

Mejoras en la aplicación de técnicas de reducción de varianza a la planificación probabilista de la red de transporte a medio plazo

Pedro Sánchez-Martín Andrés Ramos

Instituto de Investigación Tecnológica

Universidad Pontificia Comillas

C/ Santa Cruz de Marcenado, 26.

28015 - MADRID

E-mail: peter@iit.upco.es

RESUMEN

Este artículo muestra las mejoras realizadas en la aplicación de técnicas de reducción de varianza, concretamente *variables antitéticas* y *variables de control*, a la planificación probabilista de la red de transporte a medio plazo. Estas técnicas se utilizan para reducir el tamaño muestral necesario para estimar con unos determinados niveles de precisión, parámetros estadísticos de la simulación. De su contrastación con el muestreo de Monte Carlo, se obtiene que los tiempos de cálculo disminuyen hasta en 40 veces aplicando variables antitéticas y en más de 2500 veces aplicando variables de control. Adicionalmente, se ha analizado el efecto de sinergia *positiva* que se produce aplicando ambas técnicas conjuntamente. La validación práctica de los avances alcanzados se ha realizado utilizando un caso de dimensiones reales (500 nudos, 800 circuitos y más de 200 generadores) que modela los sistemas eléctricos español y portugués, y un equivalente de la zona sur francesa.

Palabras clave: Planificación probabilista y reducción de varianza.

1. Introducción

Actualmente, la toma de decisiones sobre la construcción de nuevos circuitos se ve influida por factores técnico-económicos y medio ambientales. Debido a sus diferentes problemáticas y horizontes de estudio, ambos factores pueden ser evaluados de forma separada. Dentro del conjunto de factores técnico-económicos, la cuantía de las inversiones adicionales en transporte, así como la operación conjunta del sistema eléctrico bajo un contexto de incertidumbre, son aspectos estudiados por la planificación del transporte. En concreto, este artículo se centra en la mejora de herramientas de simulación utilizadas para la planificación del transporte en el medio plazo, cuyo horizonte abarca entre seis y diez años [1].

El modelo de planificación del transporte desarrollado ‘ad hoc’ incorpora como incertidumbres más influyentes, la aleatoriedad hidráulica y las indisponibilidades de elementos de generación y transporte [2]. A lo largo de la simulación, los valores medios de producciones, costes e índices de fiabilidad se obtienen optimizando el uso de los recursos del sistema en el suministro de energía eléctrica. Así mismo, la precisión de los valores medios obtenidos se cuantifica mediante sus intervalos de confianza asociados.

El modelado de las incertidumbres mediante *sorteo de Monte Carlo* (simulación probabilista) añade gran versatilidad al diseño de herramientas de planificación. Sin embargo, el elevado tamaño muestral necesario para obtener valores medios con razonables niveles de precisión, constituye un serio obstáculo en su utilización. Las técnicas estadísticas denominadas técnicas de reducción de varianza (TRV) permiten disminuir estos tamaños muestrales, para una precisión fijada. En este artículo, las TRV estudiadas son las variables antitéticas, las variables de control y su combinación (Sección 2). Ambas utilizan procedimientos estadísticos para inferir correlaciones entre variables, que permitan disminuir la variabilidad inherente de los valores medios del modelo, manteniendo insesgados los estimadores.

La implantación individual y combinada de estas TRV requiere adecuar el procedimiento de muestreo del modelo. El diseño del muestreo se ha realizado aunando tres objetivos: potenciar la convergencia de las optimizaciones, minimizar los requisitos de memoria y facilitar la posible implantación de cálculo distribuido (Sección 3). Los resultados presentados en este artículo corresponden a un sistema de dimensiones reales (500 nudos, 800 circuitos y 250 grupos), que contiene los sistemas eléctricos español (400 kV, 220 kV y parte de 132 kV), portugués y un equivalente de la zona sur francesa (Sección 4).

