

RELACIÓN DE PROBLEMAS DE CLASE DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

PROBLEMA 2 APARTADO 1

Resolver el siguiente problema mediante el método de ramificación y acotamiento:

$$\max 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

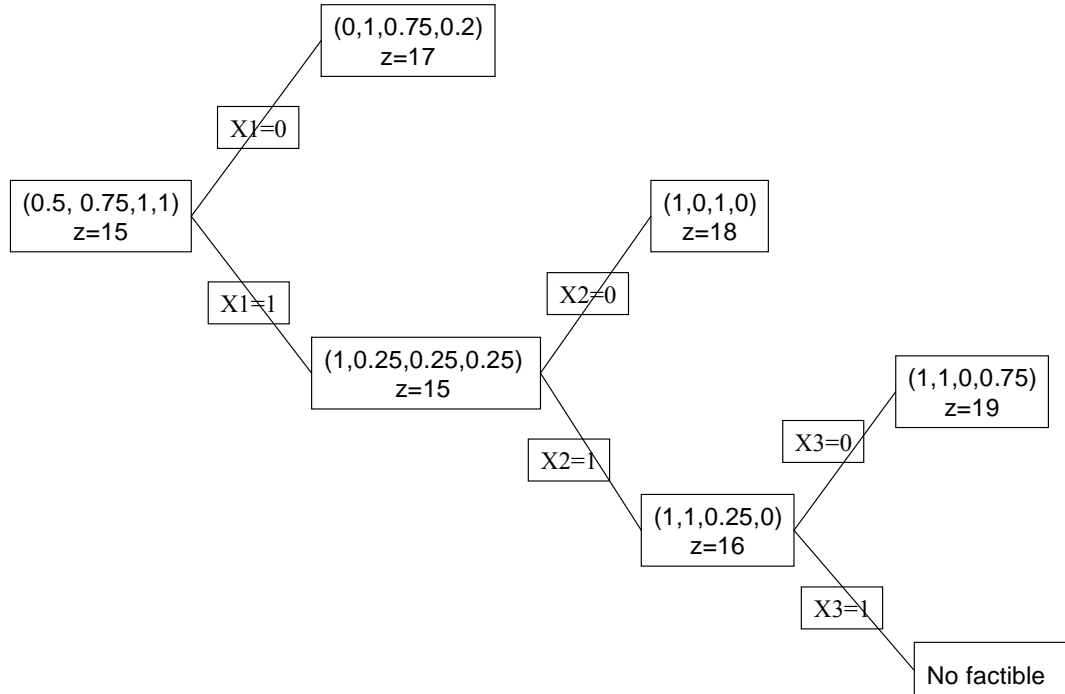
sujeito a :

$$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, 5$$

PROBLEMA 4

Dado el siguiente árbol incompleto de soluciones obtenido en un paso intermedio al resolver, mediante ramificación y acotamiento, un problema de programación lineal entera de minimización en que todas las variables son binarias, decir qué ramas se descartan seguir explorando y por qué, además de decir cuál es el mínimo valor que se puede obtener en el problema llegados a este punto y por qué.



RELACIÓN DE PROBLEMAS ADICIONALES DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

PROBLEMA 1 APARTADO 3

Resolver gráficamente aplicando el método de ramificación y corte el siguiente problema:

$$\max x_1 + x_2$$

sujeto a :

$$2x_1 + 5x_2 \leq 16$$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 27$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$$

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CLASE DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

SOLUCIÓN. PROBLEMA 2 APARTADO 1

Se resuelve el problema relajado considerando que las variables binarias son positivas y tienen asociada una restricción de menor o igual a la unidad. La tabla inicial simplex corresponde al siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max & 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4 \\ \text{suje}to & a : \\ & 15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 + h_1 = 37 \\ & x_1 + h_2 = 1 \\ & x_2 + h_3 = 1 \\ & x_3 + h_4 = 1 \\ & x_4 + h_5 = 1 \\ & x_5 + h_6 = 1 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	Cotas	Relación
-Z	18	14	8	4	0	0	0	0	0	0	0	0	
h_1	15	12	7	4	1	1	0	0	0	0	0	37	37/15
h_2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1/1
h_3	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-
h_4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-
h_5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	-
h_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	-

