UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

4º IIND – Métodos Matemáticos
5 de septiembre de 2007

Apellidos y nombre: Curso:

PROBLEMA 1 (4 puntos)

Una empresa tiene 13 puntos de venta situados sobre una ruta que, a efectos de planificación, puede ser considerada como una línea recta, y que deben ser abastecidos desde unos depósitos a construir coincidiendo con la ubicación de algunos de ellos.

A efectos de decidir dónde deben ser localizados los depósitos hay que tener en cuenta las siguientes condiciones:

1. El coste financiero anual de adquisición de terrenos para la construcción de un depósito depende de su ubicación i, $(i = 1,2,....,13)$ y será designado por c_i. El valor anual de la amortización de la construcción es fijo y vale A.
2. Cada punto de venta tiene una demanda anual dem_i, $(i = 1,2,....,13)$, y debe ser siempre satisfecha en su totalidad desde los depósitos que se han de construir. Desde ningún depósito se pueden enviar a un punto de venta cualquiera más de una cantidad Lim de unidades.
3. El coste de transportar a lo largo del año X_{ij}, $(i, j = 1,2,....,13)$, unidades desde un depósito situado en i a un punto de venta situado en j es

$$\left(K_i + H(i-j)^2\right)X_{ij},\ (i, j = 1,2,....,13)$$

donde K_i es una constante conocida que depende de la ubicación del depósito y H es una constante común.
4. El coste de operación (coste de gestión del inventario, almacenaje, etc.) de un depósito depende del número de puntos de venta a los que suministra unidades y viene dado por

$$M_i + p_i PuntosVenta_i$$

donde $PuntosVenta_i$ es la variable número de puntos de venta atendidos por el depósito situado en i y M_i y p_i son constantes que dependen de la ubicación del depósito.
5. No pueden localizarse depósitos en ubicaciones r y s tales que $|r-s| < 2$.

Elaborar un modelo de programación lineal entera que permita obtener el número óptimo de depósitos a construir y sus ubicaciones

Apellidos y nombre: Curso:

SOLUCIÓN PROBLEMA 1

Aplicarlo a los datos de la tabla adjunta en la que la demanda anual de los puntos de venta viene expresada en miles de unidades y los costes en millones de euros.

Punto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
dem_i	12	11	17	9	15	13	18	20	19	14	22	14	8
c_i	2.3	2.5	2.4	1.7	2.1	1.5	2.0	2.8	2.7	2.2	3.1	1.9	1.3
K_i	1.8	1.7	1.5	1.8	1.9	1.6	2.1	2.6	2.4	2.0	2.3	1.6	1.7
M_i	1.0	1.1	1.2	1.4	1.7	1.8	2.0	2.1	2.2	1.7	2.1	1.2	1.0
p_i	0.4	0.3	0.5	0.8	0.7	0.6	0.5	0.9	0.9	0.4	0.6	0.7	0.8

$A = 1.2$ M€, $H = 0.4$ M€, $Lim = 15$

Variables

1a. *Variables de decisión*

W_i: variable binaria que toma el valor 1 si en la localización i se ha ubicado un depósito.

X_{ij}: cantidad de unidades transportadas durante el año desde el depósito situado en i hasta el punto de ventas situado en j. Variable continua.

2a. *Variables auxiliares*

D_{ij}: variable binaria que toma el valor 1 si desde el depósito situado en i se aprovisiona el punto de venta situado en j.

$PuntosVenta_i$: puntos de venta abastecidos desde i. Variable entera.

$Gasfinan$: gastos financieros anuales asociados a la compra de terrenos.

$Amort$: amortización anual de la construcción de los depósitos.

$Costransporte$: coste anual de transporte de unidades desde los depósitos a los puntos de venta.

$Costoper$: Coste anual de operación de los depósitos.