2. Técnicas de reducción de varianza

Estas técnicas aumentan la eficacia de la simulación probabilista, disminuyendo el tamaño muestral necesario para alcanzar una determinada precisión, o bien mejorando la precisión de los resultados para un tamaño muestral dado. La taxonomía de las TRV clasifica éstas según se basen en procedimientos de correlación entre variables del modelo, o en procedimientos de importancia sobre el muestreo de estados del sistema [3]. Las variables antitéticas y las variables de control están contenidas dentro de la primera clase.

Los intervalos de confianza porcentuales asociados a los valores medios estimados de la variable x , $\hat{E}(x)$, se determinan a partir de la varianza estimada de la variable, $\hat{V}(x)$, del propio $\hat{E}(x)$ y del tamaño muestral N . Para simulaciones de tamaño superior al centenar de muestras, los intervalos de confianza porcentuales se pueden aproximar por la ecuación (1):

$$\text{Intervalo confianza porcentual} = \frac{2 \cdot Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{V}(x)}{N}}}{\hat{E}(x)} \cdot 100\% \quad (1)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$, el valor de la normal estandarizada para un nivel de significación α .

Las TRV disminuyen la varianza de la x , $V(x)$, manteniendo insesgado el estimador de la media, (i.e., $\hat{E}(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E(x)$). El conocimiento que a priori se tenga del comportamiento del sistema eléctrico, influye de forma decisiva en la eficacia de estas técnicas. Dicho conocimiento puede ser acumulado por la experiencia del planificador, o bien obtenido mediante simulaciones previas de éste u otro modelo de ficación.

2.1. Variables antitéticas

Esta técnica agrupa por parejas las muestras contenidas en la simulación, utilizando como estimador insesgado, la media de la semisuma de cada pareja de muestras. Para reducir la varianza de este nuevo estimador, las variables antitéticas modifican el procedimiento de muestreo con objeto de inferir la mayor correlación negativa posible entre las muestras de cada pareja. La modificación en el procedimiento de muestreo consiste en que los valores de las variables de entrada de una de las dos muestras (*muestra antitética*) que componen cada pareja, se obtienen a partir de los complementos a la unidad de los números aleatorios uniformes que determinan las variables de entrada de la otra muestra (*muestra independiente*) [4, 5].

| | Muestra independiente | Muestra antitética |
|--|------------------------------|------------------------------------|
| Números aleatorios uniformes, U_i $i : 1, \dots, I; I = \sum I_j$ | $U_i \equiv U[0,1]$ | $U_i^a = 1 - U_i \equiv U[0,1]$ |
| Variables de entrada, X_j $j : 1, \dots, J; i : 1, \dots, I_j$ | $X_j = f_j^{-1}(U_i)$ | $X_j^a = f_j^{-1}(U_i^a)$ |
| Variables de salida, Y_k $k : 1, \dots, K$ | $Y_k = g_k(X_1, \dots, X_J)$ | $Y_k^a = g_k(X_1^a, \dots, X_J^a)$ |

Tabla I.- Distribuciones estadísticas usando variables antitéticas.

La tabla I muestra las distintas distribuciones estadísticas de las variables de entrada y salida para cada pareja de muestras (independiente y antitética). Las variables de entrada se muestrean mediante la transformada inversa de las funciones estadísticas de distribución acumulada, f^{-1} , que han sido previamente establecidas en base al comportamiento del sistema eléctrico. Sin embargo las funciones g , que determinan las variables de salida a partir de las variables de entrada, no se pueden expresar analíticamente, y por ello son evaluadas muestralmente por el modelo de planificación.

Aplicando variables antitéticas, la variable *semisuma por pareja*, Y_k^m , mantiene insesgado el estimador del valor medio, y posee una varianza dependiente de la covarianza interna de la pareja. Así lo muestran las ecuaciones (2) y (3).

$$E(Y_k^m) = \frac{E(Y_k) + E(Y_k^a)}{2} = E(Y_k) \quad (2)$$

$$V(Y_k^m) = \frac{V(Y_k) + V(Y_k^a) + 2 \cdot Cov(Y_k, Y_k^a)}{4} = \frac{V(Y_k) + Cov(Y_k, Y_k^a)}{2} \quad (3)$$

De (3) se deduce que cuanto más negativa sea la covarianza entre las muestras de la pareja, menor será la varianza de la Y_k^m . Por lo tanto, la reducción de varianza será total ($V(Y_k^m) = 0$), si los valores muestrales emparejados se sitúan equidistantes y a ambos lados del valor medio real de la variable.

