Problema: Televisión digital

Una empresa de fabricación de aparatos electrónicos está viendo la posibilidad de lanzar al mercado decodificacodres que permitan a los televisores analógicos visualizar la señal de la televisión digial. Se está considerando la fabricación de tres tipos de decodificadores: básico, transmisor y wifi. Se dispone de 10 empleados que trabajan 160 horas al mes.

Según la eficiencia del empleado éste se ha agrupado junto con otros empleados en uno de los cuatro grupos, A, B, C y D, que se indican en la tabla siguiente. En dicha tabla se indica el número de empleados que pertenecen al grupo y el tiempo de ensamblaje en minutos de cada tipo de decodificador. Así mismo se indica el margen (beneficio) de cada tipo de decodificador.

	A	B	C	D	Margen
Básico	35	30	40	45	15
Transmisor	45	40	50	70	25
Wifi	60	55	70	75	40
Número de empleados	3	2	2	3	

Se puede subcontratar más personal pero ello implicaría un coste por persona subcontratada de 1500 € al mes. La eficiencia de estas personas se asimila a las personas del grupo D. Los compromisos adquiridos por la empresa obligan a suministrar 400 decodificadores básicos, 200 transmisores y 150 wifi. En caso de que no se puedan satisfacer cualquiera de estas cantidades existe una penalización de 50 € por decodificador no suministrado.

Para determinar la producción mensual de decodificadores se requiere elaborar un modelo de programación matemática para lo cual se pide:

1. Establecer la nomenclatura de índices, parámetros y variables
2. Establecer la función objetivo de forma genérica y numéricamente
3. Establecer las restricciones del modelo de forma genérica
4. Modificar el modelo para que los decodificadores fabricados de cada tipo no supere el 50 % de la producción global
5. Modificar el modelo para que sólo se permita fabricar dos de los tres tipos de decodificadores
6. Modificar el modelo para que los empleados del grupo A no ensamblen el mismo tipo de codificadores que el grupo C

Resultado del problema: Televisión digital

Establecer nomenclatura de índices, parámetros y variables.

Índices

i: Índice de decodificadores {Básico, Trasmisor, Wifi}

j: Índice de grupo de empleados {A, B, C, D}

Parámetros

m_i: Margen de beneficio del decodificador i [€/unidad]

t_{ij}: Tiempo de ensamblaje del decodificador i por un empleado del grupo j [min]

n_j: Número de empleados en el grupo j [empleado]

d: Tiempo disponible mensualmente por cada operario [min]

s: Coste de subcontratación de personal por un mes [€/empleado]

q_i: Número de decodificadores i comprometidos [unidades]

p: Penalización por falta de suministro de un decodificador [€]

Variables

X_{ij}: Cantidad de decodificadores de tipo i fabricados por el grupo j [unidades]

Y_i: Cantidad de decodificadores de tipo i sin suministrar [unidades]

Z: Personal subcontratado en el mes [empleado]

Establecer la función objetivo de forma genérica y numéricamente

En la función objetivo se maximiza el beneficio de la fabricación de decodificadores por los distintos grupos de trabajo, restando el coste salarial de los empleados subcontratados ese mes y la penalización por la falta de suministro de decodificadores con respecto a los compromisos del mes. Genéricamente la función objetivo se expresa de la siguiente forma:

$$\max \sum_{ij} m_i X_{ij} - sZ - p\sum_i Y_i$$

Numéricamente la función objetivo tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
&\max 15\left(X_{Básico,A} + X_{Básico,B} + X_{Básico,C} + X_{Básico,D}\right) + \\
&+25\left(X_{Trasmisor,A} + X_{Trasmisor,B} + X_{Trasmisor,C} + X_{Trasmisor,D}\right) + \\
&+40\left(X_{Wifi,A} + X_{Wifi,B} + X_{Wifi,C} + X_{Wifi,D}\right) \\
&-1500Z - 50\left(Y_{Básico} + Y_{Transmisor} + Y_{Wifi}\right)
\end{aligned}$$