$Costetotal$: Coste global anual del proyecto

Restricciones

R1: Si no se ubica un depósito en el punto i desde ese lugar no se puede abastecer ningún punto de venta.

$$D_{ij} \le W_i \quad \forall ij$$

Apellidos y nombre: Curso:

R2: La demanda de los puntos de venta debe ser satisfecha

$$\sum_{i=1}^{13} X_{ij} \geq dem_j \quad \forall j$$

R3: No se pueden enviar desde i a j más de Lim unidades

$$X_{ij} \leq LimD_{ij} \quad \forall ij$$

R5: Condición de "distancia" mínima entre depósitos

$$W_i + W_{i+1} + W_{i+2} \leq 1 \quad i = 1, \ldots, 11$$

R6: Puntos de venta abastecidos desde i

$$PuntosVenta_i = \sum_{j=1}^{13} D_{ij} \quad \forall i$$

Función objetivo

$$\min Costetotal = Gasfinan + Amort + Costransporte + Costoper$$

$$Gasfinan = \sum_{i=1}^{13} c_i W_i \,, \; Amort = A \sum_{i=1}^{13} W_i$$

$$Costransporte = \sum_{i,j=1}^{13} \left(K_i + H(i-j)^2 \right) X_{ij}$$

$$Costoper = \sum_{i=1}^{13} \left(M_i W_i + p_i PuntosVenta_i \right)$$

siendo W_i, D_{ij} variables binarias, $PuntosVenta_i$ variable entera y X_{ij} variable continua.

RESULTADO

1. Ubicar depósitos en los puntos 1, 4, 7, 10 y 13.
2. Las unidades (en miles) a enviar desde cada depósito a cada punto de venta se dan en la tabla siguiente

	Punto de venta												
Depósito	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Apellidos y nombre: Curso:

1	12	11	2										
4			15	9	15								
7						13	15	15	4				
10							3	5	15	14	15		
13											11	14	8

