Problema: El bodeguero

Un bodeguero ha tenido una buena cosecha que estima sea de 10000 litros. El bodeguero ha de decidir qué cantidad de la cosecha dedicarla a hacer "mosto", qué cantidad conservarla un año en barrica y venderla embotellada como "vino joven", qué cantidad conservarla dos años en barrica y venderla embotellada como "vino crianza", qué cantidad conservarla tres años en barrica y venderla embotellada como "vino reserva" y qué cantidad conservarla cuatro años en barrica y venderla embotellada como "gran reserva".

El porcentaje anual de evaporación y deterioro en las barricas de las cantidades resultantes cada año, así como el precio de venta y coste de los vinos hasta embotellarlos se indica en la tabla siguiente. Así por ejemplo el vino crianza resultante de la cantidad inicial dedicada a este vino es del 79.9 % $(0.85 \cdot 0.94)$. Cada año que cualquier botella permanece sin venderse en los almacenes da lugar a un coste adicional de almacenamiento por botella del 20 % del coste hasta su embotellado.

	Mosto	Vino joven	Vino crianza	Vino reserva	Gran reserva
Precio [€/l]	0.4	1.5	2.8	3.8	5.5
Coste [€/l]	0.2	0.6	1.5	2.2	2.9
Evap [%]	0	15	6	4	2

La demanda de vino para los próximos seis años que el bodeguero preve viene dada en la tabla siguiente. Estas demandas no han de ser satisfechas en su totalidad y explícitamente no se penaliza la falta de abastecimiento de las mismas.

	1	2	3	4	5	6
Mosto	1000	200				
Vino joven		2000	1000			
Vino crianza			3000	2000	1000	
Vino reserva				2500	500	
Gran reserva					1000	250

Establecer un modelo de programación lineal que permita al gerente tomar la mejor decisión sobre las cantidades de la cosecha actual destinadas a cada tipo de producto.

Resultado del problema: El bodeguero

El objetivo del bodeguero es hacer máximo el beneficio obtenido de la gama de vinos a elaborar. Para ello tiene que decidir no sólo qué cantidad de la cosecha de 10000 litros obtenida dedica a los diversos vinos sino también si le interesa cubrir la demanda de cada vino en los diferentes años. Así, por ejemplo, si consideramos el mosto, tendrá dos variables de decisión, $M1$ y $M2$, para vender durante los años 1 y 2 respectivamente. Como en este modelo el ingreso por cualquier tipo de vino permanece constante durante todo el horizonte de planificación, en tanto que guardar vino de un año para otro incurre en costes de almacenamiento que disminuyen el beneficio, es claro que plantearse la posibilidad de elaborar mosto para el segundo año sólo tiene sentido si la demanda de mosto para el primer año queda completamente cubierta. Esto supone la inclusión de una variable binaria, BM, tal que

$$BM = \begin{cases} 1 & \text{si } M1 = 1000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lo mismo ocurrirá con los otros tipos de vinos, siendo necesarias dos variables binarias para modelar la elaboración de vino de crianza ya que este vino puede venderse durante tres años.

Las variables de decisión del modelo son:

$M1$: Cantidad de litros para producir mosto para el año 1.

$M2$: Ídem para el año 2.

$$BM = \begin{cases} 1 & \text{si } M1 = 1000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$VJ2$: Cantidad de litros para producir vino joven para el año 2

$VJ3$: Ídem para el año 3

$$BJ = \begin{cases} 1 & \text{si } VJ2 = 2000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$VC3$: Cantidad de litros para producir crianza para el año 3

$VC4$: Ídem para el año 4

$VC5$: Ídem para el año 5

$$BC1 = \begin{cases} 1 & \text{si } VC3 = 3000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$BC2 = \begin{cases} 1 & \text{si } VC4 = 2000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$VR4$: Cantidad de litros para producir reserva para el año 4