La implantación de esta técnica es relativamente sencilla, lo cual ha favorecido su utilización generalizada. Sin embargo, la eficacia de esta técnica no está garantizada, y por ello se dan en la literatura técnica, implantaciones en modelos de producción que han obtenido escasas reducciones de varianza [6,7]. Por el contrario, en el ámbito de modelos de análisis de fiabilidad esta técnica ha obtenido mejores resultados [8].

La eficacia de las variables antitéticas está condicionada a la existencia de monotonicidad en las funciones g_k que relacionan las entradas al modelo con las variables de salida. La falta de monotonicidad, así como la compensación de efectos entre las distintas variables de entrada, perjudican notablemente la eficacia de esta técnica.

En la implantación realizada de las variables antitéticas, se ha mejorado su eficacia mediante un procedimiento genérico apuntado en [3]. Dicho procedimiento consiste en obtener cada muestra mediante dos fases consecutivas: la primera consiste en la realización de sorteos sobre variables, denominadas *variables intermedias*, que explican el comportamiento agrupado de variables de entrada. La segunda fase realiza sorteos sobre las distribuciones de las variables individuales con objeto de desagrupar los resultados obtenidos en la primera fase.

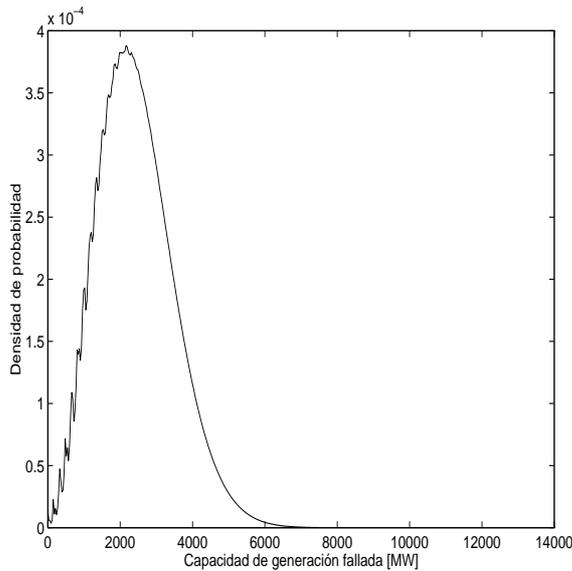


Figura 1.- Distribución de fallo térmico agrupado.

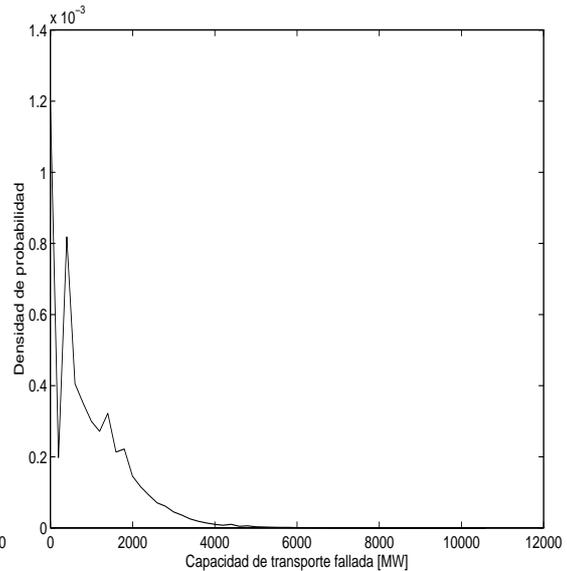


Figura 2.- Distribución de fallo de transporte agrupado.