Esta tabla está en formato estándar y por lo tanto se escoge como variable entrante en la base la variable x_1 debido a que su coste reducido es el mayor de todos. La variable que sale es h_2 . A continuación se muestra la tabla con la base actualizada.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	Cotas	Relación
-Z	0	14	8	4	0	0	-18	0	0	0	0	-18	
h_1	0	12	7	4	1	1	-15	0	0	0	0	22	22/12
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-
h_3	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1/1
h_4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-
h_5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	-
h_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	-

Entra la variable x_2 y sale h_3 resultando la siguiente tabla con la base actualizada.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	Cotas	Relación
-Z	0	0	8	4	0	0	-18	-14	0	0	0	-32	
h_1	0	0	7	4	1	1	-15	-12	0	0	0	10	10/7
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-
h_4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1/1
h_5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	-
h_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	-

Entra la variable x_3 y sale h_4 resultando la siguiente tabla con la base actualizada.

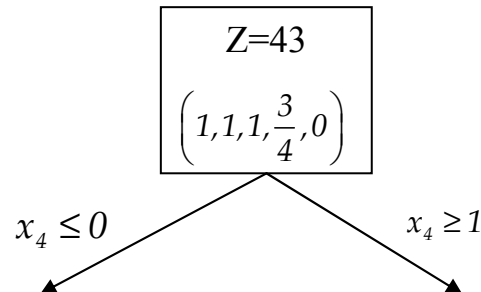
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	Cotas	Relación
-Z	0	0	0	4	0	0	-18	-14	-8	0	0	-40	
h_1	0	0	0	4	1	1	-15	-12	-7	0	0	3	3/4
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-
h_5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1/1
h_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	-

Entra la variable x_4 y sale h_1 resultando la siguiente tabla con la base actualizada.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	Cotas	Relación
-Z	0	0	0	0	-1	-1	-3	-2	-1	0	0	-43	
x_4	0	0	0	1	1/4	1/4	- 15/4	-3	-7/4	0	0	3/4	-
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	-
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-
h_5	0	0	0	0	-1/4	-1/4	15/4	3	7/4	1	0	1/4	-
h_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	-

La solución óptima relajada resulta ser $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(1, 1, 1, \frac{3}{4}, 0\right)$ con una cota superior de la función objetivo de 43.

Al presentar una de las variables binarias (x_4) un valor no entero, se ramifica el problema añadiendo las restricciones correspondientes.



Si se añade la restricción $x_4 \leq 0$, ésta se convierte en $x_4 + h_7 = 0$, obteniéndose una solución básica no factible tal y como se indica en la tabla siguiente al expresar dicha tabla en su forma estándar.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	Cotas
$-Z$	0	0	0	0	-1	-1	-3	-2	-1	0	0	0	-43
x_4	0	0	0	1	1/4	1/4	-15/4	-3	-7/4	0	0	0	3/4
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
h_5	0	0	0	0	-1/4	-1/4	15/4	3	7/4	1	0	0	1/4
h_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
h_7	0	0	0	0	-1/4	-1/4	15/4	3	7/4	0	0	1	-3/4
Relación					4	4							

Aplicando el procedimiento del simplex dual, la variable h_7 sale de la base y la variable x_5 entra en la base (podría haberse escogido la variable h_1). Se obtiene la tabla siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	Cotas
$-Z$	0	0	0	0	0	0	-18	-14	-8	0	0	-4	-40
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
h_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1
h_6	0	0	0	0	0	-1	15	12	7	0	1	4	-2
x_5	0	0	0	0	1	1	-15	-12	-7	0	0	-4	3
Relación						0							

La variable h_6 sale de la base y la variable h_1 entra en la base resultando la tabla siguiente:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	Cotas
$-Z$	0	0	0	0	0	0	-18	-14	-8	0	0	-4	-40
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
h_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	1
h_1	0	0	0	0	0	1	-15	-12	-7	0	-1	-4	2
x_5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1