$VR5$: Ídem para el año 5

$$BR = \begin{cases} 1 & \text{si } VR4 = 2500 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$GR5$: Cantidad de litros para producir gran reserva para el año 5
$GR6$: Ídem para el año 6

$$BGR = \begin{cases} 1 & \text{si } GR5 = 1000 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con estas variables de decisión y las auxiliares binarias el modelo de programación lineal que optimiza el beneficio es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\max Beneficio = Ingresos - Costes \\
&= (0.4 - 0.2)\,M1 + (0.4 - 0.2 \cdot 1.2)\,M2 + \\
&0.85\left\{(1.5 - 0.6)VJ2 + (1.5 - 0.6 \cdot 1.2)VJ3\right\} + \\
&0.85 \cdot 0.94\left\{(2.8 - 1.5)VC3 + (2.8 - 1.5 \cdot 1.2)VC4 + \left(2.8 - 1.5 \cdot 1.2^2\right)VC5\right\} + \\
&0.85 \cdot 0.94 \cdot 0.96\left\{(3.8 - 2.2)VR4 + (3.8 - 2.2 \cdot 1.2)VR5\right\} + \\
&0.85 \cdot 0.94 \cdot 0.96 \cdot 0.98\left\{(5.5 - 2.9)GR5 + (5.5 - 2.9 \cdot 1.2)GR6\right\}
\end{aligned}$$

sujeto a las restricciones

1. Restricción de cantidad de litros cosechada

$$\begin{aligned}
&M1 + M2 + VJ2 + VJ3 + VC3 + VC4 + VC5 + \\
&+VR4 + VR5 + GR5 + GR6 \leq 10000
\end{aligned}$$

2. Limitaciones impuestas por la demanda, por las condiciones técnicas de evaporación y por el comentario inicial

$$
\begin{aligned}
&1000BM \le M1 \le 1000 \\
&M2 \le 200BM \\
&2000BJ \le 0.85VJ2 \le 2000 \\
&0.85VJ3 \le 1000BJ \\
&3000BC1 \le 0.85 \cdot 0.94VC3 \le 3000 \\
&2000BC2 \le 0.85 \cdot 0.94VC4 \le 2000BC1 \\
&BC2 \le BC1 \\
&0.85 \cdot 0.94VC5 \le 1000BC2 \\
&2500BR \le 0.85 \cdot 0.94 \cdot 0.96VR4 \le 2500 \\
&0.85 \cdot 0.94 \cdot 0.96VR5 \le 500BR \\
&1000BGR \le 0.85 \cdot 0.94 \cdot 0.96 \cdot 0.98GR5 \le 1000 \\
&0.85 \cdot 0.94 \cdot 0.96 \cdot 0.98GR6 \le 250BGR
\end{aligned}
$$

$$M1, M2, VJ2, VJ3, VC3, VC4, VC5, VR4, VR5, GR5, GR6 \ge 0$$

$$BM, BJ, BC1, BC2, BR, BGR \in \{0,1\}$$

Problema: Turista

Un turista aventurero desea hacer un viaje por Europa, visitando España, Francia, Alemania, Austria, Suiza e Italia, por este orden, para regresar a España por avión. Puede, en cada uno de los seis países, alquilar uno de tres tipos de turismos que, de acuerdo con sus características, precios de los combustibles y recorridos a realizar en cada país, gastarán en combustible los euros indicados en la tabla.

El turista es libre, al llegar a un nuevo país, de cambiar o no de vehículo, pero cada vez que cambia de vehículo tiene que pagar 25 € por gastos de documentación en el alquiler del nuevo vehículo.

	España	Francia	Alemania	Austria	Suiza	Italia
A	160	210	180	110	85	170
B	120	240	165	135	100	160
C	150	200	175	140	115	135

Diseñar un modelo de programación lineal que permita determinar qué vehículo debe ser utilizado en cada país con el fin de minimizar el coste del transporte.