La inferencia de correlación negativa, mediante la complementariedad a la unidad, se aplica exclusivamente sobre las funciones estadísticas de la primera fase. Dichas funciones estadísticas han sido obtenidas previamente mediante cálculo analítico o simulación. La segunda fase desagrupa consecutivamente los valores obtenidos por la primera, lo cual infiere ciertos sesgos sobre las últimas variables individuales que se desagrupan, debido a que su probabilidad condicionada por la primera fase es elevada. En estos casos se vuelve hacia atrás, repitiendo la segunda fase con nuevas semillas en el sorteo.

Concretamente en el modelo de planificación, las variables intermedias de la primera fase son de tres tipos: producciones hidroeléctricas de centrales agrupadas y las capacidades de generación térmica y de transporte falladas. Las figuras 1 y 2 representan las funciones de densidad de probabilidad de la capacidad de generación térmica fallada y la de transporte para el sistema de estudio. Dichas funciones han sido obtenidas mediante cálculo analítico discreto, considerando tasas independientes de fallo por elemento. La segunda fase obtiene valores muestrales desglosados por grupo y circuito mediante sorteo en base a la tasa individual de fallo de los elementos, y al valor muestreado correspondiente de la primera fase.

La aplicación de variables antitéticas al modelo ha reducido considerablemente los intervalos de confianza de las variables de salida relacionadas con costes y producciones del sistema, y no tanto en índices de fiabilidad. Las reducciones en los intervalos de confianza de variables relativas a producciones y costes del sistema eléctrico, varían entre un 50% y un 85% con respecto a los intervalos obtenidos sin aplicar TRV alguna (Sección 4).

En cuanto a tiempos de cálculo, las reducciones obtenidas aplicando variables antitéticas pueden llegar a ser superiores a 40 veces, dependiendo de la variable en la que se esté aplicando un criterio de parada. A nivel de almacenamiento, la utilización de variables antitéticas supone un ligero incremento de los requerimientos de memoria. Dicho incremento se puede minimizar utilizando un apropiado procedimiento de muestreo (Sección 3).

2.2. Variable de Control

Esta técnica genera unas nuevas variables de salida denominadas Z , a partir de la combinación de las variables de salida originales, Y , y de otras variables denominadas *variables de control*, W (4).

$$Z_k = Y_k - \beta_k \cdot (W_k - \mu_w); \quad k = 1, \dots, K. \quad (4)$$

siendo,

β_k : Coeficiente de control entre Y_k y W_k .

μ_w : Media de la variable de control, W_k .

$$E(Z_k) = E(Y_k) \quad (5)$$

$$V(Z_k) = V(Y_k) + \beta_k^2 \cdot V(W_k) - 2 \cdot \beta_k \cdot Cov(Y_k, W_k) \quad (6)$$

Los estimadores del valor medio de estas nuevas variables Z son insesgados (5), y su varianza es menor que las varianzas originales, $V(Y_k)$, cuando se cumple la desigualdad (7):

$$2 \cdot Cov(Y_k, W_k) > \beta_k \cdot V(W_k) \quad (7)$$

La reducción de varianza que obtiene esta técnica depende directamente del valor absoluto de la covarianza existente entre las variables Y_k y W_k . El valor óptimo de los coeficientes de control que obtiene máxima reducción de varianza, β_k^* , se obtienen a partir de (6) y su valor se indica en (8). Por lo tanto se apuntan dos formas de aumentar la eficacia de esta técnica:

- Escogiendo variables de control altamente correladas con las variables de salida originales, y cuyo coste computacional adicional sea el menor posible. Dichas variables pueden pertenecer al propio modelo de simulación, denominándose variables de control *internas*, o bien proceder de modelos auxiliares de simulación, denominándose variables de control *externas*, e incluso mezclando ambos tipos de variables de control.
- Estimando los coeficientes de control, $\hat{\beta}_k^*$, mediante simulaciones, o bien fijando su valor basándose en experiencia o en información adquirida previa.

