PROBLEMA: PRODUCCIÓN DE TRES PRODUCTOS (PRODUCTION OF THREE PRODUCTS)

Una compañía fabrica una gama de tres productos, A, B y C, en seis diferentes factorías. Los costes unitarios de fabricación de cada producto y las capacidades de las seis plantas están dados en la tabla adjunta.

Producto	F1	F2	F3	F4	F5	F6
A	25	30	26	34	32	30
B	30	32	34	35	38	40
C	40	46	42	37	40	50
Capacidad	550	700	1100	350	400	450

Los tres productos pueden venderse en cualquier cantidad, pero el departamento de ventas tiene ya firmados contratos por los que hay comprometidas 700 unidades de A, 500 de B y 600 de C.

Los precios de venta para A, B y C son respectivamente de 60, 82.5 y 108 €.

Proponer un modelo de programación lineal que planifique la producción de manera que se maximice el beneficio

RESULTADO DEL PROBLEMA: PRODUCCIÓN DE TRES PRODUCTOS (PRODUCTION OF THREE PRODUCTS)

Índices

i: Índice de los productos {A, B, C}

j: Índice de las fábricas {F1, F2, F3, F4, F5}

Parámetros

p_i: precio del producto i

c_{ij}: coste de fabricación del producto i en la fábrica j

b_i: cantidad contratada del producto i

f_j: capacidad de la fábrica j

Variables

X_{ij}: Cantidad de producto i producido en la fábrica j

Función objetivo

Maximizar el beneficio restando del precio de venta el coste de fabricación

$$\max \sum_i \sum_j \left(p_i - c_{ij}\right) X_{ij}$$

Restricciones

Capacidad de la fábrica j

$$\sum_i X_{ij} \le f_j \quad \forall j$$

Contrato del producto i

$$\sum_j X_{ij} \ge b_i \quad \forall i$$

(Se considera que las cantidades a producir pueden superar las cantidades contratadas)

Variables no negativas

$$X_{ij} \ge 0 \quad \forall ij$$

PROBLEMA: MAGDALENAS (MUFFINS)

Una empresa de panadería especializada en la elaboración de magdalenas artesanas, ofrece tres variedades de magdalenas: de huevo, de vainilla y de chocolate. Cada variedad debe procesarse con dos tipos de máquinas: la amasadora y el horno. En la tabla siguiente se muestra el tiempo, en decenas de minutos, que se tarda en procesar cada docena de magdalenas con cada máquina, así como el beneficio obtenido con cada docena de magdalenas.

Tipo de máquina	Magdalenas de huevo	Magdalenas de vainilla	Magdalenas de chocolate	Disponibilidad
La amasadora	2	5	4	70
El horno	3	4	6	86
Beneficio (c€)	80	70	95	

Se pide:

a) Formular el problema de programación lineal que proporcione el mayor beneficio para la empresa.

b) Suponga que la empresa se plantea aumentar la disponibilidad de cada máquina según la tabla 2 pero sólo puede realizar a lo sumo un tipo de incremento para cada máquina. En total se dispone de un capital de 3400 € para realizar las inversiones. Formule el problema de programación lineal que proporcione los elementos a considerar para obtener un mayor beneficio.

Tipo de máquina	La amasadora		El horno	
Incremento en disp. (10 min)	10	15	8	12
Coste inversión (x 10 €)	160	170	170	175

c) Si sólo se invierte en un aumento de disponibilidad del horno en el caso de que se invierta en la amasadora, ¿cómo se formula esta condición?

d) Si se invierte en un aumento de disponibilidad de el horno si y sólo si se invierte en la amasadora, ¿cómo se formula esta condición?

RESULTADO DEL PROBLEMA: MAGDALENAS (MUFFINS)

1. Formular el problema de programación lineal que proporcione el mayor beneficio para la empresa.

<u>Índices</u>

i: Índice de tipos de magdalenas fabricadas {huevo, vainilla, chocolate}

j: Índice de máquinas {la amasadora, el horno}

<u>Parámetros</u>

t_{ij}: Tiempo invertido en fabricar magdalenas del tipo i en el tipo de máquina j

c_j: Tiempo disponible en el tipo de máquina j

b_i: Beneficio obtenido por cada docena de magdalenas del tipo i

<u>Variables</u>

X_i: Número de docenas de magdalenas del tipo i fabricadas

<u>Función objetivo</u>

$$\max \sum_i b_i X_i$$

<u>Restricciones</u>

$$\sum_i t_{ij} X_i \leq c_j$$

$$X_i \geq 0$$

2. Suponga que la empresa se plantea aumentar la disponibilidad de cada máquina según la tabla 2 pero sólo puede realizar a lo sumo un tipo de incremento para cada máquina. En total se dispone de un capital de 3400 € para realizar las inversiones. Formule el problema de programación lineal que proporcione los elementos a considerar para obtener un mayor beneficio.