La solución obtenida es factible ya que todas las variables toman valores enteros y el valor de la función objetivo es 40, que pasa a ser una cota inferior para el valor óptimo.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 1)$$

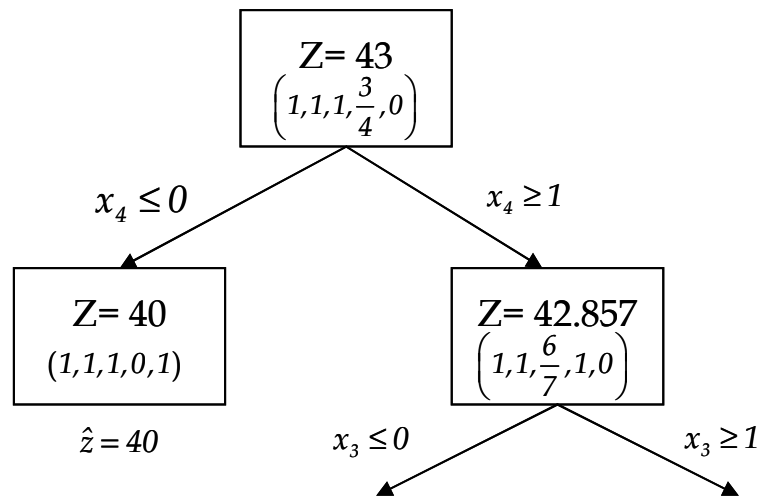
La otra rama que parte del problema relajado consiste en añadir la restricción $x_4 \geq 1$, ésta se convierte en $x_4 - h_8 = 1$, obteniéndose una solución básica no factible tal y como se indica en la tabla siguiente al expresarse en su forma estándar.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_8	Cotas
$-Z$	0	0	0	0	-1	-1	-3	-2	-1	0	0	0	-43
x_4	0	0	0	1	1/4	1/4	-15/4	-3	-7/4	0	0	0	3/4
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
h_5	0	0	0	0	-1/4	-1/4	15/4	3	7/4	1	0	0	1/4
h_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
h_8	0	0	0	0	1/4	1/4	-15/4	-3	-7/4	0	0	1	-1/4
Relación							12/15	2/3	4/7				

Sale de la base la variable h_8 y entra la variable h_4 ya que es la que menor relación adquiere.

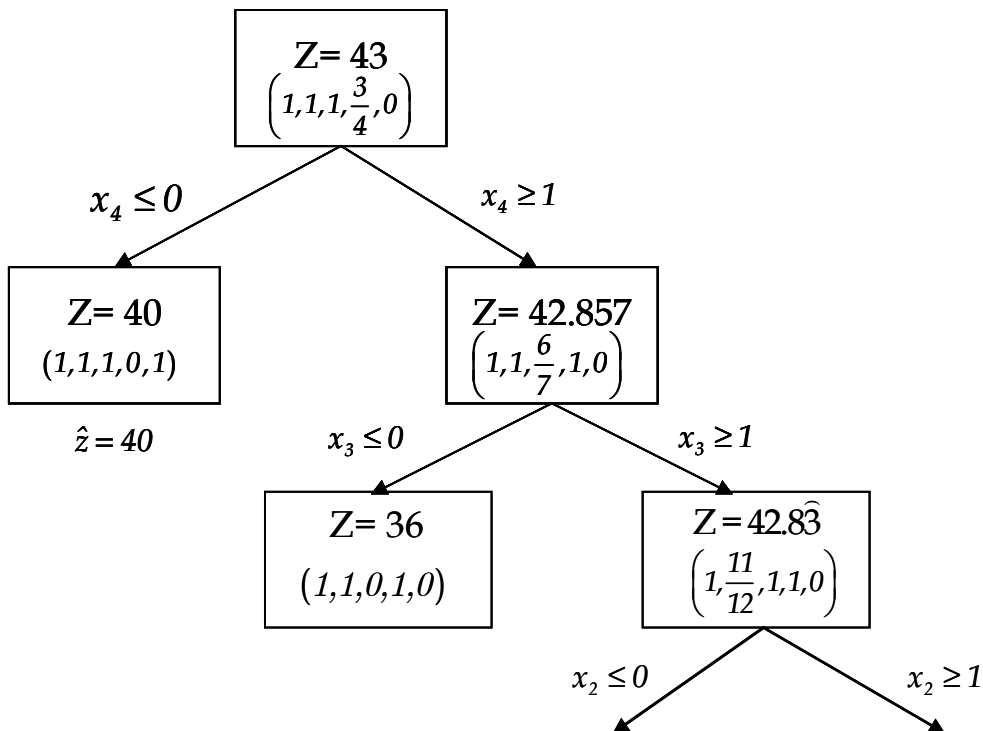
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_8	Cotas
$-Z$	0	0	0	0	-8/7	-8/7	-6/7	-2/7	0	0	0	-4/7	-300/7
x_4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	1
x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
x_3	0	0	1	0	1/7	1/7	-15/7	-12/7	0	0	0	4/7	6/7
h_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
h_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
h_4	0	0	0	0	-1/7	-1/7	15/7	12/7	1	0	0	-4/7	1/7