Establecer las restricciones del modelo de forma genérica

Limitación de horas hombre disponibles por grupo j

$$\sum_i t_{ij} X_{ij} \le d n_j \qquad \forall j \ne D$$

$$t_{iD} X_{iD} \le d\left(n_D + Z\right)$$

Compromiso en el suministro de decodificadores i

$$\sum_j X_{ij} = q_i - Y_i \quad \forall i$$

Modificar el modelo para que los codificadores fabricados de cada tipo no supere el 50 % de la producción global

Se añade una restricción por cada tipo de decodificador i

$$\sum_j X_{ij} \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{ij} X_{ij}\right) \quad \forall i$$

Modificar el modelo para que sólo se permita fabricar dos de los tres tipos de decodificadores

Se añade la variable binaria W_i que indica si se fabrica el decodificador i. Se limita superiormente la cantidad de decodificadores fabricados en cada tipo i por el valor del compromiso, q_i.

$$\sum_j X_{ij} \leq q_i W_i \quad \forall i$$

$$\sum_i W_i \leq 2$$

Modificar el modelo para que los empleados del grupo A no ensamblen el mismo tipo de codificadores que el grupo C.

Se añaden variables binarias R_{ij} que indica si el decodificador i es fabricado por el grupo de empleados j. Se aplican estas variables a los grupos de empleados A y C estableciéndose una restricción lógica entre ambos grupos para todos los tipos de decodificadores.

$$X_{iA} \leq q_i R_{iA} \quad \forall i$$
$$X_{iC} \leq q_i R_{iC} \quad \forall i$$
$$R_{iA} + R_{iC} \leq 1 \quad \forall i$$

Problema: Botellas de agua

En Ávila, la empresa MANAGUA, embotelladora de agua de la Sierra de Gredos, quiere establecer el plan de producción de botellas para los meses de mayor demanda del año. Las botellas disponen de tres formatos: 33 cl, 1 l y 1.5 l. El primero tiene un tapón distinto al de los otros dos formatos.

La demanda prevista para esta temporada se indica en la tabla siguiente expresada en miles de botellas. En la última columna se indican las existencias iniciales a principios de junio. En la última fila se indica los miles de metros cúbicos que el manantial de agua, que embotella la empresa, surte al mes.

Miles	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Existencias iniciales
33 cl [botellas]	500	750	1000	500	250
1 l [botellas]	300	1000	1500	300	100
1.5 l [botellas]	200	500	1000	200	100
Manantial [m^3]	3	2	1	2	

En la empresa existe un almacén que puede gestionar botellas con un volumen total embotellado de 1000 m^3. El coste de almacenamiento por m^3 y por mes es de 5 €.

El proceso de fabricación de botellas requiere la utilización de tres máquinas: taponera, botellera y etiquetadora que pueden funcionar de forma independiente. Actualmente la empresa sólo dispone de una máquina de cada tipo. El tiempo de procesamiento en cada tipo de máquina y por tipo de botella se indica en la tabla siguiente expresado en segundos por unidad:

Máquina	33 cl	1 l	1.5 l
Taponera	0.25	0.2	0.2
Botellera	0.5	0.75	0.75
Etiquetadora	0.3	0.3	0.3

Cada máquina está manejada por un operario cuyo turno de trabajo efectivo es de 8 horas diarias. El mes laboral se considera de 160 horas por operario. Se puede ampliar la jornada diaria con horas extra cuyo coste es de 20 €/hora hasta un máximo de 2 horas extra por día. Los tres operarios pueden trabajar indistintamente en cualquier máquina y por lo tanto pueden hacer horas extra en una máquina distinta de en la que habitualmente realizan su jornada.

La falta de suministro de botellas en estos meses de verano supone una pérdida diferente dependiendo del formato de la botella: 0.10 € para la botella de 33 cl, 0.20 € para la botella de 1 l y 0.25 € para la botella de 1.5 l.

Se pide establecer un modelo de programación lineal que determine el plan de producción, almacenamiento y gestión de recursos humanos para MANAGUA durante los meses de verano.

1. Definir índices, parámetros y variables necesarias para el modelo
2. Definir genéricamente y numéricamente la función objetivo
3. Definir genéricamente las restricciones del modelo.

