Problema: Taller (Job shop)

Un taller produce dos tipos de equipos, XXX e YYY. El equipo XXX admite dos formas distintas de ensamblaje:

F1: 3 componentes tipo A, 4 componentes tipo B y 5 componentes de tipo C
F2: 4 componentes tipo A, 5 componentes tipo B y 3 componentes de tipo C

mientras que el ensamblaje de una unidad de YYY requiere 4 componentes de cada tipo.

Se dispone de 4000 componentes de tipo A, 5000 componentes B y 4500 componentes C.

Si el dispositivo XXX es ensamblado según el proceso F1 proporciona un beneficio unitario de 18 € y de 16 € si lo es por el proceso F2. Una unidad de YYY genera un beneficio de 15 €. Las componentes no utilizadas son saldadas con una pérdida unitaria de 1 €.

Contratos firmados exigen fabricar al menos 400 unidades de cada equipo.

Elaborar un modelo integrado de programación lineal que determine qué proceso debe utilizarse para fabricar XXX y cuántas unidades de cada equipo conviene fabricar para obtener el máximo beneficio.

Resultado del problema: Taller (Job shop)

Índices

i: Proceso de ensamblaje utilizado para el equipo XXX {F1, F2}
j: Componentes de ensamblado {A, B, C}

Parámetros

bx_i: Beneficio unitario del equipo XXX ensamblado con el proceso i
by: Beneficio unitario del equipo YYY
m_j: Cantidad de componentes j disponibles
nx_{ij}: Cantidad de componentes j necesarios para ensamblar equipos XXX según el proceso i
ny_j: Cantidad de componentes j necesarios para ensamblar equipos YYY
q: Pérdida unitaria por componente no utilizada
rx: Cantidad mínima de equipos XXX que ha de ser fabricada
ry: Cantidad mínima de equipos YYY que ha de ser fabricada
s: Cota superior de equipos XXX ensamblados

Variables

X_i: Cantidad de equipos XXX ensamblados con el proceso i
Y: Cantidad de equipos YYY ensamblados

Z_j : Cantidad de componentes j no utilizadas
W : Indicador del proceso de ensamblaje utilizado para el equipo XXX {0/1}

Función objetivo

Se maximiza la suma del beneficio de los equipos vendidos restando las pérdidas de los componentes no utilizados

$$\max \sum_i bx_i X_i + byY - q\sum_j Z_j$$

Restricciones

Se limita el número de componentes utilizados según las existencias disponibles. Se suma cada tipo de componente utilizado por los procesos de ensamblaje de los equipos XXX y del ensamblaje del equipo YYY. Dicha suma junto con la cantidad de componente no utilizada es igual a la cantidad de componente disponible.

$$\sum_i nx_{ij} X_i + ny_j Y + Z_j = m_j \quad \forall j$$

Se obliga a fabricar al menos una cantidad de equipos XXX

$$\sum_i X_i \ge rx$$

Se obliga a fabricar al menos una cantidad de equipos YYY

$$Y \ge ry$$

Se elige uno de los dos procesos de ensamblaje de los equipos XXX

$$X_{F1} \le sW$$
$$X_{F2} \le s(1-W)$$

Todas las variables del modelo son mayores o iguales que cero.

Problema: Mezcla de gasolinas (Gasoline mix)****

Una compañía petrolera produce dos tipos de gasolina, G1 y G2, que vende a 0.8 y 0.9 €/l respectivamente.

La refinería puede comprar cuatro tipos de crudos cuyos precios y componentes (proporción unitaria) se dan en la tabla siguiente.

Tipo de crudo	A	B	C	Precio [€/l]
1	0.8	0.1	0.1	0.2
2	0.3	0.4	0.3	0.12
3	0.6	0.1	0.3	0.25

4	0.3	0.5	0.2	0.16

En el proceso de mezcla se pierde, por evaporación, el 2 % de A y el 1 % tanto de B como de C.

