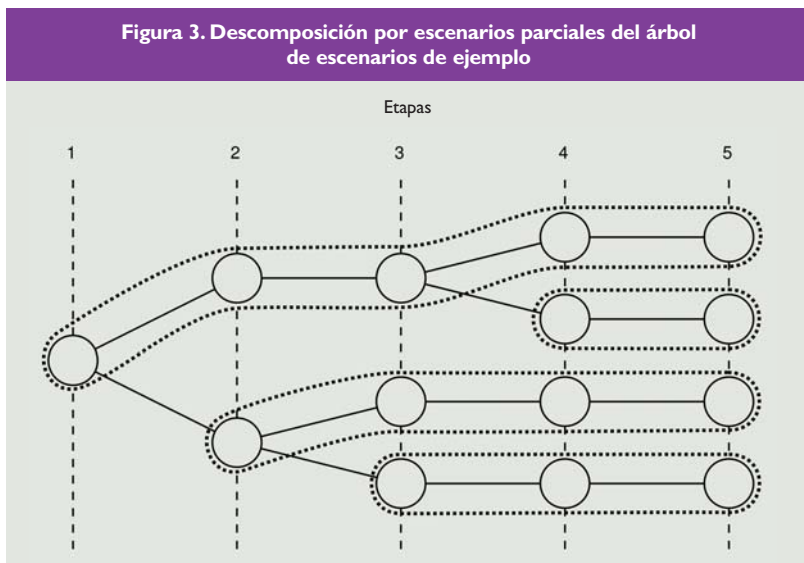
problemas desde la primera etapa hasta la última. En esta pasada, cada problema comunica al de la etapa siguiente los valores de su solución. Cuando se llega a la última etapa, se realiza otra pasada en orden inverso (desde la última etapa hasta la primera) en la que cada subproblema comunica al de la etapa anterior las consecuencias de aplicar la decisión que le señaló.

Se puede demostrar que este algoritmo iterativo converge en un número finito de iteraciones. Sin embargo, el número de iteraciones puede ser muy elevado, por lo que habitualmente se utiliza un criterio de parada que permite detener la ejecución una vez obtenida la precisión requerida en la solución.

Ahora se va a considerar un problema multietapa estocástico en el que la estocasticidad viene dada por un árbol de escenarios como el que se muestra en la Figura 3. Al aplicar la descomposición anidada de Benders debe formularse un problema por cada nodo. Cada nodo actúa como problema maestro de los nodos de la siguiente etapa con los que está conectado (nodos hijo), mientras que actúa como problema esclavo para el nodo de la etapa anterior con el que está conectado (nodo padre). En la primera pasada, cuando ya se ha resuelto el problema de un nodo, puede procederse a resolver los problemas de los nodos hijo. De hecho, como se verá en el apartado de resultados, se puede obtener una ganancia sustancial en tiempos cuando esta resolución se hace en paralelo. Además, para acelerar la convergencia del algoritmo iterativo debe partirse el problema completo en el menor número de subproblemas siempre que el tamaño de estos subproblemas no supere la capacidad del ordenador. Por ello, se pueden agrupar dentro de un mismo subproblema los nodos del árbol que sean contiguos. En la Figura 3 se muestra un ejemplo de agrupación en la que se ha escogido agrupar fragmentos de escenario lo más grandes posible sin que se solapen. Este esquema de agrupación se denomina en este artículo como descomposición por escenarios parciales, y será evaluado en la sección de resultados.

### Relajación lagrangiana

El otro método de descomposición más relevante es la relajación lagrangiana [Geoffrion, 1970], que considera un enfoque alternativo al de la descomposición de Benders. En esta ocasión se intentan separar dentro de cada etapa las decisiones para grupos de