Concretamente en este modelo de planificación probabilista, las variables de control escogidas proceden de un modelo simplificado de explotación a nudo único (*externas*), cuyo tiempo de cálculo es inferior en más de dos órdenes de magnitud con respecto al modelo de planificación. Este tipo de variables de control no modelan la incertidumbre de la red de transporte.

$$\beta_k^* = \frac{Cov(Y_k, W_k)}{V(W_k)} \quad (8)$$

En cuanto a la asignación de los coeficientes de control utilizados, se han analizado tres metodologías:

- La primera consiste simplemente en fijar su valor a la unidad. Este valor viene dado por la propia naturaleza de la variable de control, la cual es una simplificación de la variable original [9, 10].
- La segunda consiste en la estimación de los coeficientes de control óptimos, mediante un conjunto de muestras previo a la simulación. Dichas muestras previas no se utilizan en el cálculo de los estimadores de las variables controladas, Z [11]. La evolución teórica de los intervalos de confianza en función del tamaño muestral de estimación de los coeficientes de control, se representa en la figura 3 mediante una línea continua.
- La tercera se basa en la estimación de los coeficientes óptimos mediante el uso de todo el tamaño muestral de la simulación, que igualmente es utilizado en el cálculo de los estimadores de los valores medios de las variables controladas, Z .

Las tres metodologías anteriores se han contrastado mediante la comparación de los intervalos de confianza obtenidos para un mismo tamaño muestral. Los resultados de la contrastación han sido:

- La aproximación de los coeficientes por la unidad ha obtenido los menores intervalos de confianza de las tres metodologías. Este hecho indica la bondad de la aproximación a la unidad respecto a los coeficientes óptimos, β_k^* .
- La estimación previa de los coeficientes de control respecto a fijar su valor a la unidad, ha obtenido peores intervalos de confianza independientemente del tamaño muestral de estimación. Ello es debido a que el efecto de reducción del tamaño muestral de cómputo, posee en todo momento mayor entidad que el aumento de precisión de los coeficientes de control, como se indica en la línea punteada de la figura 3.

- La utilización simultánea de muestras para la estimación de valores medios y coeficientes de control provoca excesivos sesgos en la estimaciones de los valores medios de las variables de salida controladas. Este sesgo es debido a la covarianza existente entre $\hat{\beta}_k^*$ y W_k .

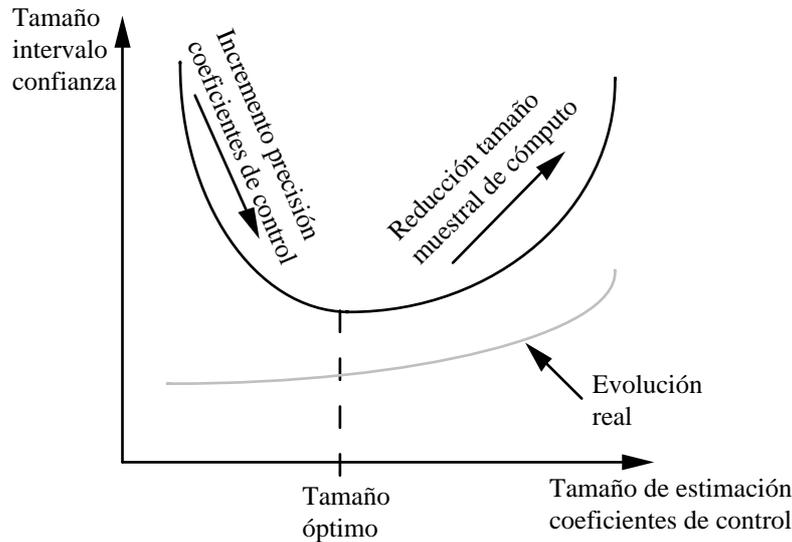


Figura 3.- Evolución intervalos de confianza versus tamaño de estimación de los coeficientes de control.

Las reducciones de varianza obtenidas con esta técnica se producen en las variables de salida de producción y en sus costes asociados, y no así en los índices de fiabilidad. Estas reducciones pueden variar entre un 45% y un 98% del tamaño de los intervalos de confianza obtenidos sin aplicar TRV alguna. Extrapolando estos resultados en reducciones de tiempo, éstos pueden superar los tres órdenes de magnitud dependiendo de la variable en la cual se aplique el criterio de parada (Sección 4). La falta de reducción en variables relacionadas con la fiabilidad se debe a que la variable de control, fiabilidad por indisponibilidad de la generación, explica poco de la fiabilidad generación/red del caso estudio.