3. Coste mínimo: 141.7 M€.

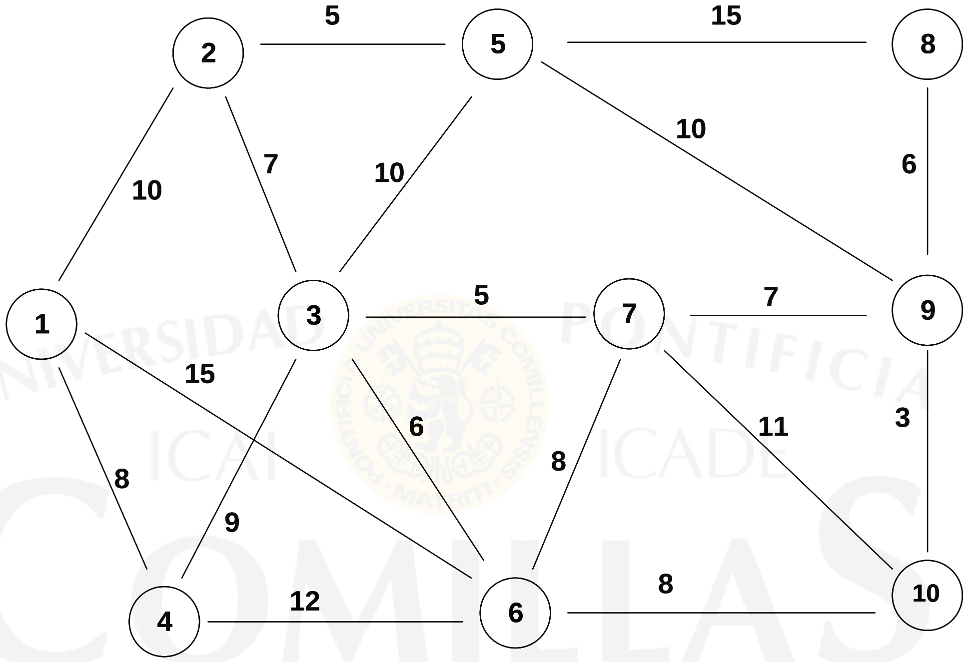
Apellidos y nombre: Curso:

```
$Title Localizacion de depositos

SETS
 i  índice de ubicaciones posibles /1*13/

ALIAS (i,j)

PARAMETERS
 dem(j) demanda del punto de venta j
 /1  12, 2  11,  3 17,  4  9,  5  15,  6 13, 7 18,
  8  20, 9  19, 10 14, 11 22, 12  14, 13  8/

 c(i)  coste financiero anual de adquisición terreno en la ubicacion i
 /1 2.3, 2 2.5,  3 2.4,  4  1.7,  5 2.1,  6 1.5, 7 2.0,
  8 2.8, 9 2.7, 10 2.2, 11  3.1, 12 1.9, 13 1.3/

 K(i)  coste fijo asociado al transporte desde un depósito localizado en i
 /1 1.8, 2 1.7,  3 1.2,  4 1.4,  5 1.9,  6 1.6, 7 2.1,
  8 2.6, 9 2.4, 10 2.0, 11 2.3, 12 1.6, 13 1.7/

 M(i)  coste fijo de operación de un depósito localizado en i
 /1 1.0,2 1.1, 3 1.2, 4  1.4, 5 1.7, 6 1.8,7 2.0,
 8  2.1,9 2.2,10 1.7,11  2.1,12 1.2,13 1.0/

 p(i)  coste asociado al número de puntos de ventas aprovisionados desde i
 /1 0.4, 2 0.3,  3 0.5,  4 0.8,  5 0.7,  6 0.6, 7 0.5,
  8 0.9, 9 0.9, 10 0.4, 11 0.6, 12 0.7, 13 0.8  /

SCALARS
 A  Amortización anual construccion e instalaciones  /1.2/
 H  Coeficiente del coste variable de transporte     /0.4/
 L  Número límite de unidades a enviar (en miles)    / 15/

VARIABLES
W(i)            Binaria: vale 1 si se ubica un depósito en el punto i
X(i,j)          Unidades anuales enviadas desde el depósito i al punto de venta j
D(i,j)          Binaria: vale 1 si se envian unidades desde i a j
Puntosventa(i)  Numero de puntos de ventas aprovisionados desde i
Gasfinan        Gasto financiero global anual de la compra de terrenos
Amort           Amortizacion global anual de construcción e instalaciones
Costransporte   Coste anual global desde los depositos a los puntos de venta
Costoper        Coste anual global de operacion de los depósitos
Total           La suma de los anteriores costes

Binary  variables W, D
Integer variables X, Puntosventa

EQUATIONS
Abastec (i,j)    Si no hay deposito en i no se puede abastecer punto de venta j
                 Ni enviar una cantidad superior a su demanda
Limenvio(i,j)    No se puede enviar mas de L unidades desde i a j
Cubredemanda(j)  La demanda de cada punto de venta debe ser satisfecha
Distanciamin(i)  Distancia minima entre depositos
Puntventas(i)    Puntos de venta abastecidos desde i
Financiero       Coste financiero global anual
Amortizacion     Coste amortizacion global anual
Transporte       Coste transporte global anual entre depositos y puntos venta
Operacion        Coste operacion global anual de los depositos
Costetotal       Coste total anual asociado al proyecto ;

Abastec(i,j)..     X(i,j)=l=dem(j)*W(i);
Limenvio(i,j)..    X(i,j)=l=L;
Cubredemanda(j).. sum(i,X(i,j))=g=dem(j)*W(j);
Distanciamin(i).. W(i)+W(i+1)+W(i+2)=l=1;
Puntventas(i)..    Puntosventa(i)=e=sum(j,D(i,j));
Financiero..       Gasfinan=e=sum(i,c(i)*W(i));
Amortizacion..     Amort=e=A*sum(i,W(i));
Transporte..       Costransporte=e=sum(i,k(i))
                  +sum((i,j),H*(ord(i)-ord(j))*(ord(i)-ord(j))*X(i,j));
Operacion..        Costoper=e=sum(i,M(i)*W(i)+p(i)*puntosventa(i));
Costetotal..       Total=e=Gasfinan+Amort+Costransporte+Costoper;

Model   Depositos /all/
Solve   Depositos using MIP minimizing Total
Display Costetotal.l, X.l, W.l;
```

Apellidos y nombre: Curso:

PROBLEMA 2 (4 puntos)

Sea la red no orientada de la figura, en la que la cantidad expresada junto a cada arista representa un coste asociado a la misma.