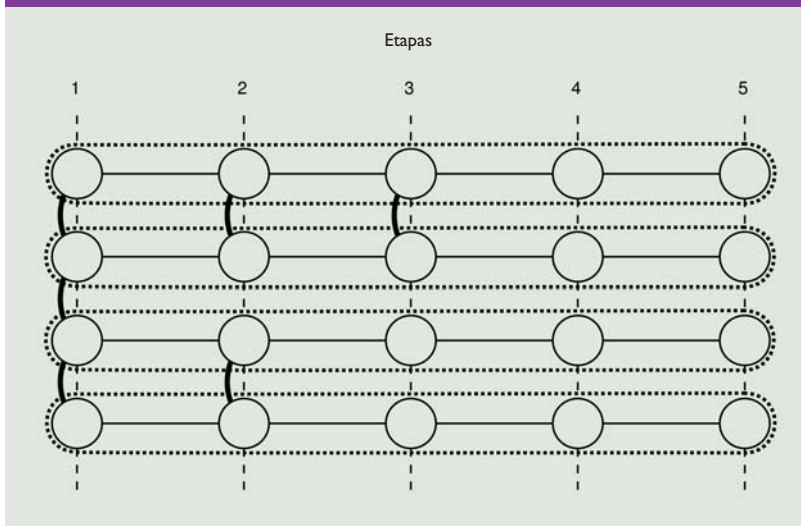


variables que están relacionadas entre sí. Es decir, se pueden localizar conjuntos de variables que están muy conectadas con otras variables de la misma etapa, pero poco relacionadas con otras variables de la misma etapa. Un ejemplo clásico es el de la planificación del funcionamiento de las centrales eléctricas. En ese caso, las variables que gobiernan cada central están muy relacionadas entre sí en la misma etapa y con etapas vecinas (por ejemplo, por la gestión de los stocks de combustible o las reservas hidráulicas). Sin embargo, las variables que rigen la gestión de una central están en ese sentido menos relacionadas con las de otra central salvo por la condición de que entre todas deben cubrir la demanda. En ese caso puede verse que si no fuese por la restricción de cobertura de la demanda, se podría decidir de forma individual la gestión de cada central. Por ello, este tipo de restricciones que ligan partes bastante independientes del problema se denominan restricciones de complicación.

La relajación lagrangiana consiste en eliminar las restricciones de complicación, de forma que se puedan resolver independientemente las distintas partes del problema. La coordinación de las soluciones de cada uno de estos subproblemas se lleva a cabo por un problema maestro, que tiene como objetivo forzar el cumplimiento de las restricciones de complicación. El método iterativo de resolución resuelve alternativamente el problema maestro y los subproblemas hasta que se cumplen las restricciones de complicación que se han eliminado de la formulación de los subproblemas.

Cuando la estocasticidad se introduce en el problema mediante un árbol de escenarios,

**Figura 4. Descomposición por relajación lagrangiana del árbol de escenarios de ejemplo**



de manera natural surge la descomposición por escenarios a lo largo de todas las etapas. El árbol está formado por escenarios independientes salvo por el hecho de que comparten los nodos iniciales. Si no tuviera que cumplirse esta condición, podrían resolverse los problemas de cada escenario de forma independiente. La condición de que los escenarios compartan los nodos iniciales es la condición de no anticipatividad, que asegura que se toman las decisiones en una etapa sin conocer con exactitud la realización de la incertidumbre que se va a producir, es decir, que fuerza a que se tome una única decisión en un nodo común para todos los escenarios que comparten ese nodo. Esa condición de no anticipatividad es la restricción de complicación que se elimina por medio de la relajación lagrangiana. En la Figura 4 se puede ver la aplicación de la relajación lagrangiana al problema con el árbol de escenarios de la Figura 2. Por claridad, en esta figura se han replicado los nodos comunes de los escenarios, y se han señalado de forma explícita las condiciones de no anticipatividad que ligan los nodos de la misma etapa, por medio de arcos curvados de mayor grosor que el resto de líneas.

### Descomposición en entornos grid

En el apartado anterior se han descrito los dos métodos principales de descomposición en optimización estocástica. Al aplicarlos se puede aumentar el rendimiento del procedimiento de resolución por medio de paralelización. Como se ha visto en la descomposición de Benders, cuando se ha resuelto un

problema maestro, todos los subproblemas esclavo de éste pueden resolverse simultáneamente, y esto puede aplicarse recursivamente en cada etapa. Y en la relajación lagrangiana, los subproblemas de cada escenario pueden resolverse de forma independiente en paralelo. Sin embargo, es relevante indicar que la relajación lagrangiana tiene en la práctica una convergencia más lenta que la descomposición de Benders, si bien se presta a una paralelización más efectiva al no haber dependencias entre los subproblemas sino sólo con respecto al problema maestro.

En esta sección se presenta un método de descomposición que aprovecha la posibilidad de la resolución en paralelo para plantear un nuevo esquema de descomposición. El objetivo principal de este método de descomposición es su empleo en entornos grid. En el siguiente apartado se comentan brevemente las características de los grid, pero puede consultarse [Latorre, 2008] para una descripción más detallada y referencias bibliográficas. Y en el subsiguiente apartado se describe la descomposición por escenarios completos, que recoge la idea de la paralelización por escenarios de la relajación lagrangiana, pero desde la perspectiva de la descomposición de Benders, que tiene una convergencia más rápida. En [Latorre, 2007] se puede encontrar una revisión del estado del arte de otros métodos de descomposición que se aplican tanto en cálculo paralelo como distribuido.

