PROBLEMA 25

Una empresa produce una determinada bebida a partir de dos ingredientes básicos. El proceso de elaboración de la bebida puede llevarse a cabo de dos formas distintas. Para producir un litro de la bebida, de la forma 1 requerirá 1 litro del primer ingrediente y 2 del segundo, mientras que de la forma 2 requerirá 2 litros del primer ingrediente y 1 del segundo. El proveedor habitual le puede suministrar hasta 900 litros de cada ingrediente a un coste de 3 € por litro el primero de ellos y de 5 € por litro el segundo. La empresa plantea el siguiente problema para determinar cómo debe ser su producción de la próxima semana para satisfacer una demanda de 500 litros de la bebida con el menor coste posible:

$$
\begin{aligned}
&\min z = 13x + 11y \\
&x + y \geq 500 \\
&x + 2y \leq 900 \\
&2x + y \leq 900 \\
&x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

siendo su correspondiente tabla óptima

	x	y	$s1$	$s2$	$s3$	
$-z$	0	0	15	2	0	–5700
y	0	1	1	1	0	400
$s3$	0	0	3	1	1	300
x	1	0	–2	–1	0	100

Se pide responder a las siguientes cuestiones, independientemente unas de otras, y razonando y calculando a partir de la tabla óptima:

1. ¿Qué precio mínimo debería pedir para cubrir costes por cada litro más que se le solicite de la bebida? Si la demanda se mantiene pero puede acceder a otro proveedor distinto del habitual aunque más caro para que le suministre los ingredientes, ¿qué precio máximo debería pagar por cada litro de los dos ingredientes?
2. ¿Cuánto podría variar el coste del ingrediente 1 sin que cambie la solución actual?
3. ¿Cuál sería la solución si la demanda fuera de 400 litros?

RESULTADO DEL PROBLEMA 25

1. Está preguntando las variables duales de las restricciones. La variable dual de la primera restricción es 15 €/l, las de la segunda y tercera son –2 y 0 €/l respectivamente.
2. El cambio en el coste de una variable básica de la solución final supone un cambio en el coste reducido de las variables no básicas cuyo coste reducido debe seguir siendo no negativo $\hat{c}_N^T = \overline{c}_N'^T - c_B^T B^{-1}\overline{N}' \geq 0$. En este caso particular sólo $s1$ y $s2$ tienen un coste estrictamente positivo que puede disminuir.

$$\hat{c}_{s1}^T = 0 - \begin{pmatrix} 11 & \cdot & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdot \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = -11 + 2c_x \geq 0\,,\ c_x \geq 11/2$$

$$\hat{c}_{s2}^T = 0 - \begin{pmatrix} 11 & \cdot & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdot \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{pmatrix} = -11 + c_x \geq 0\,,\ c_x \geq 11$$

Luego el coste del primer ingrediente debe ser superior a 11.
3. El nuevo valor de las variables básicas es

$$\overline{x}_B = B^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdot \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 900 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \\ -100 \end{pmatrix}$$

Como sale negativa hay que aplicar el simplex dual. El nuevo valor de la función objetivo es $\hat{z} = c_B^T B^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} 11 & \cdot & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 & 600 & -100 \end{pmatrix}^T = 4200$

	x	y	$s1$	$s2$	$s3$	
$-z$	0	0	15	2	0	–4200
y	0	1	1	1	0	500
$s3$	0	0	3	1	1	600
x	1	0	–2	–1	0	–100

Elijo x como variable básica saliente. Divido la fila de la f.o. entre los elementos estrictamente negativos de la fila pivote y elijo el de menor valor absoluto, que me define la variable básica entrante $s2$. Pivoto y obtengo la siguiente tabla.

	x	y	$s1$	$s2$	$s3$	
$-z$	2	0	11	0	0	–4400
y	1	1	–1	1	0	400
$s3$	1	0	1	0	1	500
$s2$	–1	0	2	1	0	100

Que es ya la solución óptima.

PROBLEMA 28

La fabricación de tres artículos, x, y y z, requiere dos materias primas, m_1 y m_2, de las que hay 4800 y 5400 unidades respectivamente en existencias. Los beneficios unitarios de esos artículos ascienden a 2, 5 y 4 € respectivamente y los requerimientos de materias primas de cada unidad de los productos vienen dados en la tabla siguiente:

	x	y	z
m_1	1	4	3
m_2	2	3	5

El siguiente modelo de programación lineal proporciona la gama de artículos para los que el beneficio total es máximo.

$$\max w = 2x + 5y + 4z$$
$$x + 4y + 3z \leq 4800$$
$$2x + 3y + 5z \leq 5400$$
$$x, y, z \geq 0$$

La tabla final del método simplex de este modelo es:

	w	x	y	z	h_1	h_2	Cotas
$-w$	–1	0	0	–1.4	–0.8	–0.6	–7080
x	0	1	0	2.2	–0.6	0.8	1440
y	0	0	1	0.2	0.4	–0.2	840

1. Se consiguen 100 unidades más de m_1 y 200 de m_2, ¿seguirá estando la gama óptima de producción constituida por artículos de los tipos x e y?, ¿por qué? En cualquier caso, ¿cuántos artículos de los tipos x e y se producirían?