La solución óptima con la restricción incorporada es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(1, 1, \frac{6}{7}, 1, 0\right)$ con $z = 42.857$. La solución no se puede descartar, pues el valor objetivo no es inferior a la cota actual (40). Como x_3 no presenta un valor entero es necesario ramificar nuevamente.



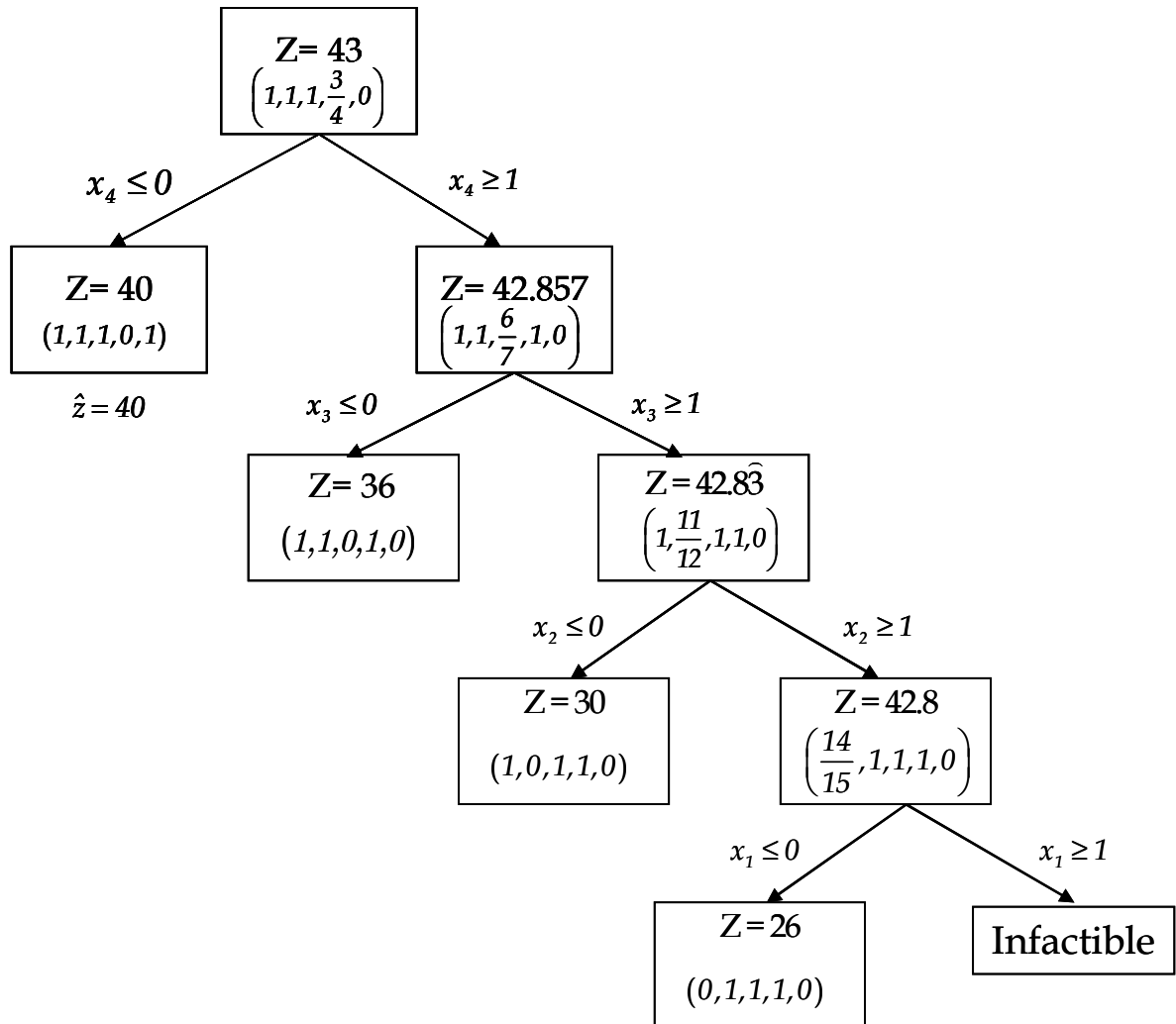
Añadiendo la restricción $x_3 \leq 0$ se obtiene la solución $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 0, 1, 0)$ con un valor de la función objetivo de 36 y se descarta esta solución por ser inferior a 40.