La gasolina G2 debe tener, cuando menos, un 60 % de A y no más del 30 % de C. Por su parte G1 no debe sobrepasar el 50 % de B.

Determinar las cantidades relativas de crudos que deben utilizarse para optimizar el programa de fabricación en orden a un beneficio máximo.

RESULTADO DEL PROBLEMA: MEZCLA DE GASOLINAS (GASOLINE MIX)

Índices

i: Tipo de gasolina $\{G1, G2\}$

j: Tipo de crudo $\{1,2,3,4\}$

k: Componente del crudo $\{A, B, C\}$

Parámetros

p_i: Precio del litro de gasolina i

pc_j: Precio del litro de crudo j

e_k: Porcentaje unitario de evaporación del componente k

o_{jk}: Proporción unitaria del componente k en el crudo j

Variables

G_i: Proporción unitaria de producción de gasolina tipo i

C_{ij}: Proporción unitaria de utilización de crudo tipo j en la elaboración de gasolina tipo i

Función objetivo

Se maximiza el beneficio sumando los ingresos obtenidos multiplicando el precio de la gasolina por su proporción en la producción y restando los costes de compra de los distintos tipos de crudo en su proporción respectiva.

$$\max \sum_i p_i G_i - \sum_{ij} pc_j C_{ij}$$

Restricciones

Los porcentajes unitarios de gasolina producida deben sumar la unidad

$$\sum_i G_i = 1$$

Las restricciones relacionadas con la composición de la gasolina $G2$ respecto de los componentes A y C se expresan con las siguientes desigualdades.

$$(1-e_A)\left(\sum_j o_{Aj} C_{G2j}\right) \geq 0.6G_2$$

$$(1-e_C)\left(\sum_j o_{Cj} C_{G2j}\right) \leq 0.3G_2$$

La restricción relacionada con la composición de la gasolina $G1$ respecto del componente B

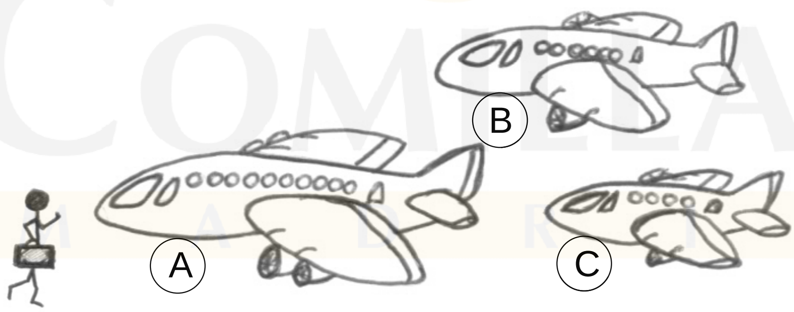
$$(1-e_B)\left(\sum_j o_{Bj} C_{G1j}\right) \leq 0.5G_1$$

Las variables son todas mayores o iguales a cero

$$G_i, C_{ij} \geq 0$$

PROBLEMA: FLOTA AÉREA (CHARTER FLIGHTS)

Una compañía aérea tiene una flota de 15 aeronaves: 5 de cada uno de tres tipos A, B y C, cuyas respectivas capacidades para el transporte de viajeros son de 80, 68 y 55 personas.



Una agencia de viajes le solicita presupuesto para trasladar a 372 personas. La compañía analiza sus costes, que dependen del número de aviones de cada tipo que quiera utilizar para transportar a esas personas, datos que se dan en la siguiente tabla en miles de euros.

Tipo	1	2	3	4	5
A	11	20	30	40	50
B	9	17	24	34	45
C	8	15	21	26	31

Además la compañía aérea incurre en un coste fijo adicional de 6 k€ por cada tipo de aviones que utilice.

Proponer un modelo de programación lineal entera cuyo objetivo sea determinar la composición óptima de la flotilla de aviones que va a realizar el transporte para minimizar los costes de la operación.