2. ¿Cuál debería ser el beneficio mínimo proporcionado por una unidad de z para que fuera económicamente interesante su producción? ¿Cuál sería en ese caso la gama de producción?
3. Cabe la posibilidad de fabricar unidades de un cuarto artículo v. Una unidad de v requiere 6 unidades de m_1 y 4 de m_2. ¿Cuál es el beneficio mínimo que debería proporcionar para que económicamente fuera interesante su producción?
4. ¿Cuál sería la solución óptima si hubiera que satisfacer una demanda global de 2500 unidades?

RESULTADO DEL PROBLEMA 28

1. El nuevo valor de las variables básicas es

$$\overline{x}_B = B^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.4 & -0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4900 \\ 5600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1540 \\ 840 \end{pmatrix}$$

   El nuevo valor de la función objetivo es $\hat{z} = c_B^T B^{-1}\overline{b} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1540 & 840 \end{pmatrix}^T = 7280$.

2. El beneficio de z se debería incrementar en el valor de su coste reducido 1.4 para que pudiera pasar a ser básica (mayor que 0). Para $c_z = 5.4$ los nuevos costes reducidos son

$$\hat{c}_N^T = \overline{c}_N^T - c_B^T B^{-1}\overline{N} = \begin{pmatrix} 5.4 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.4 & -0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \cdot \\ 5 & \cdot & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & -0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$$

	w	x	y	z	h_1	h_2	Cotas
$-w$	–1	0	0	0	–0.8	–0.6	–7080
x	0	1	0	2.2	–0.6	0.8	1440
y	0	0	1	0.2	0.4	–0.2	840

Si elijo z como variable básica entrante la variable básica saliente será x y la nueva tabla óptima será

	w	x	y	z	h_1	h_2	Cotas
$-w$	–1	0	0	0	–0.8	–0.6	–7080
z	0	5/11	0	1	–3/11	4/11	7200/11
y	0	–1/11	1	0	5/11	–3/11	7800/11

3. El nuevo problema de optimización es

$$\max w = 2x + 5y + 4z + c_v v$$
$$x + 4y + 3z + 6v \le 4800$$
$$2x + 3y + 5z + 4v \le 5400$$
$$x, y, z, v \ge 0$$

Nos piden determinar c_v para que v empiece a tomar un valor estrictamente positivo, es decir, para que su coste reducido sea estrictamente positivo.

$$B^{-1}a_v = \begin{pmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.4 & -0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_v = \overline{c}_v - c_B^T B^{-1}\overline{N} = c_v - \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.6 \end{pmatrix} = c_v - 7.2$$

Cuado $c_v = 7.2$ el coste reducido de v es 0, $\hat{c}_v = 0$. Cuando sea estrictamente mayor, v tomará un valor estrictamente positivo.

4. Se añade una nueva restricción

$$\max w = 2x + 5y + 4z$$
$$x + 4y + 3z \le 4800$$
$$2x + 3y + 5z \le 5400$$
$$x + y + z \ge 2500$$
$$x, y, z \ge 0$$

Esta restricción no se satisface en la solución óptima luego hay que aplicar simplex dual.

	w	x	y	z	h_1	h_2	h_3	Cotas
$-w$	–1	0	0	–1.4	–0.8	–0.6	0	–7080
x	0	1	0	2.2	–0.6	0.8	0	1440
y	0	0	1	0.2	0.4	–0.2	0	840
h_3	0	1	1	1	0	0	–1	2500

Hay que poner la tabla en forma de elimación gaussiana, columna de la matriz identidad en las variables básicas, x, y y h_3.

	w	x	y	z	h_1	h_2	h_3	Cotas
$-w$	–1	0	0	–1.4	–0.8	–0.6	0	–7080
x	0	1	0	2.2	–0.6	0.8	0	1440

y	0	0	1	0.2	0.4	–0.2	0	840
h_3	0	0	0	1.4	–0.2	0.6	1	–220

La variable básica saliente es h_3 y la entrante es h_1.

	w	x	y	z	h_1	h_2	h_3	Cotas
$-w$	–1	0	0	–7	0	–3	–4	–6200
x	0	1	0	1	0	–1	–3	2100
y	0	0	1	1	0	1	2	400
h_1	0	0	0	2	1	–3	–5	1100