4. Se puede subcontratar externamente el funcionamiento de una máquina botellera adicional por un importe de 3000 € al mes. Incluir esta decisión dentro del modelo.

RESULTADO DEL PROBLEMA: BOTELLAS DE AGUA

Definir índices, parámetros y variables necesarias para el modelo

Índices

i: Índice de tipo de botella {33 cl, 1 l, 1.5 l}

j: Índice de meses del horizonte {junio, julio, agosto, septiembre}

k , kk: Índices de operario (uno de ellos es auxiliar) {taponero, botellero, etiquetador}

Parámetros

d_{ij}: Demanda de botellas de tipo i durante el mes j [botellas]

m_j: Cantidad de agua surtida por el manantial durante el mes j [m^3]

v_i: Volumen de agua contenido en una botella de tipo i [m^3]

a: Volumen máximo del almacén [m^3]

q: Horas mensuales trabajadas por un operario [h]

te: Horas extra máximas por mes para un operario [h]

c: Coste de almacenamiento [€/m^3/mes]

f_i: Coste de falta de suministro de botellas de tipo i [€/botella]

ce: Coste de horas extra [€/h]

t_{ik}: Tiempo requerido por el operario k para una botella de tipo i [s/botella]

g_i: Existencias iniciales de botellas de tipo i [botellas]

h_i: Existencias finales de botellas de tipo i [botellas]

Variables

$X_{i,j}$: Botellas de tipo i embotelladas durante el mes j [botellas]

$Y_{i,j}$: Botellas de tipo i no suministradas durante el mes j [botellas]

$S_{i,j}$: Botellas de tipo i almacenadas al final del mes j [botellas]

$E_{j,k,kk}$: Horas extra realizadas durante el mes j en la máquina del operario k por el operario de la máquina kk

Definir genéricamente y numéricamente la función objetivo

$$\min \sum_{ij} f_i Y_{ij} + \sum_{ij} c_i \frac{S_{ij\text{-}1} + S_{ij}}{2} + \sum_{jk} ce E_{jk}$$

$$\min 0.1Y_{33cl,junio} + 0.1Y_{33cl,julio} + 0.1Y_{33cl,agosto} + 0.1Y_{33cl,septiembre}$$
$$+0.2Y_{1l,junio} + 0.2Y_{1l,julio} + 0.2Y_{1l,agosto} + 0.2Y_{1l,septiembre} + 0.25Y_{1.5l,junio} + 0.25Y_{1.5l,julio}$$
$$+0.25Y_{1.5l,agosto} + 0.25Y_{1.5l,septiembre}$$
$$+5\frac{0.33}{1000}\frac{250+S_{33cl,junio}}{2} + 5\frac{0.33}{1000}\frac{S_{33cl,junio}+S_{33cl,julio}}{2} + 5\frac{0.33}{1000}\frac{S_{33cl,julio}+S_{33cl,agosto}}{2}$$
$$+5\frac{0.33}{1000}\frac{S_{33cl,agosto}+S_{33cl,septiembre}}{2} + 5\frac{0.33}{1000}\frac{S_{33cl,septiembre}+100}{2}$$
$$+5\frac{1}{1000}\frac{100+S_{1l,junio}}{2} + 5\frac{1}{1000}\frac{S_{1l,junio}+S_{1l,julio}}{2} + 5\frac{1}{1000}\frac{S_{1l,julio}+S_{1l,agosto}}{2}$$
$$+5\frac{1}{1000}\frac{S_{1l,agosto}+S_{1l,septiembre}}{2} + 5\frac{1}{1000}\frac{S_{1l,septiembre}+50}{2}$$
$$+5\frac{1}{1000}\frac{100+S_{1.5l,junio}}{2} + 5\frac{1}{1000}\frac{S_{1.5l,junio}+S_{1.5l,julio}}{2} + 5\frac{1}{1000}\frac{S_{1.5l,julio}+S_{1.5l,agosto}}{2}$$
$$+5\frac{1}{1000}\frac{S_{1.5l,agosto}+S_{1.5l,septiembre}}{2} + 5\frac{1}{1000}\frac{S_{1.5l,septiembre}+50}{2} +$$
$$+20E_{junio,taponero} + 20E_{julio,taponero} + 20E_{agosto,taponero} + 20E_{septiembre,taponero}$$
$$+20E_{junio,botellero} + 20E_{julio,botellero} + 20E_{agosto,botellero} + 20E_{septiembre,botellero}$$
$$+20E_{junio,etiquetador} + 20E_{julio,etiquetador} + 20E_{agosto,etiquetador} + 20E_{septiembre,etiquetador}$$