RESULTADO DEL PROBLEMA: FLOTA AÉREA (CHARTER FLIGHTS)

Índices

i: Tipo de avión $\{A, B, C\}$

j: Número de aviones utilizados $\{1,...,5\}$

Parámetros

c_{ij} : Coste de utilizar j aviones de tipo i (tabla del enunciado + coste fijo)

d : Demanda de transporte (372 pasajeros)

p_{ij} : Capacidad de transporte de pasajeros con j aviones de tipo i

Variables

X_{ij}: Indicador de utilización de j aviones de tipo i $\{0/1\}$

Función objetivo

Se minimiza el coste total multiplicando el coste del número de aviones utilizados de cada tipo incluyendo en dicho coste el coste fijo adicional de 6 k€ por el indicador de utilizar un número de aviones de un determinado tipo.

$$\min \sum_{ij} c_{ij} X_{ij}$$

Restricciones

Se ha de garantizar el traslado del número de pasajeros y para ello se multiplica la capacidad de transporte de un número de aviones de cada tipo por su indicador binario respectivo. La capacidad de transporte de un número de aviones se calcula previamente multiplicando la capacidad de cada tipo de avión por el número de aviones.

$$\sum_{ij} p_{ij} X_{ij} \geq d$$

En cada tipo de avión solamente se puede elegir un número de aviones

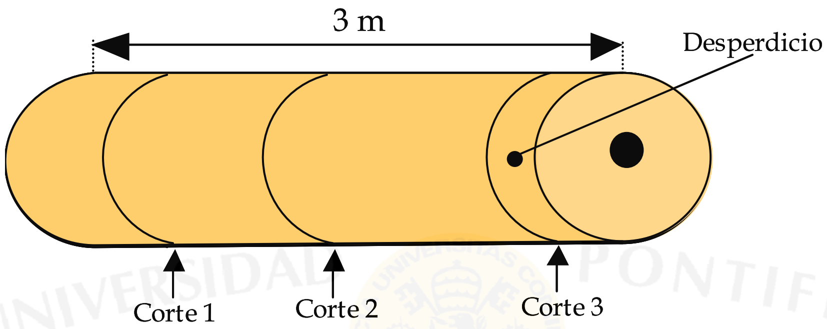
$$\sum_{j} X_{ij} \leq 1 \quad \forall i$$

Las variables de decisión son binarias

$$X_{ij} \in \{0,1\}$$

PROBLEMA: CORTE DE BOBINAS (PAPER ROLL CUT)

Una empresa fabrica bobinas madre de papel de longitud fija 3 metros. Posteriormente las corta transversalmente según las medidas de los pedidos de clientes. En la figura siguiente se muestra el corte de la bobina madre en cuatro bobinas, una de las cuales constituye desperdicio de la bobina ya que no corresponde con pedido alguno.



A continuación se muestran los pedidos de los clientes de una semana con sus cantidades y longitudes.

Tipo de pedido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bobinas	20	30	15	25	40	25	50	15	10	5
Longitud [m]	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75

Se ha de tener en cuenta que técnicamente no es posible realizar más de cuatro cortes en una misma bobina. La asignación de los cortes a las bobinas madre puede dar lugar a desperdicios de bobina. Estos desperdicios sólo se pueden reutilizar introduciéndolos al comienzo del proceso de fabricación del papel.