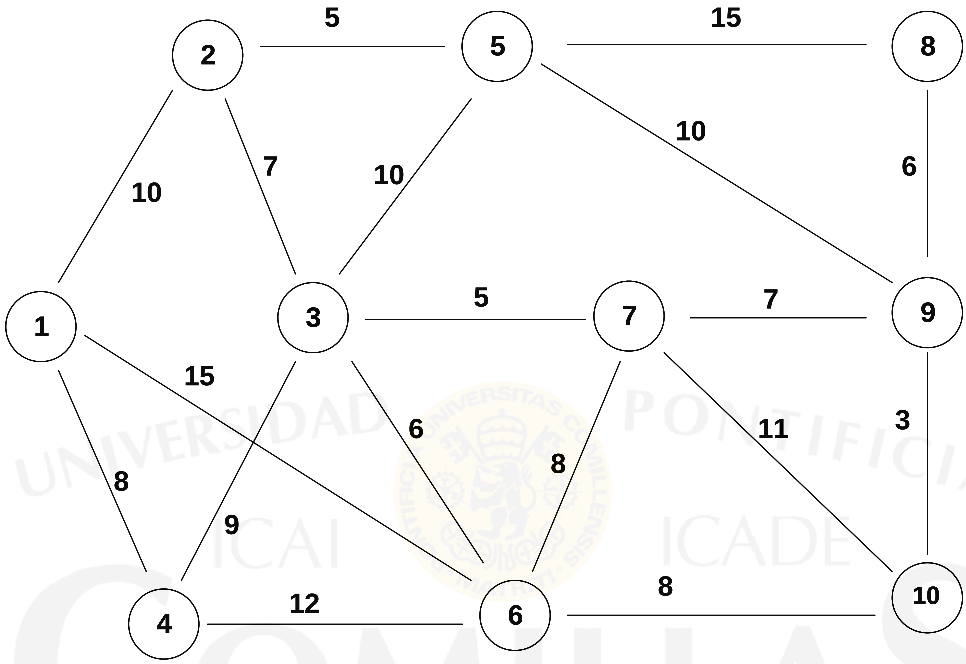


1. Obtener un árbol de expansión de coste mínimo asociado a dicha red.
2. ¿Cómo se modifica la solución anterior si el número máximo de aristas incidentes en cualquier vértice es 3? Dar otros posibles árboles de expansión que cumplan esta condición.
3. Supóngase que el coste de la arista (6,10) es aleatorio con función de distribución $F(x) = 1 - e^{-\sqrt{\frac{x-t_a}{3}}}$, $x \geq t_a$ donde t_a es el tiempo de ejecución de dicha arista que es, a su vez, aleatorio con función de densidad $f(t_a) = \frac{1}{54} t_a (9 - t_a)$, $6 \leq t_a \leq 9$.

   ¿Especificar en detalle el procedimiento para determinar el árbol de expansión en este caso? Utilizar a tal efecto las siguientes secuencias de números aleatorios

Serie 1	0.209	0.942	0.917	0.322	0.629
Serie 2	0.093	0.443	0.948	0.614	0.220
Serie 3	0.669	0.774	0.652	0.565	0.707
Serie 4	0.025	0.475	0.761	0.145	0.113

Apellidos y nombre: Curso:



Nota:* *Utilícense las figuras para representar sobre ellas los respectivos árboles de expansión de coste mínimo. En hoja aparte describir el proceso seguido para obtenerlos.