2.3. Sinergia de variables antitéticas y variables de control.

Se ha analizado el efecto de aplicar conjuntamente las dos TRV anteriores. La sinergia que se produce al aplicar ambas técnicas puede resultar *positiva*, si la reducción de varianza obtenida supera la mayor de las reducciones de cada TRV por separado, y *negativa* en caso contrario.

Al igual que en la ecuación (2), el valor medio de la nueva variable de salida Z_k^m , permanece insesgado (9). De las ecuaciones (3) y (6) se obtiene la varianza de la nueva variable (10). De (10) resulta que la varianza de la nueva variable disminuye conforme la covarianza entre variables originales y variables de control aumenta en valor absoluto (β_k puede tomar valores negativos), y conforme la covarianza entre las parejas antitéticas de variables controladas se hace más negativa.

$$E(Z_k^m) = \frac{E(Z_k) + E(Z_k^a)}{2} = E(Z_k) = E(Y_k) \quad (9)$$

$$V(Z_k^m) = \frac{V(Z_k) + Cov(Z_k, Z_k^a)}{2} = \frac{V(Y_k) + \beta_k^2 \cdot V(W_k) - 2 \cdot \beta_k \cdot Cov(Y_k, W_k) + Cov(Z_k, Z_k^a)}{2} \quad (10)$$

La implantación conjunta de ambas técnicas ha obtenido una reducción de varianza superior a cualquiera de las anteriores reducciones individuales, lo cual supone una sinergia *positiva*. La combinación de ambas TRV reduce aún más los intervalos de confianza, debido a que ambas explican parte de la incertidumbre debida a generación y adicionalmente, las variables antitéticas explican parte de la incertidumbre debida al transporte.

Genéricamente la existencia de covarianzas negativas en las parejas antitéticas de variables de salida originales, $Cov(Y_k, Y_k^a)$, no implica que la covarianza inherente a las parejas antitéticas de variables controladas, $Cov(Z_k, Z_k^a)$, sean igualmente negativas. Por lo tanto no está garantizado que cuando ambas TRV por separado reduzcan varianza, la combinación de ambas técnicas genere sinergia positiva.

3. Procedimiento de muestreo.

El alcance temporal de la planificación que ha sido implantado en el modelo se divide en periodos, y a su vez se subdivide en niveles de demanda. Los periodos tienen asociada una duración temporal, incertidumbres en indisponibilidad de generación/red e hidráulica, así como el mantenimiento programado de elementos del sistema. Los niveles de demanda en que se subdivide cada periodo contienen la información del reparto de la demanda del sistema por nudo, y el reparto de la producción hidroeléctrica por central. Debido a esta división del alcance, los periodos entre si presentan independencia estadística, al contrario de lo que ocurre entre los niveles de demanda de un mismo periodo, ya que la hidráulica y las indisponibilidades generación/red son idénticas para todos ellos.

Esta división del alcance y el modelado de la incertidumbre permiten muestrear independientemente por periodo, evitando el muestreo cronológico (flechas grises horizontales en fig. 3). El muestreo por periodo tiene dos ventajas respecto al muestreo cronológico:

- La utilización de resultados de optimizaciones anteriores como puntos iniciales de las optimizaciones acelera la convergencia y requiere menos memoria.
- Se facilita la implantación posterior del procesamiento paralelo para reducir los tiempos de cálculo del modelo.

La existencia de independencia por periodo y por muestra permite que simultáneamente se muestren y optimicen varias muestras de un mismo periodo y nivel. Dicha optimización simultánea tiene por objeto la disminución conjunta de los tiempos de formulación y optimización del modelo, cuya suma en esta implantación presenta un comportamiento no lineal con respecto al tamaño global de las muestras agrupadas.