### Entornos grid

Los entornos grid son sistemas de cálculo distribuido formados por gran cantidad de equipos que se emplean como un gran ordenador virtual. Las características que definen un grid son:

- Está compuesto por una gran cantidad de equipos que pueden tener características muy diferentes en cuanto a prestaciones hardware y de la plataforma sobre la que se ejecutan.
- Estos equipos pueden estar dispersos geográficamente en las distintas organizaciones que participan en ese grid, lo que complica su gestión y coordinación.
- Los equipos están disponibles de forma dinámica, porque como medio de comunicación se emplea habitualmente Internet, que no fue diseñado para mantener unos requisitos de fiabilidad. Además, ni el número de equipos ni su estado de carga es conocido a priori por el usuario cuando lanza trabajos al grid.

- Es un sistema que debe ser escalable, es decir, debe estar pensado para poder crecer de tamaño con facilidad, ya que su objetivo es agrupar la mayor cantidad posible de recursos.

Por encima de los componentes físicos del grid (ordenadores, red de comunicaciones y otros recursos disponibles) se encuentra un middleware que es el software encargado de su gestión. La estructura de este software de gestión puede tener distintos grados de complejidad en función de las necesidades y dimensiones del grid en el que se ejecute, pero por lo general consta de al menos estos componentes:

- Un gestor que mantiene una lista de los recursos disponibles en el grid y que los asigna a las peticiones que reciba.
- Un componente que ejecuta los trabajos en cada uno de los equipos de cálculo.
- Otro componente que permite el acceso de las aplicaciones al grid, teniendo en cuenta la política de seguridad del sistema.

### Descomposición por escenarios completos

En este apartado se describe la descomposición por escenarios completos [Latorre, 2007], un método de descomposición que tiene características especialmente indicadas para su uso en entornos grid. La base teórica de este método se apoya en la descomposición de Benders, aunque se introducen modificaciones de las que se derivan ventajas computacionales cuando se aplica en entornos grid.

Desde el punto de vista de su aplicación en entornos grid, es deseable realizar una descomposición por escenarios, ya que esto permite resolver el subproblema de cada escenario de forma independiente y asignar cada subproblema a un equipo diferente. La descomposición por escenarios tradicional depende del uso de la relajación lagrangiana o alguna variante de ella, pero muestra una convergencia más lenta que la descomposición de Benders.

El método que se describe en este apartado busca obtener una descomposición que considere escenarios completos sin acudir a la relajación lagrangiana. Para ello se formula un subproblema para cada uno de los escenarios. En cada subproblema se consideran de forma explícita las partes del problema correspondientes a los nodos que pertenecen al escenario considerado, y de forma aproximada las partes del problema que

corresponden al resto de nodos del árbol. En ese sentido, se construyen todos los subproblemas como si fueran los problemas maestros de Benders como el que se muestra en el ejemplo de la Figura 3. Sin embargo, para coordinar el proceso de resolución es necesario tener la información que proporcionan los problemas esclavos de la descomposición de Benders. Por ello, en la resolución de cada subproblema se realizan dos tipos de cálculos:

- En primer lugar, se resuelve el subproblema de cada escenario completo, de forma que se obtiene la solución que se obtendría en Benders si ese escenario fuese el correspondiente al problema maestro.
- En segundo lugar, se procede a calcular las consecuencias de las decisiones propuestas por los demás subproblemas, como si el propio subproblema fuese en esta ocasión el problema esclavo de los demás. Para esto se modifica el subproblema, eliminando los nodos comunes con cada uno de los demás escenarios, y se resuelve el problema resultante para las propuestas de los subproblemas de esos escenarios.

Con este algoritmo de solución se combinan varias resoluciones tradicionales de Benders simultáneas. El segundo punto conlleva un coste computacional adicional que no tiene sentido si este procedimiento no puede ser resuelto en paralelo. Sin embargo, por medio del cálculo paralelo se distribuye esa carga computacional y pueden obtenerse mejoras en el tiempo total de ejecución, como se mostrará en el apartado de resultados. Para conseguir esta paralelización, se envía cada subproblema a un equipo, que se encarga de ejecutar las dos fases del cálculo que se han comentado para su subproblema: primero se calcula una nueva propuesta de decisiones de sus variables, y posteriormente se modifica el subproblema para calcular las consecuencias en su escenario de las decisiones propuestas por los demás escenarios en la iteración anterior. Este proceso iterativo continúa hasta que se alcanza una precisión suficiente en los valores de las soluciones de los subproblemas, que significa que se ha conseguido un acuerdo suficiente en los valores de las variables comunes a los diferentes escenarios.