Mediante un modelo de programación lineal entera establecer la planificación semanal de fabricación de bobinas y corte de las mismas.

a) Establecer índices, parámetros y variables del modelo
b) Establecer genéricamente la función objetivo de la planificación
c) Establecer genéricamente las restricciones del modelo
d) Modelar que técnicamente en las bobinas madre con algún pedido de tipo 1 se ha de incluir algún pedido de tipo 5 o tipo 9

RESULTADO DEL PROBLEMA: CORTE DE BOBINAS (PAPER ROLL CUT)

a) Establecer índices, parámetros y variables del modelo

Índices

i: Tipos de bobinas del cliente {1,...,10}
j: Bobinas madre utilizadas {1,....,nº máximo semanal}

Parámetros
l_i: Longitud de la bobina de tipo i [m]
n_i: Número de bobinas semanales de tipo i requeridas

Variables
X_{ij}: Número de bobinas de tipo i asignadas a la bobina j
Y_j: Utilización de la bobina madre j {0/1}

b) Establecer genéricamente la función objetivo de la planificación

Se ha de minimizar el número de bobinas madre utilizadas en la planificación semanal. Esta función objetivo es equivalente a minimizar el desperdicio.

$$\min \sum_j Y_j$$

c) Establecer genéricamente las restricciones del modelo

c.1) Realización de pedidos de tipo i de los clientes

La cantidad de pedidos de tipo i han de ser realizados y para ello se suman los pedidos de tipo i realizados en cada bobina j

$$\sum_j X_{ij} = n_i \quad \forall i$$

c.2) Limitación del número de pedidos por bobina

Para ser asignado un pedido a una bobina, dicha bobina ha de estar indicada como utilizada. Adicionalmente el número máximo de cortes por bobina es de cuatro por lo que el número máximo de pedidos asignados a una bobina es de cinco

$$\sum_i X_{ij} \le 5Y_j \quad \forall j$$

d) Modelar que técnicamente en las bobinas madre con pedidos de tipo 1 se ha de incluir pedidos de tipo 5 o tipo 9

En el caso de que se realice una o más bobinas de tipo 1 en la bobina madre se han de realizar al menos una o más bobinas de tipo 5 ó 9

$$X_{1j} \ne 0 \Rightarrow X_{5j} \ne 0 \text{ ó } X_{9j} \ne 0 \Rightarrow 5\left(X_{5j} + X_{9j}\right) \ge X_{1j}$$

PROBLEMA: ALQUILER DE COCHES (CAR RENTING)

Un turista aventurero desea hacer un viaje por Europa, visitando España, Francia, Alemania, Austria, Suiza e Italia, por este orden, para regresar a España por avión. Puede, en cada uno de los seis países, alquilar uno de tres tipos de turismos que, de acuerdo con sus características, precios de los combustibles y recorridos a realizar en cada país, gastarán en combustible los euros indicados en la tabla.

El turista es libre, al llegar a un nuevo país, de cambiar o no de vehículo, pero cada vez que cambia de vehículo tiene que pagar 25 € por gastos de documentación en el alquiler del nuevo vehículo

Turismo	España	Francia	Alemania	Austria	Suiza	Italia
A	160	210	180	110	85	170
B	120	240	165	135	100	160
C	150	200	175	140	115	135

Diseñar un modelo de programación lineal que permita determinar qué vehículo debe ser utilizado en cada país con el fin de minimizar el coste del transporte.

RESULTADO DEL PROBLEMA: ALQUILER DE COCHES (CAR RENTING)

Índices

i: Tipo de turismo $\{A, B, C\}$

j: Relación de países por los que se pasa $\{E, F, Al, Au, S, I\}$

k: Relación de países donde se puede cambiar de turismo $\{F, Al, Au, S, I\}$

Parámetros

p: Coste de cambio de turismo

c_{ij}: Coste del uso del turismo i en el país j

Variables

X_{ij}: Indicador de si el tipo de turismo i se utiliza en el país j $\{0/1\}$

Z_k: Indicador de si se cambia de tipo de turismo i en el país k $\{0/1\}$

Función objetivo

Se minimiza el coste de uso y cambio de turismo a lo largo de los países visitados

$$\min \sum_{i=A}^{C} \sum_{j=E}^{I} c_{ij} X_{ij} + p \sum_{k=F}^{I} Z_k$$

Restricciones

En cada país se ha de usar un vehículo y sólo uno.