Apellidos y nombre: Curso:

SOLUCIÓN PROBLEMA 2

La simulación comenzaría obteniendo una duración simulada de la arista (6,10), cuya función de densidad es $f(t_a) = \frac{1}{54} t_a (9 - t_a)$, $6 \le t_a \le 9$ mediante el método de aceptación-rechazo simple. Para ello intentamos obtener su valor máximo:

$$f'(t_a) = \frac{1}{54}(9 - 2t_a) < 0 \text{ si } t_a \ge 6$$

lo que muestra que su valor máximo se obtiene para $t_a = 6$ y vale 0.333.

La simulación de la duración de la arista (6,10) sigue los siguientes pasos:

a. Obtener dos números aleatorios $u_1, v_1 \in [0,1)$.
b. Obtener a partir de ellos sendos números, t_1 e y_1, uniformemente distribuidos en los intervalos $[6,9]$ y $[0, 0.333]$ respectivamente
$$t_1 = 6 + 3u_1\,,\ y_1 = 0.333 v_1$$
c. Si $f(t_1) \le y_1$ aceptamos t_1 como duración de la arista. En otro caso repetimos los puntos 1 y 2.

Una vez simulada la duración, se simula el coste de la arista aplicando el método de la transformada inversa a la función

$$F(x) = 1 - e^{-\sqrt{\frac{x - t_a}{3}}}\,,\ x \ge t_a$$

Para ello seguimos el siguiente procedimiento:

1. Obtener un número aleatorio $w_1 \in [0,1)$.
2. Resolver la ecuación
$$w_1 = 1 - e^{-\sqrt{\frac{x - t_1}{3}}} \Rightarrow x = t_1 + 3\left(\log(1 - w_1)\right)^2$$
donde t_1 es la duración simulada de la arista obtenida previamente. Con este coste se vuelve a obtener el árbol de expansión de coste mínimo. A cada arista se le asocia un contador que se incrementa en una unidad cada vez que ha sido seleccionada como parte del árbol de extensión en una simulación. Tras un número elevado N de simulaciones se divide cada

contador por N y el cociente es una estimación de la probabilidad de que esa arista integre el árbol.

UNIVERSIDAD PONTIFICIA
ICAI ICADE
COMILLAS
MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL

Apellidos y nombre: Curso:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

La fabricación de tres artículos, x, y y z, requiere dos materias primas, M1 y M2, de las que hay 4800 y 5400 unidades respectivamente en existencias. Los beneficios unitarios de esos artículos ascienden a 2, 5 y 4 € respectivamente y los requerimientos de materias primas de cada unidad de los productos vienen dados en la tabla

	x	y	z
M1	1	4	3
M2	2	3	5

El siguiente modelo de programación lineal proporciona la gama de artículos para los que el beneficio total es máximo

$$\max W = 2x + 5y + 4z$$
$$x + 4y + 3z \leq 4800$$
$$2x + 3y + 5z \leq 5400$$
$$x, y, z \geq 0$$

La tabla final del simplex de este programa es

	x	y	z	$h1$	$h2$	Cotas
$-W$	0	0	–1.4	–0.8	–0.6	–7080
x	1	0	2.2	–0.6	0.8	1440
y	0	1	0.2	0.4	–0.2	840

Se pide:

1. Se consiguen 100 unidades más de M1 y 200 de M2, ¿seguirá estando la gama óptima de producción constituida por artículos de los tipos x e y?, ¿por qué? Si así fuera, ¿cuántos artículos de los tipos x e y se producirían?
2. ¿Qué habría que hacer si hubiera que satisfacer una demanda global de 2500 unidades?
3. ¿Cuál debería ser el beneficio mínimo proporcionado por una unidad de z para que fuera económicamente interesante su producción? ¿Cuál sería en ese caso la gama de producción?

Apellidos y nombre: Curso:

4. Cabe la posibilidad de fabricar unidades de un cuarto artículo A. Una unidad de A requiere 6 unidades de M1 y 4 de M2. ¿Cuál es el beneficio mínimo que debería proporcionar para que económicamente fuera interesante su producción?