Resultado del problema: Turista

Designemos por X_{ij}, $i = A,B,C$, $j = E,F,Al,Au,S,I$ las variables de decisión. Son variables binarias tales que

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si el turismo de tipo } i \text{ va a ser utilizado en el país } j \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Necesitamos también otras variables binarias Z_k $k = F,Al,Au,S,I$ para controlar el posible cambio de turismo al pasar de un país a otro; es decir

$$Z_k = \begin{cases} 1 \text{ si ha habido cambio de turismo en el país visitado en el lugar } k \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

La formulación matemática es

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} c_{ij} X_{ij} + 25 \sum_{k=2}^{6} Z_k$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = 1 \quad \forall j \quad \text{En cada país hay que usar un vehículo y sólo uno}$$

$$X_{ik} - X_{ik-1} \leq Z_k \quad \forall i,k$$

Problema: Mezcla de gases

Se desea hacer una mezcla de tres gases combustibles, G1, G2 y G3, en las condiciones siguientes:

1. El volumen total debe ser de 250000 m^3.
2. La potencia calorífica de la mezcla debe estar comprendida entre 2200 y 2600 mte/m^3.
3. El contenido en azufre no debe rebasar la cantidad de 3 g/m^3.
4. La cantidad del tercer gas no debe exceder del 40 % del volumen conjunto de los otros dos gases.
5. Si la cantidad del primer gas excede del 60 % del total, entonces las cantidades de los otros dos gases han de ser iguales.

Los contenidos de azufre de los tres gases son 7, 0.5 y 2 g/m^3 respectivamente, mientras que sus correspondientes potencias caloríficas ascienden a 1000, 2000 y 6000 mte/m^3. Los precios de los tres gases son de 1.9, 2.7 y 1.5 €/m^3 respectivamente.

Proponer un modelo de programación lineal que permita establecer la mezcla más barata que cumple las especificaciones anteriores.

RESULTADO DEL PROBLEMA: MEZCLA DE GASES

Índice

i: Índice de gases {G1, G2, G3}

Parámetros

a_i: Contenido de azufre en el gas i [gr/m^3]

c_i: Potencia calorífica del gas i [mte/m^3]

p_i: Precio del gas i [€/m^3]

$c_{\min}$: Potencia calorífica mínima [mte/m^3]

$c_{\max}$: Potencia calorífica máxima [mte/m^3]

$a_{\max}$: Cantidad máxima de azufre [g/m^3]

Variables

X_i: Porcentaje unitario por m^3 del gas i [p.u.]

Función objetivo

Se minimiza el precio de cada m^3 de la mezcla de gas

$$\min \sum_i p_i X_i$$

Restricciones

Restricción lógica de la combinación de los gases por m^3

$$\sum_i X_i = 1$$

Potencia calorífica mínima

$$\sum_i c_i X_i \geq c_{\min}$$

Potencia calorífica máxima

$$\sum_i c_i X_i \leq c_{\max}$$

Contenido de azufre máximo

$$\sum_i a_i X_i \leq a_{\max}$$

Relación lógica de que el tercer gas no debe exceder el 40% del volumen conjunto de los otros dos gases

$$X_{G3} \leq 0.4\left(X_{G1} + X_{G2}\right)$$

Relación lógica de que si el primer gas excede del 60% entonces las cantidades de los otros dos gases han de ser iguales

$$X_{G1} \geq 0.6 \Rightarrow X_{G2} = X_{G3}$$

Esta implicación se divide en dos implicaciones

$$X_{G1} \geq 0.6 \Rightarrow \delta = 1 \text{ y } \delta = 1 \Rightarrow X_{G2} = X_{G3}$$

La primera implicación se puede modelar como:

$$X_{G1} \leq 0.599999 + 0.400001\delta$$

La segunda implicación se puede modelar como:

$$X_{G2} - X_{G3} \leq 1 - \delta$$
$$X_{G2} - X_{G3} \geq \delta - 1$$