Definir genéricamente las restricciones del modelo

Horas máquina k mes j:

$$\sum_i t_{ik} X_{ij} \le q + \sum_{kk} E_{j,k,kk} \quad \forall jk$$

Limitación de horas extra del operario kk en el mes j:

$$\sum_k E_{j,k,kk} \le te \quad \forall jkk$$

Balance de consumo de botella de tipo i en el mes j:

$$S_{ij\text{-}1} + X_{ij} = d_{ij} + S_{ij} - Y_{ij} \quad \forall ij$$

Balance de consumo de botella de tipo i en el mes de *junio*:

$$g_i + X_{i,junio} = d_{i,junio} + S_{i,junio} - Y_{i,junio} \quad \forall i$$

Balance de consumo de botella de tipo i en el mes de *septiembre*:

$$S_{i,agosto} + X_{i,septiembre} = d_{i,septiembre} + h_i - Y_{i,septiembre} \quad \forall i$$

Limitación de capacidad del almacén

$$\sum_i v_i S_{i,j} \le a \quad \forall j$$

Limitación mensual del manantial de agua

$$\sum_i v_i X_{ij} \leq m_j \qquad \forall j$$

PROBLEMA: PRODUCCIÓN

Una empresa produce 3 artículos utilizando 4 tipos de recursos (máquinas). Los beneficios unitarios de cada uno de los artículos son, respectivamente, 3, 5 y 7 €. Para la producción de cada artículo tiene dos alternativas posibles (no excluyentes), de modo que cada una de ellas consume diferente capacidad de los recursos disponibles. Las alternativas de producción y la capacidad (en tanto por ciento) consumida de cada recurso por cada unidad de artículo producido según la alternativa correspondiente se recogen en la siguiente tabla.

Las últimas dos filas representan la producción mínima y máxima de cada artículo cuando se produce según esa alternativa, de modo que si se produce alguna cantidad con esa alternativa de producción, ésta ha de ser mayor o igual que el mínimo y no superar ese máximo.

Plantear el problema de cómo maximizar los beneficios de la empresa (mediante programación lineal entera).

Alternativas	Artículo 1 Altern. 1	Artículo 1 Altern. 2	Artículo 2 Altern. 1	Artículo 2 Altern. 2	Artículo 3 Altern. 1	Artículo 3 Altern. 2
Recurso 1	1	2	3	2	5	8
Recurso 2	3	1	3	3	4	1
Recurso 3	1	2	2	2	1	3
Recurso 4	2	2	2	3	6	4
Límite inferior	5	4	7	8	4	3
Límite superior	20	20	15	12	8	10

RESULTADO DEL PROBLEMA: PRODUCCIÓN

Las variables de decisión N_{ik} del problema se definen como el número de unidades del artículo i que se producen si se utiliza la alternativa k. Las variables binarias X_{ik} toman el valor 1 si se emplea la alternativa k para producir unidades del artículo i. Designamos por b_i el beneficio unitario del artículo i y por L_{ik} y U_{ik} a las cantidades mínima y máxima de unidades a producir del artículo i cuando se utiliza la alternativa k. La cantidad que una unidad del artículo i consume del recurso j cuando se utiliza la alternativa k la representaremos por $R_{i,j,k}$.

Tenemos así el siguiente modelo matemático:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{3} b_i \left(\sum_{k=1}^{2} N_{ik} \right) \\
&L_{ik} X_{ik} \le N_{ik} \le U_{ik} X_{ik} \\
&\sum_{ik} R_{ijk} N_{ik} \le 100 \qquad j = 1,2,3,4 \\
&X_{ik} \in \{0,1\}; N_{ik} \in \mathbb{Z}; N_{ik} \ge 0
\end{aligned}
$$