$$\sum_{i=A}^{C} X_{ij} = 1 \quad \forall j$$

El indicador de cambio de turismo en cada país donde se puede realizar el cambio se obliga a valer 1 cuando se utiliza distinto tipo de turismo en dos países consecutivos en la visita.

$$X_{ik} - X_{ik-1} \leq Z_k \quad \forall ik$$

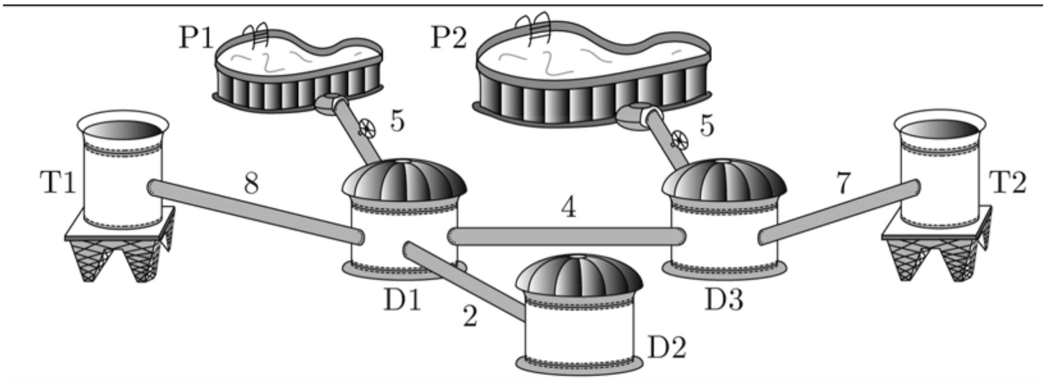
PROBLEMA: PISCINAS (SWIMMING POOLS)

El pueblo palentino de "Venta de Baños" se caracteriza por tener las piscinas mejores de la zona, una familiar P1 y otra olímpica P2. Este verano próximo se avecina escaso de agua y por ello el Ayuntamiento se está planteando la posibilidad de clausurar las dos piscinas, una de ellas o ninguna con el fin de satisfacer en lo posible otros consumos. El abastecimiento de agua proviene de dos tomas, la toma oeste T1 y la toma este T2 que abastecen a tres depósitos de capacidad ilimitada dentro del casco urbano, D1, D2 y D3, de los cuales se extrae el agua para los consumos en m^3 que se indican en la tabla siguiente. Se ha de tener en cuenta que si no se abastece completamente el consumo mínimo diario de cada piscina, la calidad del agua se deterioraría y por tanto no sería apta para el baño.

	Consumo doméstico	Consumo agrícola	Piscina
D1	150	100	50
D2	100	50	25
D3	400	0	

El Concejal de Servicios Públicos ha estimado que la carencia diaria de agua para consumo doméstico implica un coste social de 3 €/m^3 y para consumo agrícola de 1 €/m^3. El cierre de la piscina olímpica implicaría una pérdida diaria de imagen valorada en 50 € y el cierre de la familiar en 100 €. El cierre de las dos piscinas implicaría una pérdida diaria de imagen de 200 €.

Cada tubería que conecta los pozos, depósitos y piscinas tienen un coste de transporte expresado en c€/m^3 indicado en la figura. También se indica en la figura el volumen disponible diario de los pozos.



Se pide formular un problema de programación matemática que permita decidir sobre el cierre de las piscinas e indique la cantidad de agua suministrada y no suministrada por tipo de consumo.

a) Establecer la nomenclatura de índices, parámetros y variables del modelo
b) Establecer la función objetivo
c) Establecer la restricción y cotas relacionadas con el depósito D1
d) Establecer la restricción y cotas relacionadas con D2
e) Establecer la restricción o restricciones que modelan el cierre simultaneo de las piscinas