### Caso ejemplo de aplicación

En esta sección se presenta un caso ejemplo que sirve para conocer el comportamiento de los métodos de descomposición

en la aplicación a un grid real. En el primer apartado se describe brevemente el problema al que se aplican los métodos de descomposición, la descomposición hidrotérmica. Y en el segundo apartado se muestran los resultados numéricos obtenidos al aplicar dos métodos de descomposición descritos en las anteriores secciones: la descomposición por escenarios parciales y la descomposición por escenarios completos.

### Problema de coordinación hidrotérmica

El problema de coordinación hidrotérmica es un problema de medio plazo que se utiliza para la gestión de las centrales del sistema eléctrico, en este caso con un horizonte temporal de un año. Este modelo se inscribe dentro de la jerarquía de modelos de planificación eléctrica: recibe consignas globales de funcionamiento de modelos de más largo plazo que consideran la gestión hiperanual de las centrales, y a su vez calcula decisiones de gestión para modelos de más corto plazo que se encargan de adaptarlas al funcionamiento detallado de los grupos.

En este modelo se consideran dos tipos de grupos generadores: los grupos térmicos (tecnología de producción nuclear, de carbón, ciclos combinados,...) y los grupos hidráulicos. Otras tecnologías de producción, como la eólica o la solar, no se han considerado en este problema porque actualmente no son gestionables. Además, por simplificación, se ha omitido el modelado de la red de transporte de energía eléctrica, de forma que se trata de un modelo de nodo único.



Las restricciones que se consideran en el modelo de optimización son:

- La producción de todos los grupos debe cubrir la demanda total, y si eso no fuera posible, debe calcularse la potencia no suministrada del sistema.
- El balance de energía de cada embalse contabiliza la variación de las reservas de agua y el intercambio de agua de entrada y salida al embalse.
- Para calcular la potencia producida por la central de cada embalse y el consumo de los bombeos, se utiliza un coeficiente energético que permite la conversión de caudal de agua turbinado o bombeado en energía.
- Los valores de reserva iniciales y finales marcan qué gestión se quiere hacer en el horizonte de estudio.
- También deben considerarse las cotas de las variables del problema: el valor máximo de la reserva de cada embalse, la producción máxima y el mínimo técnico de los grupos generadores...

Por último, la función objetivo busca la minimización de los costes, que incluyen los siguientes conceptos principales:

- Costes variables de producción, que engloban tanto el gasto de combustible de cada grupo térmico como el coste de operación y mantenimiento.
- Penalización por energía no suministrada, por medio de un coste asociado de valor considerablemente más elevado que los costes de generación más caros.

La incertidumbre en los modelos del sistema eléctrico puede provenir de muchas fuentes distintas, entre las que se encuentran las siguientes:

- Las aportaciones hidráulicas de los embalses dependen de las lluvias y en general de la situación climatológica.
- La disponibilidad de los grupos puede variar, ya que éstos se pueden ver afectados por fallos fortuitos.
- El consumo de energía eléctrica por los consumidores finales puede ser predicho actualmente con bastante exactitud, pero siempre dentro de unos márgenes de precisión.
- Los precios de los combustibles están sujetos a variaciones en los mercados internacionales en los que intervienen multitud de factores económicos y políticos a escala internacional.
- La estrategia de las compañías eléctricas determina los modos de funcionamiento de las centrales e introduce incertidumbre en

su comportamiento en los mercados eléctricos.

- Incertidumbre regulatoria, que determina la manera en que opera el sector eléctrico.

En el modelo que se emplea en este artículo se considera exclusivamente la incertidumbre proveniente de las aportaciones hidráulicas de los diferentes embalses del sistema. Sin embargo, en el caso de que se quisieran considerar otras fuentes de incertidumbre adicionales, habría que construir árboles de escenarios que recogiesen también las variaciones en estos parámetros, pero la estructura sería la misma que la que se ha descrito.