Tipo de máquina	La amasadora		El horno	
Incremento en disponibilidad (10 min)	10	15	8	12
Coste inversión (10 €)	160	170	170	175

Nuevo índice

k : Índice de tipo de inversión {1,2}

Nuevos parámetros

g_{jk} : Inversión en la máquina j del tipo k

h_{jk} : Incremento de la disponibilidad de la máquina j tras la inversión de tipo k

p : Inversión máxima disponible

Nuevas variables

Y_{jk} : Variable de decisión de invertir en la disponibilidad de la máquina j usando el tipo k

Nueva función objetivo:

$$\max \sum_i b_i X_i - \sum_k \sum_j g_{jk} Y_{jk}$$

Nuevas restricciones

Limitación de disponibilidad con inversiones:

$$\sum_i t_{ij} X_i \le c_j + \sum_k h_{jk} Y_{jk} \quad \forall j$$

Limitación de presupuesto

$$\sum_i g_{jk} Y_{jk} \le p$$

Limitación lógica de inversiones

$$\sum_k Y_{jk} \le 1 \quad \forall j$$

$$X_i \ge 0$$

3. Si sólo se invierte en un aumento de disponibilidad del horno en el caso de que se invierta en la amasadora, ¿cómo se formula esta condición?

$$Y_{21} + Y_{22} \le Y_{11} + Y_{12}$$

4. Si se invierte en un aumento de disponibilidad del horno si y sólo si se invierte en la amasadora, ¿cómo se formula esta condición?

$$Y_{21} + Y_{22} = Y_{11} + Y_{12}$$

PROBLEMA: MEZCLA DE GASES (GAS MIX)

Se desea hacer una mezcla de tres gases combustibles, G1, G2 y G3, en las condiciones siguientes:

a) El volumen total debe ser de 250000 m^3.
b) El poder calorífico de la mezcla debe estar comprendido entre 2200 y 2600 kcal/m^3.
c) El contenido en azufre no debe rebasar la cantidad de 3 g/m^3.
d) La cantidad del tercer gas no debe exceder del 40 % del volumen conjunto de los otros dos gases.
e) Si la cantidad del primer gas excede del 60 % del total, entonces las cantidades de los otros dos gases han de ser iguales.

Los contenidos de azufre de los tres gases son 7, 0.5 y 2 g/m^3 respectivamente, mientras que sus correspondientes poderes caloríficos ascienden a 1000, 2000 y 6000 kcal/m^3. Los precios de los tres gases son de 1.9, 2.7 y 1.5 €/m^3 respectivamente

Proponer un modelo de programación lineal que permita establecer la mezcla más barata que cumple las especificaciones anteriores.

Resultado del problema: Mezcla de gases (Gas mix)

Índices

i: Índice de gases {G1, G2, G3}

Parámetros

a_i: Contenido de azufre en el gas i [g/m^3]
c_i: Poder calorífico del gas i [kcal/m^3]
p_i: Precio del gas i [€/m^3]
$c_{\min}$: Poder calorífico mínimo [kcal/m^3]
$c_{\max}$: Poder calorífico máximo [kcal/m^3]
$a_{\max}$: Cantidad máxima de azufre [g/m^3]

Variables

X_i: Porcentaje unitario por m^3 del gas i [p.u.]

Función objetivo

Se minimiza el precio de cada m^3 de la mezcla de gas

$$\min \sum_i p_i X_i$$

Restricciones

Restricción lógica de la combinación de los gases por m^3

$$\sum_i X_i = 1$$

Poder calorífico mínimo

$$\sum_i c_i X_i \geq c_{\min}$$

Poder calorífico máximo

$$\sum_i c_i X_i \leq c_{\max}$$

Contenido de azufre máximo

$$\sum_i a_i X_i \leq a_{\max}$$

Relación lógica de que el tercer gas no debe exceder el 40 % del volumen conjunto de los otros dos gases

$$X_{G3} \leq 0.4(X_{G1} + X_{G2})$$

Relación lógica de que si el primer gas excede del 60 % entonces las cantidades de los otros dos gases han de ser iguales

$$X_{G1} \geq 0.6 \Rightarrow X_{G2} = X_{G3}$$

Esta implicación se divide en dos implicaciones

$$X_{G1} \geq 0.6 \Rightarrow \delta = 1 \text{ y } \delta = 1 \Rightarrow X_{G2} = X_{G3}$$

La primera implicación se puede modelar como:

$$X_{G1} \leq 0.599999 + 0.400001\delta$$

La segunda implicación se puede modelar como:

$$X_{G2} - X_{G3} \leq 1 - \delta$$
$$X_{G2} - X_{G3} \geq \delta - 1$$