RESULTADO DEL PROBLEMA: PISCINAS (SWIMMING POOLS)

a) Establecer la nomenclatura de índices, parámetros y variables del modelo

Índices

i, j : Nudos cualesquiera de la red

T : Conjunto de nudos de la red con tomas {P1, P2}

D : Conjunto de nudos de la red con depósito {D1, D2, D3}

P : Conjunto de nudos de la red con piscina {P1, P2}

Parámetros

cd_i : Consumo diario doméstico en el depósito i [m^3]

ca_i : Consumo diario agrícola en el depósito i [m^3]

cp_i : Consumo diario en la piscina i [m^3]

c_{ij} : Coste de transporte entre el nudo i y j [c€/m^3]

pd : Penalización diaria por carencia de agua de uso doméstico [€/m^3]

pa : Penalización diaria por carencia de agua de uso agrícola [€/m^3]

pp_i : Penalización diaria por clausura de la piscina i [€]

q : Penalización diaria adicional por la clausura de las dos piscinas [€]

v_i : Volumen diario disponible de agua en la toma i [m^3]

Variables

X_{ij} : Caudal diario desde el nudo i al nudo j [m^3]

D_i : Carencia de agua de uso doméstico en el nudo i [m^3]

A_i : Carencia de agua de uso agrícola en el nudo i [m^3]

Y_i : Decisión binaria sobre la clausura de la piscina i {0 - se cierra}

Z : Decisión binaria sobre la clausura de las dos piscinas {0 - cierran ambas}

b) Establecer la función objetivo

En la función objetivo se minimiza el coste de transporte de los caudales, el coste de carencia de suministro de agua de uso doméstico y agrícola y el coste de clausura posible de piscinas.

$$\min \sum_{ij} c_{ij} X_{ij} + pd \sum_i D_i + pa \sum_i A_i + \sum_i pp_i (1 - Y_i) + q(1 - Z)$$

Su expresión numérica se indica a continuación:

$$\min \left\{ \begin{array}{l} 0.08 \frac{€}{m^3} X_{T1D2} + 0.07 \frac{€}{m^3} X_{T2D1} + 0.05 \frac{€}{m^3} X_{D2P1} + 0.05 \frac{€}{m^3} X_{D1P2} \\ +0.04 \frac{€}{m^3} (X_{D2D1} + X_{D1D2}) + 0.02 \frac{€}{m^3} (X_{D2D3} + X_{D3D2}) \\ +3 \frac{€}{m^3} (D_{D1} + D_{D2} + D_{D3}) + 1 \frac{€}{m^3} (A_{D1} + A_{D2}) \\ +50 € \cdot (1 - Y_{P1}) + 100 € \cdot (1 - Y_{P2}) + 50 € \cdot (1 - Z) \end{array} \right\}$$

c) Establecer la restricción y cotas relacionadas con el depósito D1

$$X_{D1P2} + X_{D1D2} - X_{D2D1} - X_{T2D1} = -150 - 100 + D_{D1} + A_{D1}$$
$$X_{D1P2} = 50 Y_{P2}$$

$$0 \le D_{D1} \le 150\, m^3$$
$$0 \le A_{D1} \le 100\, m^3$$
$$0 \le X_{T2D1} \le 400\, m^3$$

d) Establecer la restricción y cotas relacionadas con D2

$$X_{D2P1} + X_{D2D1} + X_{D2D3} - X_{T1D2} - X_{D1D2} = -100 - 50 + D_{D2} + A_{D2}$$
$$X_{D2P1} = 25 Y_{P1}$$

$$0 \le D_{D2} \le 100\, m^3$$
$$0 \le A_{D2} \le 50\, m^3$$
$$0 \le X_{T1D2} \le 400\, m^3$$

Para el depósito D3

$$X_{D3D2} - X_{D2D3} = -400 + D_{D2}$$

$$0 \leq D_{D3} \leq 400\, m^3$$

e) Establecer las restricciones que modelan el cierre o no de las piscinas

$$Y_{P1} + Y_{P2} \geq Z$$
$$Y_{P1} + Y_{P2} \leq 2Z$$