## Resultados

En esta sección se comentan los resultados de aplicación de los métodos de descomposición a un ejemplo de problema de coordinación hidrotérmica de tamaño realista. El árbol de escenarios que recoge la estocasticidad del problema está formado por 16 escenarios que considera la incertidumbre en las aportaciones hidráulicas de los embalses.

En concreto, las dos técnicas de descomposición que se van a comparar son la descomposición por escenarios parciales como representante más eficiente de la descomposición de Benders, y por otro lado la descomposición por escenarios completos.

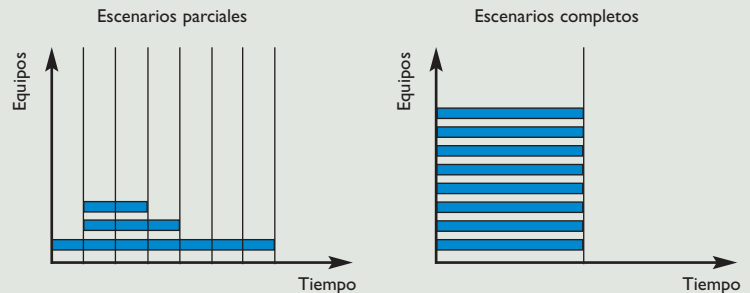
El grid utilizado es un pequeño prototipo montado en el Instituto de Investigación Tecnológica (IIT), compuesto por 10 equipos. Este grid está gestionado por NetSolve [Seymour, 2005], software desarrollado por la Universidad de Tennessee que mediante una estructura cliente-servidor permite al programador un acceso sencillo a los recursos del grid.

En primer lugar, se presentan los resultados para la resolución del problema considerando los escenarios agrupados de dos en dos. En consecuencia se formulan ocho subproblemas, con lo cual existen más equipos que problemas que resolver. De esta forma se simula el efecto de contar con un grid de grandes dimensiones, en el que el número de equipos no es limitante. Los resultados se muestran en la Tabla 1, en la que se incluye el número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia, el tiempo total de resolución que percibe el usuario, el tiempo de cálculo del optimizador sumado para todos los equipos, y el nivel de rendimiento del grid (calculado como tiempo de cálculo entre tiempo total).

**Tabla 1. Tiempos de cálculo para 8 escenarios y Grid de 10 equipos**

Método	Iteraciones	Tiempo total	Tiempo de cálculo	Rendimiento
Escenarios parciales	7	1285	1063	10.3%
Escenarios completos	8	947	4093	54.1%

**Figura 5. Cronogramas de la resolución del caso de ocho subproblemas**



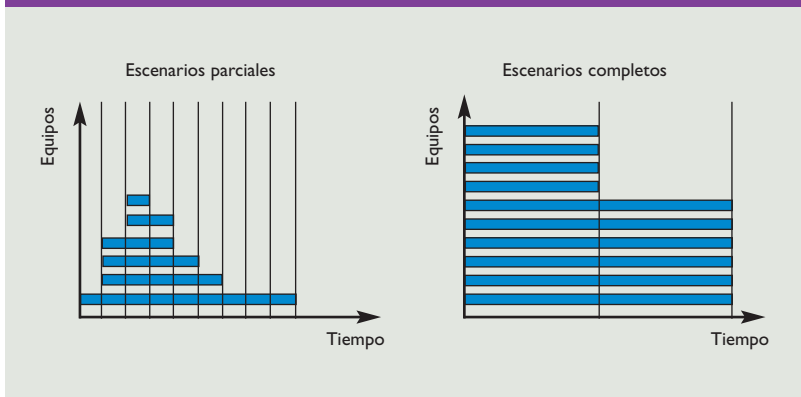
**Tabla 2. Tiempos de cálculo para 16 escenarios y Grid de 10 equipos**

Método	Iteraciones	Tiempo total	Tiempo de cálculo	Rendimiento
Escenarios parciales	11	919	1732	18.9%
Escenarios completos	13	1461	8474	58.0%

Como puede verse en la Tabla 1, el número de iteraciones en ambos casos es muy similar, aunque un poco menor en la descomposición por escenarios parciales. Sin embargo, como el rendimiento que este método obtiene del grid es mucho menor que en el caso de la descomposición por escenarios completos, el tiempo total requerido para alcanzar convergencia en la descomposición por escenarios parciales es mayor que en la descomposición por escenarios completos. Es interesante comentar que ese menor tiempo total de resolución se obtiene a cambio de un mayor esfuerzo computacional, pero el mejor rendimiento de la descomposición por escenarios completos compensa este hecho. Para ver el comportamiento de ambos métodos en una iteración del algoritmo de resolución se presentan los cronogramas de la Figura 5. En ellos se ve que la descomposición por escenarios parciales debe esperar a que se resuelvan los subproblemas padre antes de empezar a resolver los hijos. Estos retrasos debidos a la precedencia entre subproblemas provocan que se obtenga peor rendimiento