Si se añade $x_3 \geq 1$ se obtiene la solución $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(1, \frac{11}{12}, 1, 1, 0\right)$ con un valor de la función objetivo de 42.83 y por lo tanto se puede seguir ramificando el árbol tal y como se indica a continuación:



Añadiendo la restricción $x_2 \leq 0$ se obtiene la solución $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, 1, 1, 0)$ con un valor de la función objetivo de 30 y se descarta esta solución por ser inferior a la cota inferior.

Si se añade $x_2 \geq 1$ se obtiene la solución $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{14}{15}, 1, 1, 1, 0\right)$ con un valor de la función objetivo de 42.8 (no se descarta) y por lo tanto se puede seguir ramificando el árbol tal y como se indica a continuación:



Añadiendo la restricción $x_1 \leq 0$ se obtiene la solución $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 1, 1, 0)$ con un valor de la función objetivo de 26 y se descarta esta solución por ser inferior a la cota inferior.

Si se añade $x_1 \geq 1$ se obtiene una solución infactible.

Por lo tanto la solución óptima consiste en la solución entera inicialmente encontrada:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 1)$ con valor de la función objetivo 40. Este problema tiene otra solución igualmente óptima $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 0)$.

SOLUCIÓN. PROBLEMA 4

Nodos sin explorar o ramificar:

No factible: se poda ya que no hay solución factible

$z=18$: solución entera, luego $z^*=18$

$z=19$: se poda ya que aunque no es entera, es peor que la mejor encontrada hasta el momento (minimización)

$z=17$: no es entera, la cota es mejor que la de la solución entera mejor encontrada hasta el momento, es factible: no se puede podar, hay que seguir ramificando.