El muestreo sin aplicar TRV alguna (sorteo de Monte Carlo), utiliza los mismos números aleatorios uniformes en todos niveles del mismo periodo, lo cual se indica mediante las flechas negras de la figura 4. El tratamiento de los números aleatorios aplicando variables de control es análogo al que se realiza sin aplicar TRV alguna (figura 4). La implantación de variables antitéticas requiere que con los mismos números aleatorios uniformes se realicen dos recorridos de los niveles de un mismo periodo, el primero utilizando dichos números aleatorios (muestra independiente), y el segundo utilizando sus números complementarios a la unidad (muestra antitética) (fig. 5).

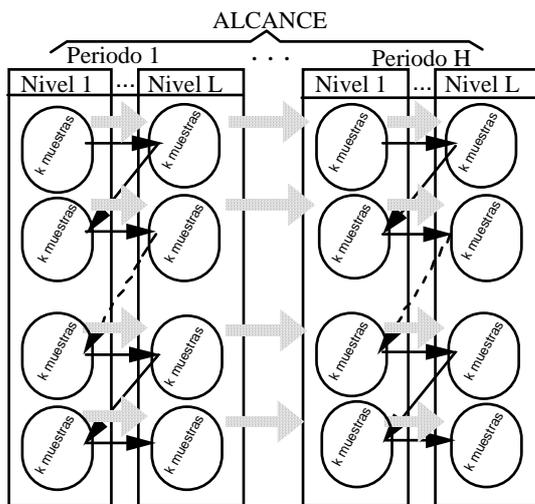


Figura 4.- Sorteo de Monte Carlo.

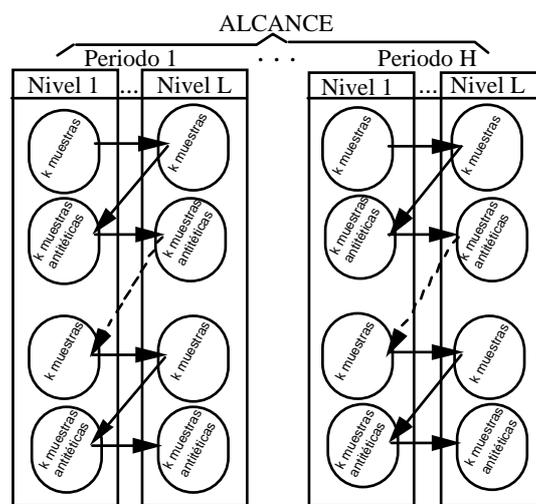


Figura 5.- Sorteo con variables antitéticas.

4. Resultados.

Se ha analizado el impacto sobre los intervalos de confianza que provoca la no utilización de TRV frente al uso de variables antitéticas, variables de control o la combinación de ambas técnicas. Para realizar este contraste se ha utilizado un caso estudio del sistema eléctrico español con cerca de 500 nudos, 200 grupos generadores térmicos e hidráulicos y con la red de transporte modelada en sus niveles de tensión de 400 kV, 220 kV y parte de 132 kV. Este caso estudio contiene equivalentes detallados del sistema eléctrico portugués y del sur del sistema francés.

La tabla II contiene las reducciones de los intervalos de confianza en valor porcentual, aplicando TRV con respecto a los resultados obtenidos sin aplicar TRV alguna.

| Técnicas/VARIABLES | CPTO % | PHT % | PTT % | CVE % | INGPTO % |
|----------------------------------|-----------|----------|----------|----------|-------------|
| VARIABLES ANTITÉTICAS | 71.94 | 84.06 | 84.94 | 48.06 | 53.82 |
| VARIABLES DE CONTROL | 96.07 | 98.03 | 95.76 | 43.45 | 51.06 |
| COMBINACIÓN | 96.19 | 98.08 | 96.41 | 48.63 | 58.86 |

Tabla II.- ∇ Intervalos de confianza respecto muestreo de Monte Carlo.

Siendo:

CPTO: Coste global de producción del sistema.

PHT: Producción hidroeléctrica global.

PTT: Producción térmica global.

CVE: Coste de explotación global (incluye penalizaciones por fiabilidad).

INGPTO: Ingresos de generación (bajo teoría marginalista de remuneración).