Figura 6. Cronogramas de la resolución del caso de 16 subproblemas



que en la descomposición por escenarios completos, que como se ve en la figura puede enviar todos los subproblemas de forma simultánea al grid, y sólo cuenta con las pérdidas de rendimiento debidas al envío de datos por la red y la gestión de la información de los subproblemas.

Por otra parte, se presentan también los resultados de la resolución del problema cuando los 16 escenarios se formulan independientemente. Entonces se cuenta con más subproblemas (16) que equipos disponibles (10). En este caso se estudia qué ocurre si el número de equipos libres en el grid es insuficiente para el número de subproblemas que se quiere resolver. En la Tabla 2 se presentan los resultados para este caso, cuyo significado es análogo al comentado en el caso anterior:

En esta ocasión puede verse que como el número de subproblemas es mayor, se necesitan más iteraciones para alcanzar la convergencia, aunque la relación entre el número de iteraciones de cada método es similar al caso anterior. Sin embargo, en este caso el mayor rendimiento que obtiene el método de descomposición por escenarios completos no es suficiente para compensar el incremento en el tiempo de cálculo, y el tiempo total de este método es mayor que en el caso de la descomposición por escenarios parciales. Para comprender por qué ocurre esto se presentan los cronogramas para esta situación en la Figura 6. Puede verse que, aunque el método de descomposición por escenarios parciales tiene que respetar las precedencias en la resolución de los subproblemas como en el caso anterior; al emplear la descomposición por escenarios completos no pueden enviarse todos los subproblemas de forma simultánea al grid. Por ello, es necesario realizar dos series de envíos y el

incremento de tiempo que eso implica hace que al final se obtenga un tiempo de resolución total mayor.

## Conclusiones

En este artículo se han revisado los conceptos de la optimización estocástica y se han presentado los dos enfoques principales cuando se afronta la descomposición de problemas estocásticos: descomposición de Benders y relajación lagrangiana. Por otra parte, se ha planteado la aplicación de técnicas de procesamiento paralelo a estos métodos de cálculo, en concreto en los entornos grid. Para estos entornos de computación se plantea un nuevo método de descomposición que explota sus características: la descomposición por escenarios completos. Como se ha visto en la sección de resultados, este método obtiene menores tiempos de cálculo cuando hay suficientes equipos disponibles o el número de subproblemas que se plantea se adapta al tamaño del grid.

Como caso de aplicación se ha presentado el problema de la coordinación hidrotérmica. Sin embargo, tanto el método de descomposición como el entorno grid son de uso general para cualquier problema de optimización estocástica de gran tamaño. ■

## Más información

- [Benders, 1962] J. F. Benders, "Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems". *Numerische Mathematik*, 4, 238-252, 1962.
- [Birge, 1997] J. R. Birge y F. Louveaux. *Introduction to stochastic programming*. Springer Verlag, 1997.
- [Geoffrion, 1970] A. M. Geoffrion, "Elements of Large Scale Mathematical Programming", *Management Science*, 16:11, 652-691, julio 1970.
- [Kall, 1994] P.Kall y S.W.Wallace. *Stochastic programming*. John Wiley & Sons, 1994.
- [Latorre, 2007] J. M. Latorre. *Resolución distribuida de problemas de optimización estocástica. Aplicación al problema de coordinación hidrotérmica*. Tesis doctoral. Universidad Pontificia Comillas, 2007.
- [Latorre, 2008] J. M. Latorre, R. Palacios y A. Ramos. "Entornos Grid. Sistemas distribuidos para cálculo masivo." *Anales de Mecánica y Electricidad*, vol. LXXXV, fascículo III, 32-39, mayo-junio 2008.
- [Seymour, 2005] K. Seymour, A. Yarkhan, S. Agrawal y J. Dongarra, "NetSolve: Grid Enabling Scientific Computing Environments." *En Grid Computing and New Frontiers of High Performance Processing* (L. Grandinetti, ed.), Elsevier, 2005.
- [VanSlyke, 1969] R. M. Van Slyke y R. J-B. Wets, "L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming." *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17, n° 4, 638-663, 1969.