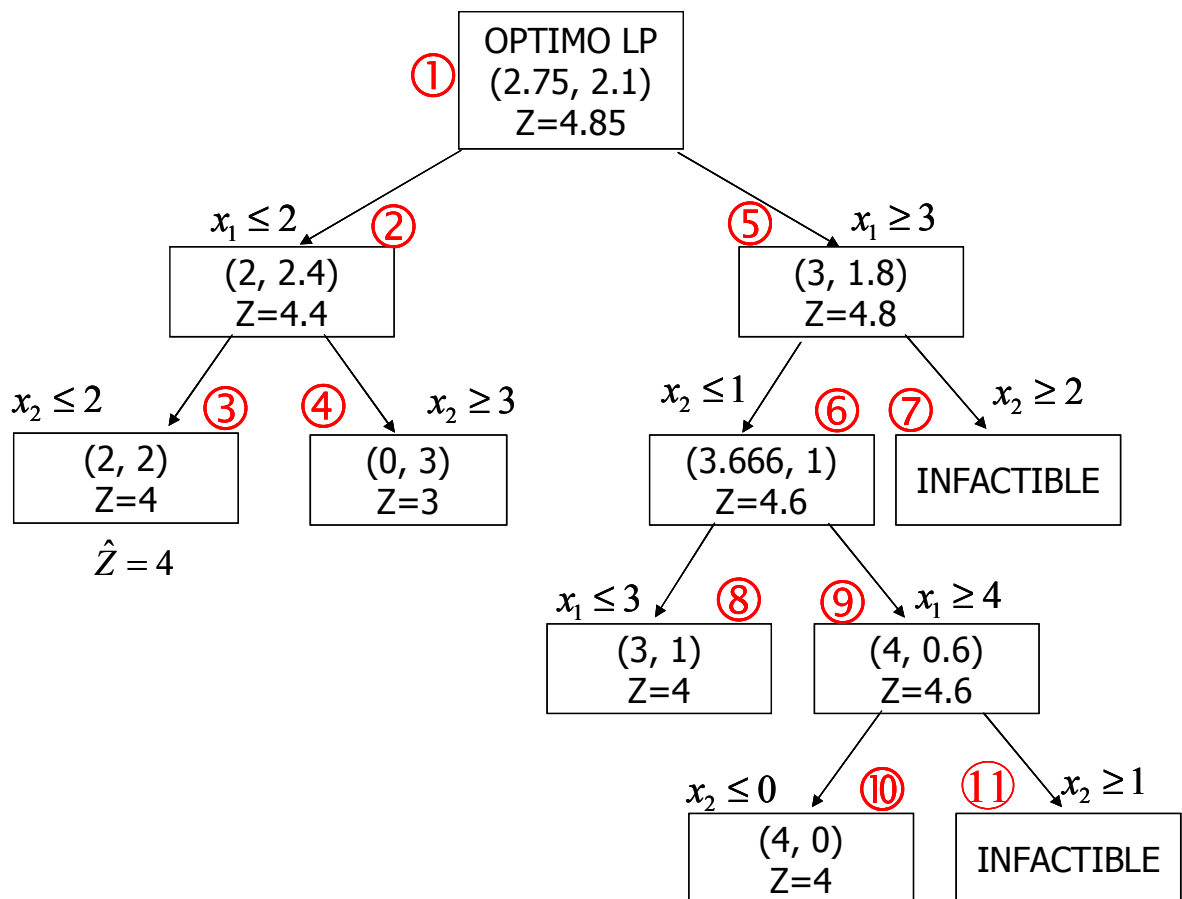
Resto de nodos ya están explorados.

La mejor solución por el momento es $z=18$, pero podría llegar a ser 17 explorando el nodo que aún queda activo.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADICIONALES DE PROGRAMACIÓN LINEAL ENTERA

SOLUCIÓN. PROBLEMA 1 APARTADO 3

El árbol de ramificación y corte es el siguiente:



Se resuelven los nodos del árbol según el orden establecido por el número enmarcado en el círculo. Siguiendo dicha ordenación el primer nodo que obtiene una solución entera factible es el nudo 3. Por lo tanto, la cota inferior \hat{z} del problema de maximización resulta ser 4. Al ser el valor de la función objetivo en el nodo 4 un valor entero inferior a \hat{z} dicho nodo es una solución factible pero no óptima.

La función objetivo al tener sólo variables enteras y también al ser sus coeficientes valores enteros la solución óptima del problema resultará ser un valor entero. Teniendo en cuenta este hecho el nodo 5 obtiene una función objetivo superior a la cota inferior pero la parte entera de dicha solución es igual a 4. Por lo tanto las ramas que salgan del nodo 5 pueden ser podadas ya que como máximo pueden alcanzar el valor 4.

No obstante el árbol está desarrollado completamente para comprobar que existen tres soluciones óptimas que obtienen el mismo valor de la función objetivo, es decir, 4. Las soluciones son por orden de aparición: (2,2), (3,1) y (4,0).

A continuación se muestra la resolución gráfica de cada uno de los nodos del árbol :