La sinergia positiva de ambas técnicas incrementa ligeramente la máxima reducción de varianza obtenida individualmente por las TRV. Expresando las reducciones de los intervalos de confianza en reducciones del tamaño muestral se obtiene la ecuación (11), a partir de (1).

$$\nabla Muestras = \left(\frac{1}{1 - \nabla Intervalos} \right)^2 \quad (11)$$

Utilizando como criterio de parada el tamaño de los intervalos de confianza de alguna de las variables de salida mostradas en la tabla II, se obtienen diferentes reducciones del tamaño muestral según las TRV aplicadas. Utilizando exclusivamente variables antitéticas la reducción muestral puede variar entre 4 y 44, usando variables de control entre 3 y 2500, y usando la combinación de ambas técnicas entre 4 y 2700. Dichas reducciones muestrales se pueden extrapolar directamente a reducciones de los tiempos de cálculo, ya que el coste computacional añadido por la utilización de TRV es pequeño.

5. Conclusiones

Las técnicas de reducción de varianza implantadas en un modelo probabilista para la planificación de la red de transporte a medio plazo, variables antitéticas y variables de control, han obtenido reducciones importantes de la variabilidad de los parámetros relacionados con las producciones y sus costes asociados. Se han analizado diversos factores que afectan a la eficacia reductora de estas técnicas, así como al diseño del procedimiento de muestreo que minimice los requisitos de la simulación. La utilización conjunta de ambas técnicas ha mejorado ligeramente las reducciones individuales de variabilidad ya existentes. Los resultados obtenidos han sido validados con un caso ejemplo de dimensiones reales.

6. Agradecimientos

Este trabajo de investigación ha sido realizado con el apoyo de la empresa RED ELÉCTRICA DE ESPAÑA mediante una beca para la realización de una tesis doctoral. Así mismo agradezco los comentarios realizados por el Dr. Mario Pereira relativos a la obtención de funciones de probabilidad acumulada.

7. Bibliografía

- [1] Sáiz, A. y Martín, Luis, "Planificación de la red de transporte en España". I Jornadas hispano-lusas de Ingeniería, julio 1990.
- [2] De Dios, R., Sáiz, A., Melsión, J.L. y Bassy, A., "PLAER. Strategic Transmission Network Planning". 11TH PSCC, agosto 1993, pp. 941-947.
- [3] Wilson, J.R., "Variance Reduction Techniques for digital simulation". American Journal of Mathematical and Management Sciences, Vol. 4, No. 3&4, pp. 277-312, 1984.
- [4] Bratley, P., Fox, B.L. y Schrage, L.E., "A Guide to Simulation". Segunda Edición. Ed. Springer-Verlag, 1987.
- [5] Law, A.M. y Kelton, W.D., "Simulation Modeling & Analysis". Segunda Edición. Ed. McGraw-Hill International, 1991.
- [6] Anders, G.J., Endrenyi, J., Pereira, M.V.F., Pinto, L.M.V.G., Oliveira, C.G. y Cunha, S.H.F., "Fast Monte Carlo Simulation Techniques for Power System Reliability Studies". CIGRE 38-205, agosto 1990.
- [7] Wijayatunga, P.D.C. y Cory, B.J., "Sample Size Reduction in Monte Carlo based Use of System Costing". IEE International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management, noviembre 1991, Hong Kong, pp. 373-378.
- [8] Sankarakrishnan, A. y Billinton, R., "Sequential Monte Carlo Simulation for Composite Power System Reliability Analysis with Time Varying Loads". IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No.3, agosto 1995, pp. 1540-1545.
- [9] Pereira, M.V.F. y Pinto, L.M.V.G., "Development of a Composite System Reliability Evaluation Program". EPRI EL-6926, Vol. 1,2, agosto 1990.
- [10] Jacobs, J.M., "Approximating Expected Marginal Production Cost with Capacity Commitment Requirements". IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 10, No 3, agosto 1995.
- [11] Breipohl, A., Lee, F.N., Huang, J. y Feng, Q., "Sample Size Reduction in Stochastic Production Simulation". IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No 3, agosto 1990.